PREUVE ET PROGRÈS EN MATHÉMATIQUES

Présentation

William P. Thurston est un mathématicien américain qui s'est intéressé à des domaines variés des mathématiques. Sa contribution à l'avancée de cette science est spectaculaire. Il a notamment renouvelé la vision de la géométrie en dimension 3 en montrant la puissance des modèles de géométrie hyperbolique, comme l'avait fait auparavant H. Poincaré pour la géométrie en dimension 2.

Il a reçu la médaille Field en 1978. Il est aujourd'hui directeur du MSRI, centre de recherches prestigieux en mathématiques à Berkeley en Californie.

Cependant sa préoccupation n'est pas seulement de *créer* des mathématiques, mais d'en *faire avancer la compréhension humaine* et de la partager avec ses collègues, ses lecteurs, ses auditeurs... Ce faisant, il en crée. Pour William P. Thurston, en mathématiques, pensée, création et communication sont intimement liées. Et bien sûr, les preuves jouent un rôle important dans la communication. Mais qu'est ce qu'une preuve ? La réflexion que nous livre Thurston à ce sujet nous éclaire sur des aspects non formels et cependant significatifs dans la vie quotidienne des mathématiciens.

Nous présentons ci-après l'une des versions de sa réflexion, version qu'il a intitulée *Preuve et progrès en mathématiques.*

L'occasion lui en a été fournie par un article de deux mathématiciens A. Jaffé et F. Quinn intitulé "Mathématiques théoriques : vers une synthèse culturelle des mathématiques et de la physique théorique". Dans cet article il est question des différents états comparés de la production mathématique et de celle de la physique, et aussi des différentes formes de communication – orale en séminaire ou en colloque, ou écrite dans des journaux spécialisés par exemple. Dans ce dernier cas, A. Jaffé et F. Quinn attirent l'attention sur le statut de ce qui est écrit – conjecturé, énoncé prouvé... – et sur le fait que ce statut soit explicité ou reste implicite. Ce faisant, remarque W. Thurston, ils mettent en scène implicitement un modèle des mathématiques sur un unique axe *spéculation-rigueur* qui laisse de côté des points essentiels pour lui et qu'il va souligner dans l'article ci-dessous.

Nous espérons que ce texte sera l'occasion d'ouvrir un débat sur les sujets qui y sont abordés et qui sont cruciaux dans les rapports enseignement-apprentissage des mathématiques.

Régine DOUADY

PREUVE ET PROGRÈS EN MATHÉMATIQUES

William P. THURSTON

Au fur et à mesure que les mathématiques avancent, nous les intégrons dans notre réflexion, et au fur et à mesure que notre réflexion devient plus sophistiquée, nous élaborons de nouveaux concepts et de nouvelles structures mathématiques : le contenu des mathématiques change pour refléter comment nous pensons. Si ce que nous faisons consiste à construire de meilleures façons de penser, alors les dimensions psychologique et sociale sont essentielles dans un modèle correct du progrès mathématique.

Cet essai sur la nature de la preuve et des progrès en mathématiques a pour origine l'article de Jaffé et Quinn : "Mathématiques théoriques : vers une synthèse culturelle des mathématiques et de la physique théorique". Leur article soulève un certain nombre de points auxquels les mathématiciens devraient consacrer plus d'attention, mais aussi perpétue un certain nombre d'attitudes et de croyances largement répandues, et qui méritent d'être examinées et discutées.

L'un des paragraphes de cet article, qui renvoie à certains de mes travaux, diffère notablement et de ma propre expérience, et des observations que j'ai pu recueillir, à titre de vérification, en discutant avec d'autres mathématiciens travaillant dans ce domaine.

Après réflexion, il m'a semblé que l'article de Jaffé et Quinn était un bon exemple du fait que les gens voient ce qu'ils sont réglés pour voir. La description qu'ils font de mes travaux résulte d'une projection de la sociologie des mathématiques sur un axe unidimensionnel (spéculation *versus* rigueur) qui ignore les phénomènes les plus fondamentaux.

Un certain nombre de personnes a souhaité qu'il soit répondu à l'article de Jaffé et Quinn mais, plutôt qu'analyser et critiquer leur article, et réfuter les points négatifs, je préfère ici une discussion positive.

Pour tenter d'éplucher différents niveaux de suppositions, il est important d'essayer de commencer par les bonnes questions :

1. Que font les mathématiciens ?

Il y a beaucoup de réponses à cette question, que j'ai essayée de formuler de façon qu'elle ne présuppose pas la nature de la réponse. Ce ne serait pas bon, par exemple, de commencer par la question :

Comment les mathématiciens démontrent-ils les théorèmes ?

Ainsi formulée, la question ouvre un intéressant sujet, mais commencer par elle revient à admettre deux suppositions cachées, à savoir :

1. Qu'il existe une théorie, et une pratique, de la démonstration mathématique qui est à la fois : uniforme, objective, et bien établie.
2. Que les progrès que réalisent les mathématiciens consistent à prouver des théorèmes.

Il vaut la peine d'examiner ces hypothèses, plutôt que de les accepter comme des évidences et de s'appuyer sur elles. La question n'est même pas :

Comment les mathématiciens font-ils des progrès en mathématiques ?

à laquelle je préfère une forme plus explicite (plus fondamentale) :

Comment les mathématiciens font-ils avancer la compréhension des mathématiques ?

Cette question amène au premier plan quelque chose qui est à la fois fondamental et diffus, mais qui est souvent minimisé ou négligé par les mathématiciens, à savoir que ce que nous faisons consiste à trouver des moyens permettant aux gens de comprendre les mathématiques et de pouvoir y penser, y réfléchir.

Les progrès rapides des ordinateurs ont contribué à mettre ce point en évidence, parce que les gens et les ordinateurs sont très différents. Par exemple, la démonstration du théorème des quatre couleurs par Appel et Haken, qui utilise massivement les calculs sur ordinateur, a provoqué beaucoup de controverses. L'interprétation que je donne de ces controverses est qu'elles ont peu à voir avec le fait que les gens doutent de la véracité du théorème ou même de l'exactitude de la preuve. Elles reflètent plutôt le désir permanent d'accéder à la *compréhension humaine* des démonstrations.

A un niveau plus quotidien, il est assez fréquent, chez ceux qui commencent à utiliser un ordinateur, de lui faire faire, à grande échelle, des calculs qu'ils auraient pu faire à la main, à petite échelle. Par exemple, lui faire imprimer la liste des 10.000 premiers nombres premiers pour découvrir qu'après tout, cette liste n'est pas ce qu'ils voulaient réellement. Par cette sorte d'expérience, ils découvrent que ce qu'ils veulent vraiment n'est généralement pas une collection de "réponses": ce qu'ils veulent, c'est *comprendre*.

Il peut paraître un peu circulaire de dire que ce que les mathématiciens accomplissent consiste à faire avancer la compréhension des mathématiques. Cependant je n'essayerai pas de trancher ce point en discutant sur ce que sont les mathématiques. (Il est plutôt difficile de donner une définition directe qui couvre l'esprit des mathématiques, quoique ce soit intéressant d'essayer d'y réfléchir. Pour moi, "la théorie des configurations formelles" est ce qui s'en approche le plus, mais en débattre demanderait un article entier.)

Se pourrait-il que la difficulté à donner une "bonne définition, directe, des mathématiques" soit une difficulté essentielle, qui indique que les mathématiques ont un caractère essentiellement récursif ? Dans cette ligne, on pourrait dire que les mathématiques sont le plus petit sujet d'études satisfaisant aux conditions suivantes :

- Les mathématiques incluent les nombres naturels et la géométrie (plane et dans l'espace)
- Les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient.
- Les mathématiciens sont ceux des humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

En d'autres termes, au fur et à mesure que les mathématiques avancent, nous les intégrons dans notre réflexion, et au fur et à mesure que notre réflexion devient plus sophistiquée, nous élaborons de nouveaux concepts et de nouvelles structures mathématiques : le contenu des mathématiques change pour refléter comment nous pensons.

