REPERES - IREM . N° 20 - juillet 1995

CALCULATRICES : QUELQUES PIÈGES À ÉVITER

(Calculs et graphismes au lycée)

René ARNAUD
Edith BLANCK
Cathy PAPAÏX
Irem de Limoges

Durant l'année scolaire 1993/94, E. Blanck et C. Papaïx (professeurs stagiaires à l'IUFM du Limousin) avaient chacune une classe de seconde en responsabilité au Lycée Turgot de Limoges.

Après avoir pris connaissance des Instructions Officielles relatives à l'enseignement des mathématiques en lycée, elles se sont rendu compte qu'elles ne devaient pas ignorer "l'outil calculatrice" dans leur pratique pédagogique.

R. Arnaud, enseignant dans le même établissement et animateur IREM, avait déjà exploré quelques pistes de recherche à ce sujet (exposées lors de stages du Plan Académique de Formation, dans le cadre de la MAFPEN).

Ils ont donc décidé de travailler ensemble sur ce thème. Outre les deux séances de module objets de cet article, il s'est agit de mettre en place une initiation à la programmation (dans le cadre strict de ce qui est exigible au vu des Instructions Officielles). L'ensemble de cette recherche fera l'objet d'une publication à l'IREM de Limoges.

Tout d'abord, nous pensons qu'un élève de seconde doit s'équiper assez vite d'une calculatrice programmable, car la programmation fait partie des compétences exigibles au Baccalauréat, sur des thèmes clairement précisés suivant les sections. La rentrée de janvier (après les vacances de Noël...) nous paraît être une échéance raisonnable pour un tel équipement. L'expérience prouve que beaucoup succombent à l'attrait des écrans graphiques, bien que ce ne soit pas une obligation (c'est quand même un plus, car outre le tracé de courbes, sur certains de ces écrans on dispose de plusieurs lignes de "texte" à l'affichage...). Contrairement à ce que prônent les constructeurs, pour des raisons publicitaires, il ne nous semble pas nécessaire d'imposer une marque (voire un modèle précis).

La gestion de l'hétérogénéité des matériels n'est pas si difficile que ça pour un usage "courant" (en ce qui concerne la programmation se référer à la publication annoncée ci-dessus). En effet certains élèves maîtrisent très vite le fonctionnement de base et ne demandent pas mieux que d'expliquer à leurs camarades, ainsi qu'à leur professeur de mathématiques (s'il veut bien admettre qu'il peut avoir à apprendre, surtout vu l'évolution très rapide des matériels !).

Cependant il ne nous semble pas souhaitable de laisser les élèves se débrouiller seuls avec leur machine, car ils prennent vite de mauvaises habitudes. Après leur avoir donné des conseils pour utiliser la documentation fournie par le constructeur (pas toujours très accessible), nous avons pensé qu'il était bon de les mettre en garde contre un certain nombre de pièges, tant en ce qui concerne les calculs que le graphisme.

Ainsi nous avons mis au point deux séances de module pour les sensibiliser à certains aspects du fonctionnement des machines pouvant conduire à des aberrations. Ces séances ont été testées par E. Blanck et C. Papaïx dans leurs classes respectives, et R. Arnaud les a reprises au tout début de l'année scolaire 1994/95 dans sa classe de 1re S.

Plusieurs raisons nous ont conduits à choisir le cadre de l'enseignement modulaire plutôt que celui des Travaux Dirigés.

La première est d'ordre pratique : dans l'établissement, les élèves de seconde avaient une heure et demie de module par quinzaine et, comme ailleurs, une heure de TD par semaine. La demi-heure d'écart est nécessaire pour que chacun des thèmes choisis puisse être abordé en une seule séance dans de bonnes conditions (c'est-à-dire avec un temps suffisant pour laisser les élèves manipuler ou s'exprimer).

Ensuite la liberté de constitution des groupes a permis, pour les deux modules présentés, de diversifier les types de calculatrices (car nous souhaitions dégager des "comportements" identiques des machines, indépendamment du modèle). Par contre, pour une première prise de contact avec la programmation, il vaudrait mieux homogénéiser les matériels. Remarquons au passage que, pour une fois, les critères "scolaires" ne sont pas ceux pris en compte pour la répartition des élèves en module...

Enfin les thèmes traités font intervenir une des spécificités de l'enseignement modulaire, à savoir l'acquisition de méthodes, et constituent un aspect complémentaire de ce qui est abordé dans le cours proprement dit sans y être lié de manière trop directe.

Le premier module est à faire très tôt dans l'année, car il traite des problèmes relatifs aux calculs numériques (il avait été précédé d'un module sur les illusions d'optique : les élèves étaient donc un peu entraînés à ne plus se fier aux apparences). Le second module nécessite d'avoir abordé la notion de fonction numérique, car il concerne l'aspect graphique. Pour cette séance, les élèves ne disposant pas tous de calculatrice avec écran graphique, notre tâche a été facilitée par le fait que les maisons Casio et Texas Instruments avaient doté l'IREM de Limoges, à sa demande, respectivement de FX 7700G et de TI 81 ainsi que de dispositifs de projection d'écran par l'intermédiaire d'un rétroprojecteur (pour l'animation des stages déjà mentionnés).

Comme par ailleurs il s'est trouvé que ces modèles étaient les plus représentatifs des deux marques prédominant dans l'équipement de nos élèves, nous avons donc rédigé les commentaires ci-après en les prenant systématiquement comme référence (notez bien que la finalité de cet article n'est évidemment pas d'en faire une étude comparative).

Depuis, de nouveaux modèles sont apparus sur le marché. Le lecteur intéressé pourra facilement adapter les activités proposées en fonction de l'évolution des matériels.