Si ce que nous faisons consiste à construire de meilleures façons de penser, alors les dimensions psychologique et sociale sont essentielles dans un modèle correct du progrès mathématique. Ces dimensions sont absentes du modèle populaire qui, en caricaturant, est le suivant :

- les mathématiciens partent de quelques structures mathématiques fondamentales et d'une collection d'axiomes "donnés" portant sur ces structures ;
- il existe, sur ces structures, un certain nombre de questions importantes et variées, que l'on peut exprimer sous la forme de propositions mathématiques formelles ;
- la tâche des mathématiciens est de rechercher une suite de déductions allant des axiomes aux propositions, ou à leur négation.

Nous appellerons ceci le modèle "définition-théorème-preuve (DTP)" des mathématiques.

L'une des difficultés que rencontre ce modèle est qu'il n'explique pas l'origine des questions. Jaffé et Quinn traitent aussi de la spéculation (qu'ils désignent de façon inappropriée par "mathématiques théoriques") comme d'un ingrédient important supplémentaire. Spéculer (S) consiste à émettre des conjectures, à soulever des questions, à faire des suppositions intelligentes et à développer des arguments heuristiques sur ce qui est probablement vrai. Même ainsi, ce modèle DSTP de Jaffé et Quinn rate encore certains points fondamentaux : nous n'essayons pas de respecter quelques quota abstraits de production : tant de définitions, tant de théorèmes et tant de preuves. La mesure de notre succès est bien plutôt : est-ce que ce que nous faisons permet effectivement aux gens de comprendre les mathématiques, et d'y penser plus clairement et plus efficacement. Nous devons donc nous interroger :

2. Comment les gens comprennent-ils les mathématiques ?

C'est une question très difficile. La compréhension est un phénomène interne, personnel, qu'il est difficile d'appréhender totalement, et qui est difficile à comprendre et souvent difficile à communiquer. Nous ne pouvons ici que l'effleurer.

Les gens ont des façons très différentes de comprendre certaines parties des mathématiques. Pour illustrer ceci, il vaut mieux prendre un exemple que les mathématiciens professionnels comprennent de multiples façons, mais où nous voyons les étudiants rencontrer des difficultés. La notion de dérivée d'une fonction convient bien. On peut penser à la dérivée comme :

1. Infinitésimal : le rapport du changement infinitésimal de la valeur de la fonction au changement infinitésimal de la variable.

2. Symbolique : la dérivée de x^n est nx^{n-1}, la dérivée de $\sin(x)$ est $\cos(x)$, la dérivée de $f \circ g$ est $f' \circ g \cdot g'$, etc.

3. Logique : $f'(x) = d$ si et seulement si, pour chaque ε, il existe un δ tel que si

$$0 < |\Delta x| < \delta \text{ alors } \left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d \right| < \varepsilon$$

4. Géométrique : la dérivée est la pente de la tangente au graphe, si le graphe a une tangente en ce point.

5. Taux : La vitesse instantanée de $f(t)$, si t est le temps.

6. Approximation : la dérivée d'une fonction est la meilleure approximation linéaire de cette fonction près d'un point.

7. Microscopique : la dérivée d'une fonction est la limite de ce que vous voyez sous un microscope en grossissant de plus en plus.

Plutôt qu'une liste de différentes *définitions logiques*, ceci est une liste de différentes façons de *concevoir* la dérivée, de différentes façons de la *penser*. Sauf gros efforts pour maintenir le ton et la saveur initiales des premières compréhensions, les différences s'estompent dès que les concepts mentaux sont traduits en définitions précises, formelles et explicites.

Cette liste continue ; il n'y a pas de raisons pour qu'elle s'arrête jamais. Un exemple pris un peu plus loin dans la liste nous aidera à illustrer ce point. Nous pouvons penser, à un certain moment, que nous savons tout ce qu'il y a à dire sur un certain sujet, mais de nouvelles visions des choses (1) nous attendent au tournant. De plus, ce qui est une image mentale claire pour une personne peut être de l'intimidation pour une autre :

> 37. La dérivée d'une fonction f définie sur un domaine D, à valeurs réelles, est la section Lagrangienne du fibré cotangent $T^*(D)$ qui donne la forme de connexion pour l'unique connexion plate sur le $\mathbb{R}$-fibré trivial $D \times \mathbb{R}$ pour laquelle le graphe de f est parallèle.

Je me souviens d'avoir absorbé chacun de ces concepts comme quelque chose de nouveau et d'intéressant, et d'avoir dépensé beaucoup de temps et d'efforts intellectuels à digérer, assimiler et utiliser chacun d'eux, et à les réconcilier avec les autres. Je me souviens aussi d'être revenu sur ces différents concepts ultérieurement, avec une signification et une compréhension accrues.

Ces différences ne sont pas seulement une curiosité. La pensée humaine et la compréhension ne fonctionnent pas en

(1) *insights* : aperçus, visions avec l'idée de pénétration et de perspicacité.

suivant une seule voie, comme un ordinateur avec une unique unité centrale. Nos cerveaux et nos esprits semblent organisés en dispositifs fonctionnels (2) relativement séparés, aux aptitudes puissantes et variées. Ces dispositifs travaillent ensemble de façon assez lâche, "parlant" à chacun des autres à de hauts niveaux plutôt qu'à de bas niveaux d'organisation.

Quelques-uns d'entre eux ont leur importance dans le processus de réflexion mathématique :

1. *Le langage humain.*

Nous possédons des dispositifs spécialisés et puissants nous permettant de parler et de comprendre le langage humain, qui interviennent aussi dans la lecture et l'écriture. Notre aptitude linguistique est un outil important pour penser, et non simplement pour communiquer. Un exemple grossier est la formule du trinôme, dont les gens peuvent se souvenir comme d'une petite chanson : "ixe égale moinbé plus ou moins racine de bédeux moins quatre acé sur deux a". Le langage mathématique des symboles est étroitement lié à cette aptitude au langage. A titre d'exemple, le peu de langage symbolique mathématique dont dispose la plupart des étudiants en calcul différentiel et intégral ne contient qu'un seul verbe : "=". C'est pourquoi les étudiants l'utilisent dès qu'ils ont besoin d'un verbe. Presque tous ceux qui ont enseigné cette partie du programme aux Etats Unis ont vu des étudiants écrire instinctivement "$x^3 = 3x^2$" ou des choses semblables.

(2) *facilities* : équipements, dispositifs. Sera aussi traduit quelquefois par "aptitudes", ou "parties du cerveau".

2. *La vision, la perception spatiale, le sens kinesthésique* (perception du mouvement).

Les gens possèdent des dispositifs très efficaces pour acquérir une information de manière visuelle, ou kinesthésique, et penser en utilisant leur sens spatial. D'un autre côté, ils ne sont pas très bien équipés pour faire l'inverse, c'est à dire construire une image externe à deux dimensions à partir d'une compréhension spatiale interne. Par conséquent, il y a généralement moins d'images (et plus pauvres) dans les articles des mathématiciens que dans leurs têtes.

Un phénomène intéressant concernant la pensée spatiale est que l'échelle y joue un grand rôle. Nous pouvons penser sur de petits objets qui tiennent dans la main, ou sur des structures plus grandes que nous pouvons explorer à l'échelle humaine, ou encore sur des structures spatiales qui nous entourent et dans lesquelles nous pouvons nous déplacer. Nous tendons à réfléchir plus efficacement sur des images spatiales à grande échelle : c'est comme si notre cerveau prenait les grandes choses plus au sérieux et était capable de mobiliser sur elles plus de ressources.

3. *Logique et déduction.*

Nous disposons de plusieurs façons innées de raisonner et d'assembler les choses qui sont liées à la façon dont on fait des déductions logiques : cause et effet (reliés à l'implication logique), contradiction ou négation, etc.

Apparemment, et en général, les mathématiciens ne s'appuient pas sur les règles formelles de la déduction pendant qu'ils pensent. Ils gardent plutôt à l'esprit un bon morceau de la structure logique de la preuve, décomposant les preuves en résultats intermédiaires de façon à ne pas avoir à traiter trop de logique à la fois. En fait, on rencontre souvent d'excellents mathématiciens qui ne connaissent même pas l'usage standard et formel des quantificateurs ("quel que soit" et "il existe"), bien que tous les mathématiciens effectuent certainement les raisonnements que ces écritures formelles codent.

Au passage, il est intéressant d'observer que, bien que "ou", "et" et "implique" possèdent un usage formel identique, nous pensons à "ou" et "et" comme des conjonctions et "implique" comme un verbe.

4. *Intuition, association, métaphore.*

Les gens ont des aptitudes incroyables à prendre conscience de quelque chose sans savoir d'où cela vient (intuition) ; à sentir que tel phénomène, telle situation, ou tel objet ressemble à telle autre chose (association), ou enfin à construire et tester des connexions, des comparaisons, en gardant à l'esprit deux choses à la fois (métaphore). Ces capacites sont plutôt importantes pour les mathématiques. Personnellement, je consacre des efforts importants à "écouter" mes intuitions et associations, et à les assembler en métaphores et connexions. Cela implique simultanément une sorte de quiétude et de concentration de mon esprit. Les mots, la logique, les figures précises qui crépitent autour peuvent inhiber les intuitions et les associations.

5. *Stimulus-réponse.*

L'école insiste souvent sur ce point. Par exemple, si vous voyez 3927 × 253, vous écrivez un nombre sous l'autre, puis vous tirez un trait, etc. C'est également important dans la recherche mathematique : en voyant le diagramme d'un nœud, je peux écrire une présentation du groupe fondamental de son complémentaire par une procédure dont l'esprit est très semblable à la mise en œuvre de l'algorithme de la multiplication.

6. *Processus et temps.*

L'aptitude que nous avons à penser en termes de processus temporels ou de suite d'actions peut être très utile au raisonnement mathématique. Par exemple, on peut penser à une fonction comme à une action, un processus, qui envoie le domaine sur l'image, ce qui est particulièrement utile pour composer les fonctions. Une autre utilisation de cette aptitude concerne la mémorisation des preuves, qui sont souvent vues comme une suite chronologique d'étapes. En topologie, la notion d'homotopie est le plus souvent pensée comme un processus qui se déroule dans le temps. Mathématiquement, la dimension "temps" n'est pas différente d'une dimension spatiale de plus, mais puisque nous la percevons et la traitons autrement, c'est une dimension psychologiquement très différente.

3. Comment la compréhension mathématique se communique-t-elle ?

Le transfert de la compréhension d'une personne à une autre n'est pas automatique. C'est difficile et compliqué. Par conséquent, pour analyser la compréhension humaine des mathématiques, il est important de préciser **qui** comprend **quoi**, et **quand**.

Les mathématiciens ont développé des habitudes de communication qui sont souvent inefficaces. Partout les organisateurs de colloques demandent aux orateurs d'expliquer les choses en termes simples. Malgré cela, la plupart des auditeurs de ces colloques n'en tire que peu de profit. Peut-être sont-ils perdus dès les 5 premières minutes, puis restent assis silencieusement les 55 suivantes. Ou peut-être qu'ils perdent rapidement tout intérêt parce que l'orateur entre dans des détails techniques sans avoir pris la peine de donner les raisons qu'il a de les aborder. Et à la fin, les quelques mathématiciens proches du sujet posent une question ou deux pour éviter un silence pesant et embarrassant.

Ce type de comportement est similaire à ce qui se passe souvent dans les classes, où nous récitons ce que nous pensons que les étudiants "devraient" apprendre, pendant que les étudiants se débattent pour essayer de saisir des points bien plus fondamentaux : apprendre notre langage et nos modèles mentaux. Les livres compensent en montrant sur des exemples comment résoudre chaque type de problème à faire à la maison. Les professeurs compensent en donnant des problèmes ou des sujets d'examen beaucoup plus faciles que le contenu du cours, et ensuite notent sur une échelle qui ne demande que peu de réelle compréhension. Et nous supposons que le problème tient aux étudiants eux-mêmes plutôt qu'à la communication : soit que les étudiants n'ont pas les compétences, soit qu'ils s'en fichent.

Les profanes s'étonnent de ce phénomène, mais à l'intérieur de la communauté mathématique, nous évacuons le problème en haussant les épaules.

L'essentiel de la difficulté réside dans le langage et la culture mathématiques et dans le fait que les mathématiques sont divisées en nombreux secteurs. Les concepts de base, utilisés chaque jour à l'intérieur d'un secteur, sont souvent étrangers à un autre. Les mathématiciens renoncent à essayer de comprendre les concepts des domaines même voisins, à moins qu'ils n'y aient été initiés quand ils étaient étudiants...

Par contraste, la communication marche très bien au sein d'un secteur, où les gens développent un corpus commun de connaissances, de techniques. Ils apprennent à comprendre par des contacts informels ; ils copient les façons de penser les uns des autres et finalement les idées peuvent s'expliquer clairement et facilement.

La connaissance mathématique se transmet à une vitesse surprenante à l'intérieur d'un secteur. Quand un théorème important est démontré, il arrive souvent (mais pas toujours) qu'il puisse être communiqué en quelque minutes d'une personne à une autre. La même demonstration pourra être communiquée et généralement comprise au cours d'un séminaire d'une heure aux autres membres du secteur. Cela peut être aussi l'objet d'un article de 15 à 20 pages, qui sera lu et compris en quelques heures ou quelques jours par ces mêmes membres de la discipline.

Pourquoi y a-t-il une telle inflation entre la discussion informelle et le séminaire, entre le séminaire et l'article ? En tête à tête, les gens utilisent différents canaux de communication, qui vont bien au-delà du langage mathématique formel. Ils utilisent des gestes, ils font des dessins ou des diagrammes, ils ont des intonations et utilisent le langage corporel. De plus, la communication se fait dans les deux sens, et les gens peuvent se concentrer sur ce qui requiert le plus d'attention. Avec ces canaux de communication, ils sont dans une bien meilleure position pour transmettre ce qui se passe, pas seulement dans les parties du cerveau qui traitent des aptitudes logiques et linguistiques, mais aussi dans beaucoup d'autres.

Dans les séminaires, les gens sont plus inhibés et plus formels. Souvent, les auditeurs ne sont pas très bons pour poser les questions, même si elles sont dans la tête de la plupart des gens, et les orateurs ont souvent une image *a priori*, complètement irréaliste, qui les empêche de traiter les questions, même quand elles sont posées.

Dans les articles, c'est encore plus formel. Les auteurs traduisent leurs idées sous forme symbolique et logique, et les lecteurs essayent de traduire dans l'autre sens.

Pourquoi y a-t-il une telle discordance entre la communication à l'intérieur d'un secteur et la communication à l'extérieur de celui-ci, sans parler de la communication à l'extérieur des mathématiques ?