Nous n'évoquons pas dans cet article les machines Hewlett Packard qui sont des outils très puissants, mais dont seuls des élèves ayant une bonne formation scientifique nous semblent pouvoir tirer profit. Un groupe de recherche s'est mis en place à l'IREM de Limoges à ce propos (rentrée 1994).

La suite de l'article, que nous vous invitons à découvrir en essayant au fur et à mesure sur votre calculatrice préférée, est structurée en trois parties pour chacun des deux modules.

Partie A :

Une liste des tâches à accomplir (calculs ou conjectures graphiques). Chaque question est écrite au tableau et débattue avant de passer à la suivante.

Une question telle que "calculez $\frac{1}{3} \times 3$" ou "les droites d'équations $y = 2x$ et $y = -\frac{1}{2}x$ sont-elles perpendiculaires ?" appelle *a priori* une réponse évidente. Son intérêt nous semble être de laisser planer le doute, de provoquer l'usage de la machine afin d'arriver à la particularité que nous souhaitons mettre en évidence, après avoir suscité la discussion.

Afin que la séance soit plus vivante, les élèves ne sont pas obligés de prendre de notes. A la demande de certains, nous avons cependant ensuite distribué un document récapitulatif des différentes activités.

Partie B :

Un résumé des commentaires effectués en classe ainsi que des ouvertures pour vous, lecteurs.

Partie C :

Quelques exercices pour "aller plus loin", si le temps le permet lors de la séance ou à donner à chercher aux élèves motivés (éventuellement, nous l'espérons, pour votre plaisir personnel...).

MODULE 1 : CALCULS À TORT ?

A. Liste des calculs proposés

Lorsque les élèves utilisent leur calculatrice, ils ont pour consigne de ne valider qu'après avoir "tout tapé".

C1 a) Donnez une écriture de $19 + 8 \times 10^{11}$ n'utilisant pas de signe opératoire. Quel est le résultat affiché par votre calculatrice pour un tel calcul ?

b) *Idem* avec $3 + 4 \times 10^{-10}$.

C2 Calculez 123 456 + 0,000 000 06 – 123 456.

C3 Calculez $\frac{1}{3} \times 3$.

C4 Déterminez, à la main, les 14 premiers chiffres du quotient de 1 par 7. Prévoyez alors le résultat affiché par votre calculatrice.

C5 Calculez $\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

C6 Calculez $50\,000\,006 \times 70\,000\,008$.

C7 Calculez $19\,087\,031\,065 \times 19\,087\,031\,075 - 19\,087\,031\,070^2$.

C8 Calculez $9\,x^4 - y^4 + 2\,y^2$ pour x = 10 864 et y = 18 817.
(d'après *Cours de Mathématiques Deug B 1^re^ année*, Yvon Nouazé, IREM de Montpellier)

C9 Calculez $1{,}000\,01^2$.

C10 Calculez $b^2 - 4\,ac$ pour $a = \frac{1}{9}$, $b = -\frac{4}{15}$ et $c = \frac{4}{25}$.

C11 Les réels $\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$ et $9 - 4\sqrt{5}$ sont-ils égaux ?

C12 Les réels 0,123 456 7 et $\frac{16.909}{136.963}$ sont-ils égaux ?
(d'après *Terracher Seconde*, Hachette)

B. Commentaires

I – Premières limites

C1 : Remarquons tout d'abord que quelques élèves ne maîtrisaient pas parfaitement l'usage de la machine pour les puissances de 10.

A l'aide de ces deux exemples, nous constatons que les calculatrices ont un format d'affichage particulier. En général, la plage de valeurs est de dix chiffres pour la mantisse et de deux chiffres pour l'exposant. Pour un réel tel que 0,311 253 198 7 la calculatrice ne "compte" pas le 0.

Cet affichage limite la précision des résultats notamment pour les calculs faisant intervenir des nombres "trop grands" (exemple a) ou avec "trop de décimales" (exemple b). Nous traiterons ces deux problèmes respectivement dans les paragraphes II et III.

En sortie, les calculatrices considérées affichent dix chiffres. Mais qu'en est-il si, en entrée, nous donnons des nombres à plus de dix chiffres ?

C2 : Certains élèves n'ont pas fait attention et ont utilisé leur machine.

	FX7700G	TI81
123 456 + 0,000 000 06 – 123 456	0	1×10^{-7}

En réorganisant les calculs, beaucoup ont cependant trouvé 0,000 000 06.

Limitée dans son affichage, la calculatrice ne prend donc pas forcément en compte "tout ce qui est tapé". Elle effectue des troncatures et des arrondis. Avec des calculatrices "plus performantes", vous pourriez obtenir le résultat juste, mais il suffirait alors "d'ajouter des zéros" pour retrouver le phénomène.

En faisant afficher

123 456 + 0,000 000 8 – 123 456,

nous constatons que nos deux modèles conservent cependant, en mémoire, plus de dix chiffres.

C3 : "Mentalement" ou avec une calculatrice, nous trouvons 1. Normal pour la machine ? Oui, car les calculatrices *scientifiques* ont, en mémoire, d'autres chiffres que les dix affichés. Nous les appellerons *chiffres cachés*. Ils sont au nombre de trois pour la FX 7700 G et la TI 81 (2 pour la FX 6800 G et 4 pour la TI 82).

Sans ces chiffres cachés, les calculatrices afficheraient 0,999 999 999 9 ne pouvant pas arrondir à partir de chiffres supplémentaires. Pour vous convaincre, calculez $\frac{1}{3} \times 3$ avec une calculatrice de base "à quatre opérations" (comme celles distribuées lors d'opérations publicitaires) ; si vous faites $3 \times \frac{1}{3}$, vous obtiendrez toujours 1...