Dans un certain sens, les mathématiques possèdent un langage commun : un langage fait de symboles, des définitions techniques, de calculs et de logique. Ce langage peut transmettre efficacement certains modes de la pensée mathématique, mais pas tous. Les mathématiciens apprennent à traduire certaines choses presque inconsciemment d'un mode mental dans un autre, de façon que certaines affirmations ou assertions deviennent rapidement claires. Différents mathématiciens étudient les articles de différentes façons, mais quand je lis un article sur un sujet qui m'est familier, je me concentre sur les idées qui sont entre les lignes. Je peux sauter plusieurs paragraphes ou suites d'équations et penser en moi-même "ouais, ils ont mis suffisamment de schmilblick pour faire passer telle ou telle idée". Quand cette idée est claire, le contenu formel de l'ensemble est souvent inutile et redondant – j'ai souvent le sentiment que je pourrais le rédiger moi-même plus facilement que d'essayer de comprendre ce que les auteurs ont réellement écrit. C'est un peu comme un nouveau grille-pain accompagné d'une brochure de 16 pages. Si vous avez déjà compris comment fonctionne un grille-pain, et si ce grille-pain ressemble à certains que vous avez déjà vus, vous allez vous contenter de le brancher et de vérifier s'il fonctionne, plutôt que commencer par lire la brochure.

Les gens qui sont familiers avec les façons de faire les choses à l'intérieur d'un secteur reconnaissent les différentes combinaisons de propositions, d'assertions ou de formules comme autant d'idiomes ou de circonlocutions correspondant à certains concepts ou certaines images mentales. Par contre, ceux qui ne sont pas familiers avec ce qui correspond à ces mêmes combinaisons ne sont pas très éclairés ; ils sont même souvent déroutés. Le langage n'est pas vivant, sauf pour ceux qui l'utilisent.

J'aimerais faire ici une remarque importante : il existe des mathématiciens qui sont à l'aise avec les façons de penser de plus d'un secteur, quelquefois d'un assez grand nombre. Quelques mathématiciens ont appris le jargon de plusieurs secteurs, quand ils étaient étudiants, d'autres sont prompts à saisir un langage et une culture mathématiques qui leur sont étrangers, d'autres encore sont dans des centres mathématiques où ils côtoient plusieurs disciplines. Ceux qui sont à l'aise avec plus d'un secteur peuvent souvent avoir une influence très positive, en servant de passerelles, en aidant différents groupes de mathématiciens à apprendre à se comprendre les uns les autres. Mais les gens qui ont des connaissances dans un grand nombre de secteurs peuvent aussi avoir une influence négative, en intimidant les autres, et en aidant à valider et à maintenir en l'état l'ensemble du système de cette communication généralement mauvaise, en servant d'audience pour les orateurs dans les colloques.

Il y a un autre effet causé par les grosses différences entre la façon dont nous pensons en mathématiques et la façon dont nous le transcrivons. Un groupe de mathématiciens, où chacun interagit avec les autres, entretient, et peut garder active pendant plusieurs années, toute une collection d'idées, même si la version écrite de leurs travaux, où l'accent est mis sur le langage, les symboles, la logique et le formalisme, diffère de ce qu'ils pensent réellement. Mais au fur et à mesure que les nouvelles fournées de mathématiciens apprennent sur le sujet, elles tendent peu à peu à interpréter ce qu'elles lisent ou entendent plus littéralement, si bien que le formalisme et la machinerie, qui sont plus facilement communicables et assimilables, tendent graduellement à prendre le pas sur les autres modes de pensée.

Deux faits s'opposent à cette tendance, et permettent aux mathématiques de ne pas s'engluer totalement dans le formalisme. Premièrement, les jeunes générations de mathématiciens découvrent ou redécouvrent continuellement de nouvelles voies qui leurs sont propres, et réinjectent ainsi divers modes de pensée dans les mathématiques. Deuxièmement, les mathématiciens inventent quelquefois de nouveaux noms et mettent la main sur de nouvelles définitions, unificatrices, qui remplacent les circonlocutions techniques et donnent des points d'appui pour de nouvelles visions. Des mots comme "groupe" pour remplacer "un système de substitutions satisfaisant...", ou "variété" pour :

> Nous ne pouvons donner des coordonnées qui paramétrisent toutes les solutions de nos équations simultanément, mais au voisinage d'une solution particulière, nous pouvons introduire les coordonnées
> $(f_1(u_1,u_2,u_3), f_2(u_1,u_2,u_3), f_3(u_1,u_2,u_3), f_4(u_1,u_2,u_3), f_5(u_1,u_2,u_3))$
> où au moins l'un des dix déterminants...[dix déterminants 3×3 des matrices des dérivées partielles]... est non nul.

peuvent ne pas avoir représenté un progrès décisif dans la vision des choses pour les experts, mais ils ont grandement facilité la *communication* des visions ultérieures.

Nous autres mathématiciens devons faire des efforts beaucoup plus importants pour communiquer des *idées* mathématiques. Pour cela, nous devons accorder davantage d'attention à communiquer nos schémas mentaux, nos façons de penser, et pas seulement nos définitions, théorèmes et démonstrations. Nous avons besoin d'apprécier la valeur de la diversité des façons de penser sur la même structure mathématique.

Nous devons focaliser beaucoup plus d'énergie sur la description, l'explication et la compréhension du cadre intellectuel, des infrastructures, dans lesquels nous pensons les mathématiques - avec par conséquent moins d'énergie pour les résultats récents. Ceci nécessite de développer un langage mathématique qui soit réellement efficace pour transmettre des idées à ceux qui ne les connaissent pas déjà.

Une partie de cette communication se fait à travers les preuves.

4. Qu'est-ce qu'une preuve ?

Quand j'étais thesard à Berkeley, j'avais du mal à imaginer comment je pourrais "prouver" un théorème nouveau et intéressant. Je n'avais pas réellement compris ce qu'était une "preuve".

En allant dans des séminaires, en lisant des articles et en parlant à d'autres étudiants, j'ai progressivement commencé à comprendre. A l'intérieur d'un secteur, il existe certains theorèmes et certaines techniques qui sont généralement connus et acceptés. Quand vous écrivez un article, vous vous y référez sans preuves. Vous regardez d'autres articles sur le sujet, et vous voyez quels sont les faits qui sont cités sans preuves et quels sont ceux qui renvoient à la bibliographie. Vous apprenez par d'autres quelque idée des preuves et ensuite, vous êtes libre de citer le même théorème et de renvoyer aux mêmes citations. Vous n'avez pas besoin de lire les articles en entier, ou les livres que vous citez dans la bibliographie. De plus, beaucoup de choses connues sont des choses pour lesquelles il n'existe pas de source écrite connue. Aussi longtemps que les membres du secteur sont persuadés que l'idée marche, il n'est pas nécessaire d'avoir une source formelle publiée.

Au début, j'étais extrêmement méfiant à l'égard de ces procédures. J'avais des doutes sur le fait que telle idée était vraiment établie. Mais j'ai constaté que je pouvais interroger les gens, et qu'ils pouvaient fournir des explications et des preuves, ou m'adresser à d'autres personnes, ou a des articles, qui pourraient me donner ces explications et ces preuves. Il y avait des théorèmes publiés qui étaient connus comme faux, ou dont la preuve était connue pour être incomplète. La connaissance mathématique et la compréhension d'un sujet étaient immergées dans les cerveaux et le tissu social de la communauté qui réflechissait sur ce sujet. Cette connaissance était étayée par des documents écrits, mais ceux-ci n'étaient pas vraiment primordiaux.

Je pense que ce schéma varie quelque peu d'un sujet à l'autre. J'étais intéressé par des parties geometriques des mathématiques, où il est souvent assez difficile de disposer de documents qui reflètent bien la façon dont les gens pensent effectivement. Dans des domaines plus symboliques ou algébriques, ce n'est pas forcément pareil, et j'ai l'impression que dans certains domaines, les publications sont plus proches de la vie du sujet. Mais dans chaque domaine, il y a un critère social fort de validité et de preuve. La démonstration du Dernier Théorème de Fermat par Andrew Wiles en est une bonne illustration, dans un domaine très algébrique : les experts en sont venus très rapidement à croire que la preuve était fondamentalement correcte, sur la base d'idées très profondes, d'un haut niveau, bien avant que les details puissent être entièrement vérifiés.

Quand les gens font des mathématiques, le courant des idées et les critères sociaux de validité sont bien plus fiables que les documents formels. D'ordinaire, les gens ne sont pas très bons pour vérifier l'*exactitude formelle* des preuves, mais ils sont très bons pour y déceler des faiblesses potentielles ou des failles.

Pendant certaines périodes de ma carrière, j'ai dépensé de gros efforts à explorer des problèmes mathématiques à l'aide d'ordinateurs. A la suite de cette expérience, je suis plutôt étonné de lire sous la plume de Jaffé et Quinn que les mathématiques sont extrêmement lentes et ardues, et que c'est probablement la plus disciplinée de toutes les activités humaines. Les critères de correction et de complétude à appliquer pour qu'un programme informatique marche sont de deux ordres de grandeurs au-dessus des standards de la communauté mathématique en matière de validité des démonstrations. Malgré tout, les grands programmes, même quand ils ont été écrits, vérifiés et testés soigneusement, semblent toujours comporter des bogues.

Quand on considère combien il est difficile d'écrire un programme, approchant seulement la portée intellectuelle d'un bon article mathématique, et combien plus de temps et d'efforts sont nécessaires pour le rendre "presque" formellement correct, il est ridicule d'affirmer que les mathématiques telles que nous les pratiquons sont, de quelque façon que ce soit, proches de la correction formelle.

La différence ne réside pas seulement dans la quantité d'efforts fournie ; la nature des efforts est qualitativement différente. Dans les grands programmes informatiques, une énorme quantité d'efforts intellectuels doit être dépensée à vérifier des milliers de compatibilités : être sûr que toutes les définitions sont cohérentes, mettre au point les "bonnes" structures de données, qui doivent être utiles sans être d'une généralité trop lourde, décider de la "bonne" généricité des fonctions, etc. La proportion d'énergie dépensée sur la partie "efficace" d'un grand programme, à distinguer de la partie "gestion", est étonnamment faible. A cause de ces conditions de compatibilité, qui vous échappent presque inévitablement parce que les "bonnes" définitions évoluent au fur et à mesure que la généralité et la fonctionnalité du programme évoluent, il est fréquent que ces programmes doivent être réécrits totalement, à partir de zéro.

Un type d'efforts très similaire serait nécessaire pour rendre les mathématiques formellement correctes et complètes. Ce n'est pas que la correction formelle soit prohibitivement difficile à atteindre sur une petite échelle, c'est plutôt qu'il y a plusieurs choix de formalisation possibles à petite échelle, qui se transforment en un nombre colossal de choix interdépendants quand on considère l'ensemble. Il est plutôt difficile de rendre tous ces choix compatibles ; pour le faire, il faudrait certainement revenir en arrière et réécrire, à partir de rien, tous les anciens articles dont nos résultats actuels dépendent. Il est également très difficile de faire les bons choix techniques pour les définitions formelles, c'est à dire des choix qui puissent être encore valides malgré la multiplicité des façons dont les mathématiciens pourraient les utiliser, et qui anticipent ainsi les développements futurs des mathématiques. Et si nous voulions continuer à coopérer, il nous faudrait passer presque tout notre temps dans des commissions internationales chargées d'établir des définitions uniformes et de résoudre d'énormes controverses.

Les mathématiciens sont capables de corriger les erreurs, de combler les trous, et ils le font. Ils fournissent des informations plus détaillées et plus précises quand on le leur demande ou qu'ils en éprouvent le besoin. Notre système est plutôt efficace pour produire de théorèmes sûrs et qui peuvent être solidement étayés. Simplement, la confiance ne vient pas de mathématiciens qui vérifient formellement les arguments formels, elle vient de mathématiciens qui étudient soigneusement et de façon critique les idées mathématiques.

A un niveau plus fondamental, les fondations des mathématiques sont plus fragiles que les mathématiques que nous faisons. La plupart des mathématiciens adhère à des fondements qui sont reconnus pour être des fictions polies. Par exemple, il y a un théorème affirmant qu'il ne peut exister aucune méthode pour construire ou définir un bon ordre sur les nombres réels. C'est une évidence (mais sans preuve) que nous pouvons nous débarrasser de ces fictions sans nous faire attraper, mais cela ne les justifie pas. Les théoriciens des ensembles ont construit de nombreux "univers mathématiques", mutuellement contradictoires, et tels que, si l'un d'eux est consistant, les autres aussi. Cela laisse très peu de confiance dans le fait que l'un ou l'autre est le bon choix, ou le choix naturel. Le théorème d'incomplétude de Gödel implique qu'il ne peut exister de système formel consistant et suffisamment puissant pour servir de base à l'ensemble des mathématiques que nous pratiquons.

Contrairement aux humains, les ordinateurs sont bons pour effectuer des calculs formels, et dans quelques années nous aurons probablement des systèmes interactifs qui pourront aider les gens, à partir d'hypothèses peut-être fragiles, mais explicites, à compiler des morceaux significatifs, voire des pans entiers de mathématiques formellement complets, et corrects. Pour l'instant, c'est hors d'atteinte et presque hors de propos : nous avons de bonnes méthodes, humaines, pour vérifier la validité mathématique.

L'article de Jaffé et Quinn mettait en garde contre certaines situations (les spéculations déguisées en preuves) qui découragent les progrès en mathématiques, et pourraient leur porter préjudice dans l'avenir.

Pour aborder ce qui décourage le progrès mathématique et ce qui l'encourage, nous devons poser la question :

5. Qu'est-ce qui motive les gens à faire des mathématiques ?

Il y a une joie réelle à faire des mathématiques, à apprendre de nouvelles méthodes de pensée qui expliquent, organisent et simplifient. On peut ressentir cette joie en découvrant de nouvelles mathématiques, en redécouvrant les anciennes, en apprenant de nouvelles façons de penser grâce à quelqu'un, ou grâce à un texte, ou en trouvant une nouvelle façon d'expliquer ou de percevoir une structure mathématique ancienne.

Cette motivation interne pourrait conduire à penser que nous faisons des mathématiques seulement pour elles-mêmes. Ce n'est pas vrai : l'environnement social est extrêmement important. Nous sommes inspirés par les autres, nous recherchons leur appréciation, et nous aimons aider les autres à résoudre leurs problèmes mathématiques. Ce qui nous fait plaisir change avec la réaction des autres. L'interaction sociale se présente à travers les tête à tête, mais aussi à travers le courrier et le courrier électronique, les préprints, et les publications dans les revues. Un effet du caractère hautement social de la communauté mathématique est la tendance des mathématiciens à suivre des modes. S'il s'agit de produire de nouveaux théorèmes, ce n'est probablement pas très efficace : il semblerait préférable d'avoir des mathématiciens couvrant uniformément l'ensemble de la discipline. Mais la plupart des mathématiciens n'aiment pas être seuls, et ils ont des difficultés à rester motivés par un sujet, même s'ils y font personnellement des progrès, s'ils n'ont pas des collègues qui partagent leur excitation.