Dans le calcul de $\frac{1}{3}$, les calculatrices font un arrondi par défaut. Pour visualiser les chiffres cachés, il suffit de demander la différence entre $\frac{1}{3}$ et la valeur affichée 0,333 333 333 3, ceci en une seule opération : vous obtenez alors $3,33 \times 10^{-11}$.

C4 : $\frac{1}{7} \approx 0,142\,857\,142\,857\,1$

Les chiffres cachés sont donc 5,7 et 1. La calculatrice arrondit par excès et affiche 0,142 857 142 9.

Pour $\frac{1}{7} - 0{,}142\,857\,142\,9$, les calculatrices donnent : $-4{,}29 \times 10^{-11}$.

En déterminant à la main, la différence $0{,}142\,857\,142\,9 - 4{,}29 \times 10^{-11}$, nous obtenons bien 0,142 857 142 857 1.

C5 :

	FX7700G	TI81
$\sqrt{6} - \sqrt{2} \times \sqrt{3}$	1×10^{-12}	0

Evidemment, $\sqrt{6}$ et $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ sont égaux et leur différence est nulle. 1×10^{-12} est certes "près" de zéro, mais pensez aux conséquences si ce résultat est repris dans un autre calcul ! La calculatrice permet en fait de conjecturer un résultat qui doit (ou peut) être vérifié "à la main".

Essayez aussi avec $(2\sqrt{2})^2 - 8$...

Dans les exercices suivants, nous avons voulu amener les élèves à ne plus avoir une confiance aveugle en leur calculatrice et à rester vigilants pour les différents calculs qu'ils auront à effectuer.

II – Lorsque les résultats sont "trop grands"...

C6 : La FX 7700 G et la TI 81 donnent $3{,}500\,000\,82 \times 10^{15}$.

Ce résultat est faux car le réel doit se terminer par 8 ($6 \times 8 = 48$).

Pour trouver le résultat exact, utilisons la méthode bien connue suivante :

$$(5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8)$$
$$= 35 \times 10^{14} + 82 \times 10^7 + 48$$
$$= 3\,500\,000\,820\,000\,048.$$

C7 : Posons

$$A = 19\,087\,031\,065 \times 19\,087\,031\,075 - 19\,087\,031\,070^2$$

	FX7700G	TI81
A	$-1{,}908 \times 10^{11}$	0

En considérant a = 19 087 031 070, nous avons à calculer $(a-5)(a+5) - a^2$ soit -25.

En s'intéressant encore au chiffre des unités, nous pouvions voir que les résultats affichés étaient faux. L'ordre de grandeur du réel A nous permettait aussi d'affirmer que la valeur affichée par la FX 7700 G était fausse.

C8 :

	FX7700G	TI81
$9x^4 - y^4 + 2y^2$	$-41\,022$	$58\,978$

En transformant l'expression, nous obtenons $(3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$, ce qui conduit au résultat correct : 1.

III – Lorsque il y a "trop de décimales"...

C9 : La FX 7700 G et la TI 81 donnent 1,000 02.

En utilisant une méthode similaire à C6, nous obtenons le résultat exact 1,000 020 000 1.

C10 :

	FX7700G	TI81
$b^2 - 4ac$	-3×10^{-14}	3×10^{-14}

En fait, $\left(-\frac{4}{15}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{9} \times \frac{4}{25} = \frac{16}{225} - \frac{16}{225} = 0.$

Remarque :
Sur la FX 7700 G la touche (ab/c) permet de calculer avec les fractions ce qui donne bien 0 comme résultat. Cette touche permet aussi la conversion entre fraction et équivalent décimal et réciproquement.

Pas de touche analogue sur la TI 81, mais la TI 82 possède les fonctions (>Frac) et (>Dec).

C11 :

	FX7700G	TI81
$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$	0,055 728 09	0,055 728 09
$9-4\sqrt{5}$	0,055 728 09	0,055 728 09
$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-(9-4\sqrt{5})$	$6{,}6\times10^{-13}$	$8{,}9\times10^{-13}$
$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-9+4\sqrt{5}$	0	1×10^{-12}
$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}-0{,}055\,728\,09$	$6{,}6\times10^{-13}$	$8{,}9\times10^{-13}$
$9-4\sqrt{5}-0{,}055\,728\,09$	0	0

Evidemment

$$\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}=9-4\sqrt{5}.$$

Remarque : certains élèves ayant oublié de mettre des parenthèses ont en fait calculé $\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}+2$, d'où la nécessité de reparler des règles de priorité.

C12 : Pour $\frac{16\,909}{136\,963}$, la FX 7700 G et la TI 81 donnent 0,123 456 7.

Ce résultat ne comporte que sept chiffres et semble exact. Ici encore, nous devons garder un esprit critique, car un simple coup d'œil sur $0{,}123\,456\,7\times136\,963$ (nombre ayant sept chiffres après la virgule, le dernier étant 1) et 16 909 nous permet d'affirmer que les deux réels 0,1234567 et $\frac{16\,909}{136\,963}$ sont différents.