Outre notre motivation interne et cette motivation sociale pour faire des mathématiques, nous sommes menés par des considérations économiques et de statut. Les mathématiciens, comme les autres universitaires, sont jugés et émettent un certain nombre de jugements. Cela commence avec les diplômes, et continue avec les lettres de recommandations, les décisions de recrutement et de promotion, les rapports de *referees*, les invitations à parler, les prix... nous sommes impliqués dans beaucoup d'évaluations, dans un système férocement compétitif.

Jaffé et Quinn analysent la motivation à faire des mathématiques en termes d'une monnaie commune à laquelle de nombreux mathématiciens croient : être "crédités" pour des théorèmes (3).

Je pense que l'accent que nous mettons tous fortement sur les mérites attachés aux théorèmes a un effet négatif sur le progrès mathématique. Si ce que nous faisons consiste à faire progresser la compréhension des mathématiques, il vaudrait mieux reconnaître et attribuer de la valeur à une activité beaucoup plus étendue. Ceux qui voient la façon de démontrer un théorème le font dans le contexte de la communauté mathématique, ils ne le font pas tous seuls. Ils dépendent de la compréhension mathématique qu'ils ont glanée ici ou là auprès d'autres mathématiciens. Une fois que le théorème est prouvé, la communauté mathématique dépend du réseau social qui va répandre ces idées vers ceux qui les utiliseront plus tard – le support écrit est bien trop obscur et trop lourd.

Même si l'on choisit la vision étroite que ce que nous produisons c'est des théorèmes, l'équipe est importante. Le football peut servir ici de métaphore. Il peut n'y avoir qu'un but ou deux marqués durant une partie, tirés par un ou deux joueurs, cela ne signifie pas que les efforts des autres ont été gaspillés en vain. Nous ne jugeons pas les joueurs de football en regardant s'ils ont personnellement marqué un but, nous jugeons l'équipe par son fonctionnement en tant qu'équipe.

En mathématiques, il arrive souvent qu'un groupe de mathématiciens avance avec un certain nombre d'idées. Il y a des théorèmes, tout au long de ces progrès, qui seront inévitablement démontrés par une personne ou une autre. Quelquefois, ce groupe de mathématiciens peut même anticiper quels sont les théorèmes que l'on peut espérer. Il est beaucoup plus difficile de prédire qui va les démontrer, quoique il y ait la plupart du temps quelques personnes "en pointe" qui soient susceptibles de marquer le but. Cependant, elles ne sont en position de le faire que grâce aux efforts collectifs de l'équipe. L'équipe a une fonction supplémentaire, en assimilant les

(3) *credit for theorems* : crédit, mérite, reconnaissance

théorèmes et en les utilisant une fois qu'ils sont démontrés. Même si une personne isolée pouvait prouver tous les théorèmes dans un certain domaine, ce serait du gaspillage si personne ne pouvait les apprendre.

Il y a un phénomène intéressant au sujet des personnes "en pointe". Il arrive régulièrement que des gens qui sont au milieu du pack prouvent des théorèmes reconnus comme importants. Leur statut dans la communauté – leur position hiérarchique – augmente immédiatement et significativement. Quand cela arrive, ils deviennent beaucoup plus efficaces, comme centre d'idées et comme source de théorèmes. Pourquoi ? D'abord leur confiance en eux augmente, avec augmentation de productivité. Ensuite, quand leur statut augmente, ils deviennent le pivot de tout un réseau d'idées et les autres les prennent plus au sérieux. Finalement, et c'est peut-être plus important, une percée mathématique correspond le plus souvent à une nouvelle façon d'envisager, de penser les choses, et qu'une nouvelle façon de penser s'applique généralement dans plus d'une situation.

Ce phénomène me convainc que la communauté mathématique entière deviendrait plus productive si nous ouvrions les yeux sur la valeur réelle de ce que nous faisons. Jaffé et Quinn proposent un système où les rôles seraient clairement séparés en "spéculer" et "prouver". Une telle division perpétue seulement le mythe que ce que nous produisons consiste à démontrer des théorèmes. C'est un peu comme l'erreur de la personne qui imprime les 10.000 premiers nombres premiers. Ce que nous produisons, c'est de la compréhension. Nous serions bien plus satisfaits, plus productifs et plus heureux si nous le reconnaissions et mettions l'accent là-dessus.

6. Quelques expériences personnelles

Puisque cet essai a pour origine le décalage entre mon expérience personnelle et la description qu'en donnent Jaffé et Quinn, et aussi parce que j'ai le sentiment qu'il est justifié de défendre un peu ma carrière, j'aborderai maintenant deux expériences personnelles. C'est un peu embarrassant pour moi car je regrette beaucoup d'aspects de cette carrière. Si je devais la recommencer, en utilisant la compréhension et la connaissance que j'ai aujourd'hui, tant de moi-même que du fonctionnement des mathématiques, il y a beaucoup de choses que j'aimerais conduire différemment.

Malgré cela, le passage où Jaffé et Quinn évoquent mon cas est loin du compte. Le paragraphe concerné, dans le chapitre "Histoires de prudence", commence par :

> La plupart des expériences concernant les mathématiques théoriques ont été moins positives que celles citées ci-dessus. Cela a été particulièrement vrai quand des résultats spéculatifs ou incorrects ont été présentés comme connus et dignes de confiance et revendiqués par leur auteur. Quelquefois c'est une "erreur honnête", mais quelquefois, c'est le résultat de conceptions non-standard de ce qui constitue une preuve.

Les auteurs continuent en citant plusieurs exemples, notamment celui-ci, qui évoque une partie de mes travaux :

> Le "théorème de géométrisation" de William Thurston concernant la structure des variétés de Haken à 3 dimensions est un autre exemple souvent cité.

> Une grande perspective fournie avec des indications très belles mais insuffisantes, la preuve complète n'ayant jamais été publiée. Pour de nombreux chercheurs, cette proclamation injustifiée est devenue un barrage plutôt qu'une inspiration.

et ils continuent :

> Dans ces exemples, comme avec Poincaré, les visions proposées semblent avoir mis dans le mille. Il existe certainement des cas dans lesquels les visions théoriques sont également défectueuses. Le fait est que même dans les meilleurs cas, il y a eu des effets de bords assez déplaisants qui auraient pu être évités.

Pour répondre, je veux revenir sur une phase antérieure de ma carrière. Mon premier sujet, commencé quand j'étais thésard, était la théorie des feuilletages. (Peu importe si vous ignorez ce que c'est). A l'époque, les feuilletages étaient devenus un centre d'attention important pour les gens qui travaillaient sur la topologie géométrique, les systèmes dynamiques et la géométrie différentielle. J'ai rapidement prouvé quelques théorèmes spectaculaires. J'ai prouvé un théorème de classification pour les feuilletages, avec une condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété admette un feuilletage (et montrant qu'ils existent pour un grand nombre de variétés, en particulier qu'une variété admet un feuilletage lisse de codimension 1 ssi sa caractéristique d'Euler est nulle). J'ai prouvé aussi nombre de théorèmes significatifs. J'ai écrit de respectables articles et publié au moins les théorèmes les plus importants. C'était difficile de trouver le temps d'écrire afin de conserver ce que j'étais capable de prouver, et j'ai accumulé le retard.

Il se passa alors un phénomène intéressant. En environ deux ans, le sujet perdit peu à peu tout intérêt, et fut littéralement étouffé. J'entendais des rumeurs disant que des mathématiciens donnaient ou recevaient le conseil de ne pas travailler sur les feuilletages, avec l'argument que Thurston était en train de faire place nette. Les gens me disaient (pas en se plaignant, mais comme un compliment) que je tuais le sujet. Les thésards s'arrêtèrent d'étudier les feuilletages et, assez vite, je me tournai moi-même vers d'autres centres d'intérêt.

Je ne pense pas que cet "étouffement" ait été dû au fait que le territoire avait été entièrement exploré – il y restait (et il y reste encore) de nombreuses questions non résolues et peut-être accessibles. Depuis, il y a d'ailleurs eu des développements intéressants, apportés par les quelques personnes qui ont continué à travailler sur le sujet, ou qui y sont venues, ainsi que d'autres développements importants sur des sujets voisins dont je pense qu'ils auraient été accélérés si les mathématiciens avaient continué vigoureusement l'étude des feuilletages.

Je pense plutôt que deux faits ont causé cet "étouffement". Premièrement, les résultats que j'ai prouvés (ainsi que d'autres tout aussi importants dûs à d'autres) furent documentés dans un style mathématique conventionnel, écrasant de virtuosité. Ils reposaient fortement sur l'existence, chez les lecteurs, d'un bagage commun et d'un certain nombre de conceptions. La théorie des feuilletages était jeune et opportuniste, et le contexte n'était pas normalisé. Je n'avais pas hésité à tirer profit de toutes les mathématiques que j'avais apprises des autres, et je n'ai pas, dans mes articles, passé plus de temps à expliquer tous les prérequis (le pouvais-je ?). Ces articles ne donnaient donc que le raisonnement et les conclusions au niveau le plus profond (ou le plus élevé), celui que j'avais atteint après beaucoup de réflexions et d'efforts. J'avais aussi lancé ça et là certaines indications très cryptiques telles que "l'invariant de Godbillon-Vey mesure l'oscillation hélicoïdale d'un feuilletage", qui restèrent très mystérieux pour la plupart des mathématiciens qui les lisaient. Je pense que de nombreux étudiants ou mathématiciens ont été découragés de ne pas être capables de comprendre.

Deuxièmement, un certain nombre de personnes pensèrent qu'il n'y aurait pas assez de "crédits de théorèmes" pour s'y consacrer. Quand j'ai commencé à travailler sur les feuilletages, j'avais l'idée que ce que les gens voulaient, c'était des théorèmes. Mais ce n'est qu'un aspect de la situation : les gens veulent *comprendre personnellement*, et pas seulement les définitions, l'énoncé des théorèmes et les preuves ; dans notre système actuel, fondé sur le "crédit", il leur faut aussi retirer des mérites des théorèmes qu'ils démontrent.

Je saute quelques années et j'arrive au moment où j'ai commencé à étudier les variétés de dimension 3 et leurs relations avec la géométrie hyperbolique. J'ai progressivement élaboré, au cours des années, en fait dès le début de mes études sur les feuilletages, une certaine intuition de ce qu'étaient les 3-variétés hyperboliques, avec des catalogues de constructions, d'exemples et de preuves. Au bout d'un certain temps, j'ai conjecturé, ou spéculé, que toutes les 3-variétés admettaient une certaine décomposition en pièces géométriques (la conjecture de géométrisation). Environ deux à trois ans plus tard, j'ai démontré le théorème de géométrisation pour les variétés de Haken. C'était un théorème difficile, et j'ai dépensé une énorme quantité d'efforts à y réfléchir. Quand j'ai eu terminé la preuve, j'ai consacré encore plus d'efforts à vérifier cette preuve, à chercher les points délicats et à les confronter à des informations indépendantes.

J'aimerais préciser mieux ce que je veux dire quand j'affirme : "j'ai prouvé ce théorème". Cela signifie que j'avais un flux d'idées, claires et complètes, y compris dans les détails, qui résistait aux examens minutieux, tant par moi que par d'autres. Les mathématiciens ont des styles de pensée différents. Mon style ne consiste pas à faire un large balayage sans réflexion de généralités qui sont simplement des inspirations ou des indications : je construis des modèles mentaux clairs, et je pense les choses à fond. Mes preuves se sont montrées fiables, et je n'ai pas eu de difficultés à étayer mes affirmations ou à produire des précisions sur les points que j'avais prouvés. Je suis aussi bon pour détecter des défauts dans mes propres raisonnements que dans ceux des autres.

Cependant, il y a quelquefois un facteur d'expansion énorme pour traduire les idées qui sont codées dans mes propres pensées en quelque chose qui puisse être transmis à quelqu'un d'autre. Mon éducation mathématique fut plutôt indépendante et idiosyncrasique et pendant nombre d'années, j'ai appris les choses par moi-même, élaborant et développant mes propres modèles mentaux pour savoir comment penser, réfléchir sur les mathématiques. Cela a souvent été un avantage pour moi de disposer de ces modèles parce que c'est plus facile, après, de comprendre les modèles standards partagés par des groupes de mathématiciens. J'ai continué depuis à développer des modèles personnels. Cela signifie que certains concepts que j'utilise librement et naturellement dans mes propres réflexions sont étrangers à la plupart des mathématiciens avec qui je parle. Mes structures et modèles mentaux personnels sont de même nature que ceux qui sont partagés par des tas de mathématiciens, mais ce sont des modèles différents. Au moment de la formulation de la conjecture de géométrisation, ma compréhension de la géométrie hyperbolique était un bon exemple. Un autre exemple encore valable est la compréhension des espaces topologiques finis.

Ni la conjecture de géométrisation, ni sa preuve pour les variétés de Haken n'était dans le fil des travaux d'aucun groupe de mathématiciens de l'époque. Elles arrivaient à contre-courant de la topologie des trente années précédentes, et elles prirent tout le monde par surprise. Pour la plupart des topologues de l'époque, la géométrie hyperbolique était une branche latérale un peu mystérieuse des mathématiques. Il y avait naturellement d'autres groupes de mathématiciens qui la comprenaient d'un certain point de vue, par exemple en géométrie différentielle, mais cela prit un certain temps pour que les topologues comprennent ce que signifiait vraiment la conjecture, à quoi elle pourrait servir et pourquoi elle était pertinente.

Au même moment, je commençais à écrire des notes sur la géométrie et la topologie des variétés à trois dimensions, en liaison avec le cours que j'enseignais. Je les distribuais à quelques personnes et peu de temps après, de nombreuses autres, dans le monde, m'écrivirent pour obtenir des copies. La liste grossit jusqu'à 1200 personnes à qui j'envoyais des notes tous les deux mois. Dans ces notes, j'essayais de communiquer mes pensées réelles. Les gens organisèrent des séminaires et je reçus quantité de réactions. L'écrasante majorité des réactions étaient du type : "Vos notes sont vraiment stimulantes et belles, mais je dois vous dire que nous avons passé 3 semaines dans notre séminaire à travailler sur les détails du §n.n. Quelques explications supplémentaires seraient sûrement utiles."

J'ai fait aussi de nombreux exposés de présentation à des mathématiciens sur les idées qui conduisent à étudier les 3-variétés du point de vue de la géométrie, ainsi que sur la preuve de la conjecture dans le cas des variétés de Haken. Au début, le sujet était étranger à presque tout le monde. C'était vraiment très difficile de communiquer ; l'infrastructure était dans ma tête, mais pas dans la communauté mathématique. Beaucoup de théories mathématiques intervenaient dans ces idées : topologie des 3-variétés, groupes kleiniens, systèmes dynamiques, topologie géométrique, sous-groupes discrets des groupes de Lie, feuilletages, espaces de Teichmüller, difféomorphismes pseudo-Anosov... sans compter la géométrie hyperbolique.

Nous mîmes sur pied une école d'été de l'AMS à Bowdoin en 1982, où vinrent de nombreux mathématiciens issus de la topologie en basses dimensions, ou des systèmes dynamiques, ou des groupes kleiniens. Ce fut une intéressante expérience d'échanges de cultures.