> ***A retenir :*** **même si les calculs s'effectuent avec plus de chiffres qu'à l'affichage, une calculatrice travaille la plupart du temps avec des valeurs décimales approchées.**

C. Autres exercices possibles

E 1 *: Les réels $\frac{8\,712\,870}{48\,506\,557}$ et $\frac{505\,149}{2\,812\,281}$ sont-ils égaux ?*

	FX7700G	TI81
$\frac{8\,712\,870}{48\,506\,557}$	0,179 622 519 9	0,179 622 519 9
$\frac{505\,149}{2\,812\,281}$	0,179 622 519 9	0,179 622 519 9
$\frac{8\,712\,870}{48\,506\,557}-0{,}179\,622\,519\,9$	0	-3×10^{-13}
$\frac{505\,149}{2\,812\,281}-0{,}179\,622\,519\,9$	$4{,}02\times10^{-11}$	$4{,}02\times10^{-11}$

$8\,712\,870\times2\,812\,281$
et $48\,506\,557\times505\,149$
sont distincts car le premier se termine par 0 et l'autre par 3 (les machines considérées affichent pourtant
$2{,}450\,303\,876\times10^{13}$
pour chacun de ces produits).

Ainsi, les deux réels considérés au départ sont différents.

Remarque : le calcul explicite des produits est inutile, mais peut donner lieu à un exercice mettant en œuvre la méthode du C6. Par exemple :

$$\begin{aligned}
48\,506\,557 \times 505\,149 &= (485 \times 10^5 + 6\,557) \times (5 \times 10^5 + 5\,149) \\
&= 485 \times 5 \times 10^{10} + 485 \times 5\,149 \times 10^5 \\
&\quad + 6\,557 \times 5 \times 10^5 + 6\,557 \times 5\,149 \\
&= 24\,503\,038\,761\,993.
\end{aligned}$$

***E 2** : Pour $\sqrt{111\ 111\ 111 \times 1\ 000\ 000\ 005 + 1}$, la FX 7700 G et la TI 81 affichent 333 333 334.*

Ce résultat est-il correct ?

Posons a = 111 111 111 × 1 000 000 005. A première vue, le résultat risque d'être incorrect étant donné que le calcul de a doit dépasser la capacité de ces machines.

En effet, elles affichent toutes deux $1{,}111\ 111\ 116 \times 10^{17}$ pour a, alors que la valeur exacte est 111 111 111 555 555 555. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à écrire a = 111 111 111 × (1 000 000 000 + 5) et développer...

Cependant, pour

$$\sqrt{\underbrace{1...1}_{\substack{n+1 \\ \text{chiffres}}} \times \underbrace{10...05}_{\substack{n \\ \text{chiffres}}} + 1}$$ (avec n entier tel que $1 \le n \le 4$)

ces calculatrices affichent $\underbrace{3...3}_{\substack{n \\ \text{chiffres}}}4$, sachant que, pour les valeurs de n considérées, le produit sous le radical ne dépasse pas leur capacité. Bien qu'il ne faille jamais généraliser hâtivement, il ne semble pas impossible que le résultat dont il est question dans l'énoncé soit correct (forme similaire de calcul, mais avec n = 8).

Pour le prouver, il suffit de vérifier que $333\ 333\ 334^2$ est bien égal à $111\ 111\ 111 \times 1\ 000\ 000\ 005 + 1$:

$$\begin{aligned}
333\ 333\ 334^2 &= (333\ 333\ 333 + 1)^2 \\
&= (3 \times 111\ 111\ 111 + 1)^2 \\
&= 9 \times 111\ 111\ 111^2 + 6 \times 111\ 111\ 111 + 1 \\
&= 111\ 111\ 111 \times (9 \times 111\ 111\ 111 + 6) + 1 \\
&= 111\ 111\ 111 \times (999\ 999\ 999 + 6) + 1 \\
&= 111\ 111\ 111 \times 1\ 000\ 000\ 005 + 1
\end{aligned}$$

***E 3** : Comparez $\dfrac{1{,}000\,01}{(1{,}000\,04)^2}$ et $\dfrac{(0{,}99994)^2}{0{,}99995}$.*

	FX7700G	TI81
$\dfrac{1{,}000\,01}{(1{,}000\,04)^2}$	0,999 930 004	0,999 930 004
$\dfrac{(0{,}99994)^2}{0{,}99995}$	0,999 93	0,999 930 000 1

Cherchons si $\dfrac{1{,}000\,01}{(1{,}000\,04)^2} > \dfrac{(0{,}99994)^2}{0{,}99995}$ (1)

Pour cela, calculons une différence.

$$\begin{aligned}
&\frac{1{,}000\,01}{(1{,}000\,04)^2} - \frac{(0{,}99994)^2}{0{,}99995} \\
&= \frac{1 + 10^{-5}}{(1 + 4 \times 10^{-5})^2} - \frac{(1 - 6 \times 10^{-5})^2}{1 - 5 \times 10^{-5}} \\
&= \ldots \\
&= \frac{3 \times 10^{-10} \times (13 - 32 \times 10^{-5} - 192 \times 10^{-10})}{(1 + 4 \times 10^{-5})^2 (1 - 5 \times 10^{-5})}
\end{aligned}$$

Ce dernier réel étant strictement positif, (1) est vraie.

***E 4** : Classez, par ordre croissant, les nombres suivants :*

$A = 999\ 999\ 999\ 999^2$;
$B = 999\ 999^4$;
$C = 999\ 999\ 999\ 999\ 999\ 999 \times 999\ 999$.
(d'après *Module en seconde ; Commission Inter-IREM Second Cycle*)

	FX7700G	TI81
A	$9{,}999\ 999\ 998 \times 10^{23}$	10^{24}
B	$9{,}999\ 96 \times 10^{23}$	$9{,}999\ 96 \times 10^{23}$
C	$9{,}999\ 989\ 999 \times 10^{23}$	$9{,}999\ 99 \times 10^{23}$

Cherchons si B < C < A (1)

Soit $\alpha = 999\ 999 = 10^6 - 1$

$$A = (\alpha \times 10^6 + \alpha)^2 = \alpha^2 (10^6 + 1)^2$$
$$= \alpha^2 (10^{12} + 2 \times 10^6 + 1)$$

$$B = \alpha^4 = \alpha^2 \times \alpha^2 = \alpha^2 (10^6 - 1)^2$$
$$= \alpha^2 (10^{12} - 2 \times 10^6 + 1)$$

$$C = (\alpha \times 10^{12} + \alpha \times 10^6 + \alpha) \times \alpha$$
$$= \alpha^2 (10^{12} + 10^6 + 1)$$

Comme $\alpha^2 > 0$, (1) est vraie, vu que
$10^{12} - 2 \times 10^6 + 1$
$< 10^{12} + 10^6 + 1$
$< 10^{12} + 2 \times 10^6 + 1$.

Remarque :

$9^2 = 81$; $99^2 = 9\ 801$; $999^2 = 998\ 001$;
$9\ 999^2 = 99\ 980\ 001$ et $99\ 999^2 = 9\ 999\ 800\ 001$.

Il est donc possible de conjecturer que $\alpha^2 = 999\ 998\ 000\ 001$, ce qui se démontre vu que $\alpha^2 = 10^2 - 2 \times 10^6 + 1$...

MODULE 2 : GRAP'HICS !

A. Liste des activités

Les élèves ont pour consigne de "nettoyer l'écran" entre deux activités.

A1 : Représentez les droites d'équations $y = 3x$ et $y = 3x + 19$.

A2 : Les droites d'équations $y = 2x$ et $y = -\frac{1}{2}x$ sont-elles perpendiculaires ?

A3 : Faites tracer les courbes d'équations $y = -7x + 1$ et $y = -7x^3 + 0{,}01x^2 - 6x + 1$

(Xmin = – 4,7 ; Xmax = 4,7 ; Ymin = – 3,1 ; Ymax = 3,1).

Est-ce normal ?

A4 : Combien les courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = -x^3 + 2x$ et $g(x) = 4x^2 - 3$ ont-elles de points d'intersection ?
(d'après brochure *"Calculatrices Graphiques"*, Casio)

A5 : Faites tracer la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}$$

(Xmin = – 4 ; Xmax = 4 ; Ymin = – 3, Ymax = 3)

Si la valeur absolue n'a pas été abordée, à remplacer par l'exercice 5 de la partie C.

A6 : Faites tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

(Xmin = – 2,5 ; Xmax = 2,5 ; Ymin = 0, Ymax = 5).

A7 : Faites tracer la courbe représentative de la fonction f, définie par $f(x) = \frac{1+2x}{5x+1}$, dans les deux cas suivants :

(Xmin = – 4,7 ; Xmax = 4,7 ; Ymin = – 3,1 ; Ymax = 3,1) ;
(Xmin = – 5 ; Xmax = 5 ; Ymin = – 3 ; Ymax = 3).

B. Commentaires

A1 : Nous savons que ces deux droites sont parallèles (la seconde étant déduite de la première par la translation de vecteur $19\vec{j}$).

Pourtant, nous pouvons faire deux constatations. Tout d'abord, certains élèves sachant utiliser la touche Graph (ou GRAPH), mais ne maîtrisant pas la notion de cadrage peuvent n'avoir qu'une droite ou même aucune. Nous traiterons de ce problème dans les premières activités. Dans les autres activités, nous expliquerons pourquoi les tracés sont des successions de petits segments et non des droites.

I – Des problèmes de cadrage

Pour obtenir les deux droites d'équations $y = 3x$ et $y = 3x + 19$ sur l'écran d'une calculatrice, il suffit de trouver le bon cadrage.

Sur une calculatrice graphique, nous pouvons imposer sur chaque axe de coordonnées les valeurs extrêmes : abscisse minimale (Xmin), abscisse maximale (Xmax), ordonnée minimale (Ymin) et ordonnée maximale (Ymax), et certains petits traits de graduation (Xscl et Yscl). Dans la suite de cet article, nous serons amenés à changer les valeurs extrêmes mais nous n'évoquerons pas toujours ces graduations (si rien n'est précisé, prendre 1 pour Xscl et Yscl).

Pour la TI 81, nous vous conseillons par contre de laisser Xres à 1.

En prenant (Xmin = – 5 ; Xmax = 5 ; Ymin = – 15 ; Ymax = 25 ; **Yscl = 5**), nous pouvons visualiser correctement les deux droites. Ces valeurs ont été choisies en fonction des ordonnées à l'origine et de leurs coefficients directeurs.

A2 : Cette question est volontairement incomplète : aucune indication n'est donnée en ce qui concerne le repère. Les deux droites sont évidemment perpendiculaires dans un repère orthonormal ($2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$), mais les échelles choisies par nos élèves ne correspondent pas forcément à un tel repère.

Sur les Casio, la fonction INIT dans le menu Range permet d'obtenir directement les valeurs pour un repère orthonormal : (Xmin = – 4,7 ; Xmax = 4,7 ; Ymin = – 3,1 ; Ymax = 3,1).

Sur les Texas Instruments, il s'agit de la fonction <square> dans le menu ZOOM. Dans ce cas, les valeurs ne sont pas fixées une fois pour toutes mais elles s'adaptent à l'échelle en place au moment de la manipulation.

A3 : Avec les valeurs choisies, les deux courbes se superposent. Pourtant, la courbe d'équation $y = -7x^3 + 0{,}01\ x^2 - 6x + 1$ n'est pas une droite ! Nous retrouvons une allure "correcte" des deux courbes en considérant, par exemple, le cadrage suivant :

(Xmin = – 2 ; Xmax = 2 ; Ymin = – 20 ; Ymax = 20 ; **Yscl = 5**).