Il m'apparut de façon criante combien le contenu des preuves dépendait des auditeurs. Nous prouvons les choses dans un contexte social et les destinons à une certaine audience. Je pouvais communiquer certaines parties des démonstrations en deux minutes aux topologues, alors qu'il fallait une heure de cours avant que les analystes commencent à comprendre. De la même façon, il y avait des choses qui passaient en deux minutes avec les analystes et qui prenaient une heure avant que les topologues commencent à saisir. Enfin, il y avait de nombreux autres points qui auraient dû prendre théoriquement deux minutes, mais pour lesquelles personne à l'époque n'avait l'infrastructure intellectuelle pour les comprendre en moins d'une heure.

A cette époque, il n'y avait pratiquement aucune infrastructure mentale et aucun contexte pour ce théorème, aussi le taux d'inflation entre les idées qui étaient ancrées dans ma tête et ce qu'il fallait dire pour les faire passer, prit une ampleur spectaculaire, sans parler de l'énergie dépensée par les participants pour comprendre.

En raison de mon expérience avec les feuilletages, et en réponse aux pressions sociales, j'ai concentré l'essentiel de mon attention à présenter et à développer l'infrastructure et les modèles qui sous-tendaient ce que je disais ou écrivais. J'expliquai les détails aux quelques personnes qui étaient prêtes pour les entendre. J'écrivis quelques papiers donnant des parties significatives de la preuve dans le cas des variétés de Haken (pour ces papiers, je n'ai eu presque aucun retour). De même, peu de personnes travaillèrent sur les parties les plus difficiles et les plus profondes de mes notes, jusqu'à bien plus tard.

Le résultat est qu'aujourd'hui, un assez grand nombre de mathématiciens possèdent ce qui manquait dramatiquement au début : une compréhension opérationnelle des concepts et de l'infrastructure dans lesquelles le sujet s'inscrivait naturellement. Il y eut, et il continue à y avoir, une masse d'activité mathématique florissante dans ce domaine. En me concentrant sur la construction de ce cadre, sur la publication des définitions, sur l'explication des façons de penser le sujet, tout en étant assez lent à énoncer et à publier les preuves de tous les "théorèmes" que je savais démontrer, j'ai laissé la place à beaucoup d'autres pour en tirer les bénéfices. Il y avait de la place pour découvrir et publier d'autres preuves du théorème de géométrisation. Ces preuves ont contribué à élaborer des concepts mathématiques très intéressants en eux-mêmes, et qui ont conduit à des développements ultérieurs.

En fait, ce dont les mathématiciens avaient besoin, et qu'ils me demandaient, c'était d'apprendre mes façons de penser, et non comment je démontrais la conjecture dans le cas des variétés de Haken. Il est peu probable que la preuve de la conjecture générale consistera à prolonger la première preuve plus loin : si cela était le cas, j'aurais probablement été l'un des mieux placés pour le faire.

Outre le fait qu'ils veulent l'apprendre, il y a une autre raison pour laquelle les gens ont besoin, ou demandent, un résultat accepté et validé : c'est aussi parce qu'ils veulent pouvoir s'appuyer dessus, s'y référer et le citer. De fait, les mathématiciens ont accepté très rapidement ma démonstration, et commencé à la citer et à l'utiliser sur la base de la documentation existante, de leur propre expérience, de leur confiance en moi, mais aussi sur la base de l'opinion des experts à qui j'ai consacré beaucoup de temps à communiquer ma preuve. Le théorème est maintenant documenté, à travers des sources publiées, qui sont dues à moi et à quelques autres, aussi la plupart des gens se sentent à l'aise en le citant. Les gens qui s'occupent du sujet n'en ont pas contesté la validité, pas plus qu'ils ne m'ont demandé des détails qui se seraient révélés indisponibles.

Toutes les preuves ne jouent pas le même rôle dans l'échafaudage logique que nous élaborons pour les mathématiques. Cette preuve particulière a probablement une valeur logique temporaire, quoique elle ait une grande valeur motivante en servant de support à une certaine conception de la structure des 3-variétés. La conjecture complète reste une conjecture. Elle a été prouvée dans beaucoup de cas, et est étayée par une grande quantité de calculs sur ordinateur, mais n'a pas été prouvée en toute généralité. Je suis convaincu qu'une preuve générale sera trouvée, j'espère avant pas trop longtemps. Alors, les preuves partielles deviendront probablement obsolètes.

En attendant, ceux qui veulent utiliser la technologie géométrique feraient mieux de commencer avec l'hypothèse : "soit M^3 une variété admettant une décomposition géométrique", qui est plus générale que : "soit M^3 une variété de Haken". Ceux qui ne veulent pas utiliser cet outil, ou qui ont des doutes, peuvent toujours y renoncer. Même quand un théorème sur les variétés de Haken peut être démontré en utilisant des techniques géométriques, il reste très intéressant de trouver des techniques purement topologiques pour le faire.

Je ne connais pas les "nombreux chercheurs" dont Jaffé et Quinn affirment qu'ils ont rencontré un "barrage", parce qu'aucun ne m'en a parlé. Le principal aspect négatif auquel je peux penser est que l'exploration des variétés de Haken par des méthodes classiques a cessé d'être sous les projecteurs, mais cela aurait été encore pire si j'avais publié plus rapidement et plus complètement. Il y eut aussi un autre effet négatif : pendant que je me concentrais sur le cadre et le contexte et délaissais ainsi la recherche de pointe, je devins moins engagé dans un sujet qui continuait à évoluer, et n'ai pas contribué activement ou effectivement aux carrières des excellents chercheurs qui travaillaient sur le sujet. Cependant, les deux pires dénouements possibles ont été évités : cela aurait pu, soit m'empêcher de dire que j'avais découvert ce que j'avais découvert, et prouvé ce que j'avais prouvé, en gardant ça pour moi dans l'espoir, peut-être, de démontrer la conjecture de Poincaré ; soit me conduire à présenter une théorie inattaquable et difficile à apprendre, sans utilisateurs pour la faire vivre et la faire progresser.

Durant ma carrière, je n'ai pas publié autant que j'aurais dû. Je n'en comprends pas les raisons profondes. Il ne s'agit pas d'un choix délibéré, ni d'une inaptitude à écrire, ou d'un manque de plaisir à le faire. J'ai malgré tout été actif et productif, et ce dans des activités très diverses. Notre système ne crée pas de temps supplémentaire pour que des gens comme moi puissent simultanément écrire et chercher. Au contraire, il nous inonde de demandes de travaux supplémentaires et ma réaction viscérale a été de dire "oui" trop souvent. J'ai consacré de nombreux efforts à des activités non productrices de "crédits", auxquelles j'attribue la même valeur qu'à celle de démontrer des théorèmes : politique mathématique, transcription de mes notes en un livre de standard élevé en matière de communication (à paraître bientôt), usage de l'informatique en mathématiques, enseignement mathématique, développement de nouvelles formes de communication en mathématiques à travers le "Geometry Center" (voir notre première réalisation, la vidéo "Not Knot"), direction du MSRI, etc.

Je pense que ce que j'ai fait n'a pas maximisé mes "crédits". J'ai été dans une position où il ne me semblait pas très utile de me battre pour plus de "crédits" et, vraiment, je commence à penser qu'il me reste de plus grands défis à relever que de prouver de nouveaux théorèmes.

Je pense vraiment que mes actions ont beaucoup contribué à stimuler la recherche mathématique.

Traduction : Jean Brette, qui remercie vivement Line Audin, Michel Demazure et Adrien Douady pour les améliorations qu'ils ont suggérées.