A4 : Dans un repère "orthonormal usuel", les courbes tracées n'ont en apparence que deux points d'intersection car sur la gauche elles semblent "parallèles". En réalité, elles en ont trois. Pour les visualiser, il suffit de faire tracer la courbe représentative de la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x) = -x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ et de considérer ensuite ses points d'intersection avec l'axe des abscisses. En effet, résoudre $f(x) = g(x)$ équivaut à résoudre $f(x) - g(x) = 0$ soit encore $h(x) = 0$. La touche Trace (ou TRACE) permet d'obtenir des valeurs *a priori* approchées des abscisses de ces points d'intersection (notons qu'il est possible de vérifier que $h(1) = 0$).

Ces quelques exemples nous ont permis d'apprécier l'utilité d'un bon cadrage (ou plutôt les effets dévastateurs d'un mauvais cadrage). Ce cadrage "idéal" n'est en général mis au point qu'après avoir réalisé l'étude des fonctions à représenter.

Un cadrage étant imposé, expliquons désormais pourquoi des droites ne sont pas représentées par des droites.

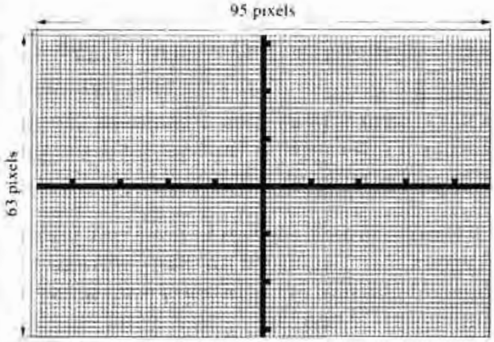
II – Des problèmes de raccordement

A5 : Explicitons tout d'abord cette fonction :

Si $\quad x > 1,\ f(x) = \dfrac{x-1}{x-1} = 1$

et si $\quad x < 1,\ f(x) = \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1.$

Elle n'est pas définie pour x = 1. Pourtant, les calculatrices relient les deux demi-droites horizontales. Ceci est dû à l'organisation de l'écran, fait de petits carrés, appelés pixels, qui sont soit éteints, soit allumés. L'écran de la FX 7700 G est constitué de 95 pixels en largeur et de 63 en hauteur. Nous dirons que c'est un écran de 95 × 63 pixels (en fait il y a physiquement 96 × 64 pixels, mais une des lignes et une des colonnes ne sont pas utilisées). L'écran de la TI 81 est de 96 × 64 pixels. Cette disposition ne permet pas d'obtenir un repère symétrique par rapport à l'origine (remarquons que la TI 82 ne prend plus en compte que 95 × 63 pixels).



FX 7700 G avec le repère "orthonormal usuel"

Détaillons tout d'abord le tracé des deux demi-droites, par la FX 7700 G, et avec le cadrage imposé. En abscisse, les 95 pixels doivent représenter la longueur Xmax – Xmin soit 8. Ainsi, la première abscisse représentera – 4. La seconde sera $-4 + \frac{8}{94}$ et ainsi de suite, pour obtenir la 95e qui sera $-4 + 94 \times \frac{8}{94} = 4$. Le partage en ordonnée se fait de manière identique $(-3 ; -3 + \frac{6}{62} ; ... ; 3)$.

Pour représenter la courbe, la calculatrice considère la première abscisse, notée x_0, et calcule son image par la fonction f, qui sera 1. Elle recherche alors l'ordonnée, notée y_0, qui est la plus proche de cette image 1. Si Ymin $\leq y_0 \leq$ Ymax le pixel de coordonnées (x_0, y_0) s'allume alors. Au fur et à mesure, la calculatrice considère les 95 abscisses.

Expliquons, désormais, la liaison entre les deux demi-droites. Sur les calculatrices graphiques, il existe deux modes de représentation : représentation sous forme de points (option PLOT pour les Casio et Dot pour les Texas Instruments) ou représentation sous forme de points reliés par des segments (option CONNECT ou Connected désignée dans la suite par "connected"). Avec la première option, seuls les pixels évoqués ci-dessus s'allument. Par contre, avec la seconde option, ils sont reliés par des segments (formés d'autres pixels intermédiaires allumés : voir le tracé de la droite d'équation y = 3x dans la partie C de ce module). Ainsi, les deux demi-droites sont reliées.

Deux remarques sur cette activité :

– Certains de nos élèves ont utilisé la touche ab/c des Casio au lieu de ÷. Ils ont alors obtenu la droite d'équation y = 1. En effet, cette touche est prioritaire sur toutes les autres. La calculatrice effectue d'abord le quotient $\frac{x-1}{x-1}$ puis considère sa valeur absolue. Il suffit de faire attention aux parenthèses pour l'utiliser correctement.

– L'écran de la FX 7700 G étant de 95 × 63 pixels, nous comprenons désormais les valeurs retenues pour obtenir ce que nous appelons le repère "orthonormal usuel"

(Xmin = – 4,7 ; Xmax = 4,7 ;
Ymin = – 3,1 ; Ymax = 3,1).

Il est à noter que (Xmin = – 9,4 ; Xmax = 9,4 ; Ymin = – 6,2 ; Ymax = 6,2) fournit par exemple un autre repère orthonormal.

Par la suite, sauf indication contraire, les commentaires seront relatifs au mode "connected".

A6 : Cette fonction est définie sur l'intervalle $]-2, 2[$, elle est paire. En considérant les variations de fonctions usuelles, nous montrerions qu'elle est strictement croissante sur $[0, 2[$. De plus, en prenant des valeurs proches de 2, nous verrions que les images sont de plus en plus grandes (en fait, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$).

Pourtant, les courbes tracées par les calculatrices s'arrêtent.

Sur la FX 7700 G, les abscisses sont de la forme $-3 + i\,\frac{5}{94}$ avec $0 \le i \le 94$. Pour $i = 18$, nous avons environ $-2{,}04$. Aucun pixel ne s'allume puisque la calculatrice ne peut pas déterminer d'image. Pour $i = 19$, nous avons environ $-1{,}98$: le pixel $(\approx -1{,}98\ ;\ \approx 3{,}44)$ sera donc le premier de la courbe que la calculatrice connaîtra. De même $(\approx 1{,}98\ ;\ \approx 3{,}44)$ sera le dernier (explication analogue pour la TI 81).

A7 : Pour $(X_{min} = -4{,}7\ ;\ X_{max} = 4{,}7\ ;\ Y_{min} = -3{,}1\ ;\ Y_{max} = 3{,}1)$, la courbe tracée par la FX 7700 G s'arrête aux environs de $-0{,}2$ en abscisse. Les abscisses sont $-4{,}7 + i\,\frac{9{,}4}{94} = -4{,}7 + 0{,}1\,i$ avec $0 \le i \le 94$. Elles vont donc de 0,1 en 0,1. La calculatrice détermine $f(-4{,}7)\ ;\ f(-4{,}6)\ ;\ \dots\ ;\ f(-0{,}3)$. Comme $-0{,}2$ annule le dénominateur de f, la calculatrice ne détermine pas d'image et aucun pixel ne s'allume. Le pixel correspondant à $-0{,}1$ pour abscisse s'allume, mais les pixels correspondant à $-0{,}3$ et à $-0{,}1$ ne sont pas reliés car la calculatrice a laissé un "trou" pour $-0{,}2$. C'est pour cela que la courbe s'arrête.

La TI 81 trace ce qui semble correspondre à une asymptote verticale. Les abscisses qu'elle considère sont de la forme $-4{,}7 + i\,\frac{9{,}4}{95}$ avec $0 \le i \le 95$. L'abscisse $-0{,}2$ n'est pas prise en compte. Les pixels $(\approx -0{,}25\ ;\ \approx -2{,}13)$ et $(\approx -0{,}14\ ;\ \approx 2{,}73)$, correspondant respectivement à $i = 45$ et $i = 46$, sont alors reliés.

Pour $(X_{min} = -5\ ;\ X_{max} = 5\ ;\ Y_{min} = -3\ ;\ Y_{max} = 3)$, la courbe tracée par la FX 7700 G est presque du même type que celle dont nous venons de parler pour la TI 81.

Les abscisses considérées sont de la forme $-5 + i\,\frac{10}{94}$ avec $0 \le i \le 94$. L'abscisse $-0{,}2$ n'est toujours pas prise en compte.

Pour $i = 45$, l'ordonnée calculée est strictement inférieure à -3. Il faut imaginer un pixel fictif (hors écran) qui est "relié" à $(\approx 0{,}32\ ;\ \approx -0{,}61)$ et à $(\approx -0{,}11\ ;\ \approx 1{,}68)$, respectivement obtenus pour $i = 44$ et $i = 46$.

Dernière remarque, certains de nos élèves ont obtenu une droite horizontale : ils avaient, en fait, demandé la représentation graphique de $x \mapsto 1 + 2x \div 5x + 1$ soit $x \mapsto 1 + \frac{2}{5} + 1$ (encore un problème de parenthèses !).

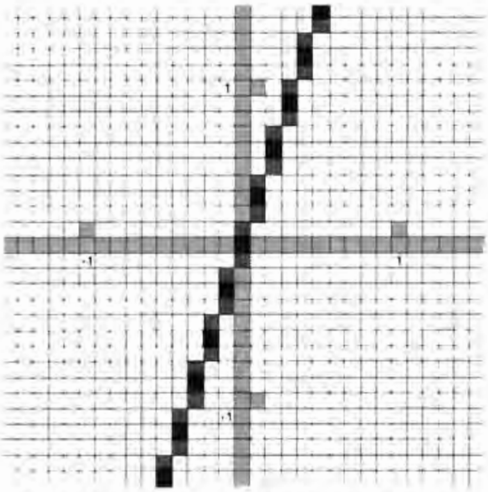
C. Autres exercices possibles

***E 1** : Sur une feuille à petits carreaux, dessinez les pixels allumés (autour de l'origine) pour représenter la droite d'équation $y = 3x$ sur un écran de "95 × 63"*

$(X_{min} = -4{,}7\ ;\ X_{max} = 4{,}7\ ;\ Y_{min} = -3{,}1\ ;\ Y_{max} = 3{,}1)$.

Les abscisses sont :
$-4{,}7 + i\,\frac{9{,}4}{94} = -4{,}7 + 0{,}1\,i$ avec $0 \le i \le 94$.

abscisse	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0	0,1	0,2	0,3
ordonnée	-1,2	-0,9	-0,6	-0,3	0	0,3	0,6	0,9



■ pixels calculés ■ pixels intermédiaires

***E 2** : Faites tracer la courbe représentative de la fonction f définie par :*

f(x) = $20\,x^3 - 60\,x^2 + 12\,x + 33$ *dans le repère "orthonormal usuel".*
Qu'en pensez-vous ?

La courbe d'équation

$$y = 20\,x^3 - 60\,x^2 + 12\,x + 33$$

n'est évidemment pas la réunion de trois droites (apparemment verticales sur la FX 7700 G).

Pour obtenir une allure "correcte", considérez le cadrage :

(Xmin = – 2 ; Xmax = 4 ;
Ymin = – 50 ; Ymax = 50 ; **Yscl = 10**).

***E 3** : Faites tracer les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :*

$$f(x) = -1 + \sqrt{1+x^2} \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{1+|x|}$$

(Xmin = – 10 ; Xmax = 10 ; Ymin = 0 ; Ymax = 10).
Ces deux fonctions sont-elles égales ?

Les tracés se superposent quasiment. Un calcul, faisable en seconde bien que difficile, conduirait à

$$f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$$

La courbe représentative de f est donc strictement au-dessous de celle de g pour $x \neq 0$ (vu qu'alors $1 + \sqrt{1+x^2} > 1 + |x|$, soit $f(x) < g(x)$).

***E 4** : Recherchez les points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g définies par $f(x) = x^3 + 9\,x$ et $g(x) = -6\,x^2 - 2$.*

Le repère "orthonormal usuel" n'est pas très pratique.

En prenant (Xmin = – 2 ; Xmax = 2 ; Ymin = – 10 ; Ymax = 10), les courbes tracées n'ont en apparence qu'un seul point d'intersection. En faisant tracer la représentation graphique de la fonction f – g (prendre Xmin = – 5), nous trouvons trois points d'intersection dont nous pouvons conjecturer les abscisses : $-2-\sqrt{3}$; -2 ; $-2+\sqrt{3}$

(utilisation de la touche Trace ou TRACE).

Il ne reste plus qu'à vérifier analytiquement.

E 5 *: Faites tracer la courbe représentative de la fonction f définie par*

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, *dans les deux cas suivants :*

*(Xmin = – 4,7 ; Xmax = 4,7 ;
Ymin = – 3,1 ; Ymax = 3,1) ;*

*(Xmin = – 4,7 ; Xmax = 4,8 ;
Ymin = – 3,1 ; Ymax = 3,1).*

La courbe d'équation $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ est la droite d'équation y = x + 1 privée du point de coordonnées (1, 2). Cependant en mode "connected", si la subdivision en abscisse ne contient pas 1, la calculatrice tracera la droite d'équation y = x + 1 complète.

E 6 *: Faites tracer la courbe représentative de la fonction f définie par* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ *(Xmin = – 3 ; Xmax = 3 ;* ***Xscl = 0 ;*** *Ymin = – 2 ; Ymax = 2).*

Cette courbe passe évidemment par les points de coordonnées (– 1 ; 0) et (1 ; 0). Pourtant, le tracé n'atteint pas l'axe des abscisses.

En effet, avec la subdivision choisie, le premier pixel que la FX 7700 G connaît est

$(\approx 0{,}96 ; \approx 0{,}29)$ car $-3 + 58 \times \frac{6}{94} \approx -0{,}96$.
De même, le dernier pixel est $(\approx 0{,}96 ; \approx 0{,}29)$.

Dans un repère orthonormal, cette courbe est le demi-cercle unité supérieur...

E 7 *: Faites tracer la courbe représentative de la fonction f définie par* $f(x) = \frac{1-5x}{3x-2}$
(Xmin = – 10 ; Xmax = 10 ; Y min = – 10 ; Ymax = 10 ; ***Yscl = 0****).*

Essayez avec le même cadrage, mais en mode (PLOT) ou (Dot), puis avec le repère "orthonormal usuel" en mode "connected".

CONCLUSION

Une fois ces différentes mises en garde effectuées, en prenant soin de ne pas pour autant dégoûter les élèves d'utiliser leur machine, quand même très performante, il est possible d'aller plus avant dans une prise en compte efficace de l'usage de cet outil en mathématiques (pour vérifier, pour conjecturer...). Nous pensons surtout qu'ils ont moins tendance à se précipiter sur un écran graphique dès qu'il y a une fonction à étudier.

Un certain nombre de publications IREM existent à ce sujet et les constructeurs abreuvent abondamment les collègues de brochures "pédagogiques".

Cependant il ne nous semble pas indispensable de vouloir tout traiter avec des calculatrices. Lorsqu'il s'agit de travaux de recherche en classe, d'autres moyens aussi efficaces existent, pour peu que l'établissement dispose d'ordinateurs accessibles aux enseignants de mathématiques (ce qui finira bien par se généraliser à moyen terme...).

Nous pensons à l'emploi de traceurs de courbes, de tableurs et depuis quelques temps de logiciels de calcul formel qui permettent un travail intéressant au niveau conjecture, avec une ergonomie supérieure, quelle que soit la calculatrice considérée (ces différents logiciels posent d'ailleurs, à un autre niveau, le même type de problèmes : calculs numériques et graphisme...).

Espérons que les quelques idées développées ci-dessus pourront aider les collègues qui ne veulent pas à tout prix lutter contre la technologie ambiante, comme dans ces formations scientifiques post-baccalauréat où, sous prétexte d'égalité entre étudiants, on n'autorise que des calculatrices bas de gamme, voire pas du tout (ah, le bon vieux temps de la règle à calculs et des tables de logarithmes !).

Ceci dit nous sommes partisans, de temps à autre, de contrôles pour lesquels les calculatrices sont interdites (à la condition expresse que ce soit indiqué à l'avance pour que l'élève puisse se préparer en toute connaissance de cause).

Prenons comme exemple des exercices classiques tels que les exercices des évaluations à l'entrée en seconde (n°3 en septembre 1992 et 1993, n°9 en septembre 1994) où il s'agit, souvent, d'attribuer une équation (choisie dans la liste fournie) à une droite tracée : quelle compétence évalue-t-on si l'élève dispose d'une calculatrice graphique dont il maîtrise l'utilisation ?