REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

ÉDITORIAL

Mais où se cachent les recherches sur l'enseignement de l'analyse ?

Un numéro spécial parmi d'autres

Au moment de la création de la revue *Repères-IREM*, le comité de rédaction avait pris la décision de faire un numéro thématique par an. C'est ainsi que vous avez eu entre les mains successivement des numéros thématiques *Géométrie, Démonstration, Activités, Méthodes, Modules*, et que nous vous proposons aujourd'hui enfin un numéro spécial *Analyse*.

Paradoxe de l'enseignement de l'analyse aujourd'hui

Dans ce numéro vous allez trouver des calculatrices graphiques, un logiciel de calcul formel, des Maths en jean et de l'analyse non standard. Bien sûr la problématique de l'enseignement de l'analyse est sous-jacente dans tous ces articles, de façon explicite ou implicite, mais la question de l'enseignement de l'analyse en France reste paradoxale.

D'une part, l'enseignement de mathématiques au lycée est essentiellement constitué par un enseignement d'analyse.

D'autre part, le travail de recherche sur l'enseignement de l'analyse est peu visible depuis quelques années. Les derniers travaux de la commission INTER IREM Analyse, ainsi que les informations venant de l'ADIREM, font apparaître un déplacement vers d'autres étiquettes, comme par exemple "calculatrices graphiques", "logiciels de calcul formel", "informatique", "histoire et épistémologie des mathématiques", "didactique", "modules", "liaison inter cycles".

Alors, qu'en est-il de l'enseignement de l'analyse aujourd'hui et des recherches sur cet enseignement ? Beaucoup de questions se posent à tous ceux qui, au lycée ou après, doivent enseigner cette discipline.

Que savons-nous de façon précise sur les effets de l'introduction et de la fréquentation des "nombres du collège" sur l'introduction de l'analyse au lycée ? Avons-nous étudié les effets, sur l'apprentissage de cette discipline, de la manipulation expérimentale du concept de limite, de l'établissement et de l'application des règles du calcul sur les limites au lycée et connaissons-nous l'effet de ces pratiques sur l'enseignement de l'analyse en DEUG ? L'enseignement en DEUG crée-t-il des freins ou des obstacles à l'enseignement de l'analyse en licence-maîtrise ?

Comment et quand se fait la genèse et la maturation des concepts de l'analyse ? Dans cette genèse et cette maturation des concepts de l'analyse chez les élèves, chez les étudiants, chez les enseignants en formation, quels peuvent-être la place et le rôle d'un enseignement de l'histoire et de l'épistémologie de l'analyse ? Comment peut-on éclairer les phénomènes de l'enseignement de l'analyse par une réflexion didactique ?

L'enseignement et l'apprentissage de l'analyse sont-il modifiés, entravés, enrichis par l'introduction des calculatrices, calculatrices graphiques et ordinateurs dans les lycées ? Et que se passe-t-il dans les DEUG ? Certains enseignements ou apprentissages deviennent-ils caduques ? Sur quels critères les reconnaître ? Comment pouvons-nous répondre à toutes les questions issues de l'utilisation effective des calculatrices graphiques et des logiciels de calcul formel au lycée ?

Nous avons déjà trouvé des réponses dans les numéros précédents de *Repères-IREM* et nous en aurons quelques autres dans ce numéro.

Au cœur du problème

Rappelons, sans remonter trop loin dans le temps et dans les programmes scolaires, que la définition formelle de la continuité en ε,α est apparue explicitement dans le programme du lycée en 1965 (1) quand l'étude des fonctions numériques a quitté le chapitre "algèbre" pour constituer un nouveau chapitre nommé pour la première fois "analyse", qu'elle a été supprimée en 1983 et remplacée par des résultats – admis après observation – sur des fonctions de référence et par des "règles de comparaison" qui ont statut de théorèmes pour les démonstrations. Peu de temps après, les théorèmes des opérations sur les limites ont été réintroduits et ont ainsi "algébrisé" l'analyse, ce qui a rendu le plus souvent inutile tout travail de majoration, minoration ou encadrement. Mais cet enseignement continue à s'appeler

(1) En réalité, les ε,α sont intervenus dans l'enseignement de l'analyse bien avant les changements de 1965 ; en témoigne la définition de l'ouvrage de Chenevier (*Cours d'algèbre*, 1930) que cite Rudolf Bkouche à la fin de l'annexe de son point de vue.

“analyse”. Est-il réellement une introduction à l’analyse ?

Comment entrer dans la problématique de l’analyse ? Marc Legrand a posé une hypothèse à ce sujet : “Les raisonnements de l’analyse présentent un saut épistémologique très important. En effet, entrer dans le jeu de l’analyse, c’est pour l’essentiel accepter, à partir de quelques principes directeurs, de perdre volontairement une information particulière très forte pour en déduire une plus faible, mais plus significative et plus manipulable (majorations, minorations), c’est penser qu’un détour par l’infini peut permettre de traiter un problème dont la formulation est finie”. Quels sont les objectifs assignés à l’enseignement de l’analyse au lycée et que voulons-nous faire à travers cet enseignement ? Et dans l’enseignement supérieur ?

Et nous découvrons un nouveau paradoxe : quand les lycéens disent ou pensent que, si x tend vers x_o, alors y tend vers y_o – ce que Luc Trouche appelle la conception primitive de la limite –, ils ont déjà le sens du concept de limite mais ils ne disposent pas d’une définition convertible en règles d’action pour appliquer le principe de non contradiction, qui seul leur permettra de se confronter à la réalité des mathématiques.

Et si nous leur donnons la définition en ε,α qui permet d’apporter la preuve dans une démonstration, alors les élèves risquent de perdre sens et intuition *[Voir le texte de Marc Legrand, "A la recherche de la pierre philosophale pour enseigner l’analyse"]*.

Comment alors accompagner les lycéens et les étudiants vers la nécessité d’une définition pour démontrer ce qui ne peut pas être démontré avec la conception primitive [2] en conservant les conceptions antérieures, le sens et l’intuition ?

L’articulation lycée-DEUG [3], un problème crucial

Le lycée, préparation ou obstacle à l’enseignement de l’analyse ?

Pour certains enseignants, au lycée, on développe l’activité mathématique à travers l’observation, l’intuition, dans une démarche heuristique, préliminaires incontournables si on ne veut pas poser des définitions formelles sur du vide et si on veut construire du sens. Ces professeurs affirment que les lycéens font de l’analyse et donnent leurs arguments. Pour d’autres, les élèves ne font pas d’analyse au lycée, ce ne sont que “recettes et bricolage”, et seul l’enseignement supérieur apporte enfin la formalisation, la démonstration, la rigueur et la vraie mathématique. Pour d’autres encore, la rupture est si rapide et si brutale qu’il y a perte de sens et découragement chez les étudiants et ces derniers stigmatisent la rupture institutionnelle et la “dérive des continents”.

Y a-t-il possibilité de réconciliation de ces différents points de vue ? En bref, fait-on oui ou non de l’analyse aujourd’hui

(2) Par exemple que sin$x$ n’a pas de limite à l’infini ou encore que la limite, si elle existe, est unique.

(3) C’est un raccourci pour parler de l’articulation entre l’enseignement en Première et Terminale S, avant le baccalauréat, et toutes les sections d’enseignement scientifques après le baccalauréat.

au lycée ? Commence-t-on vraiment en DEUG, ou seulement en licence ? ou peut-être encore plus tard !

Il doit être possible de considérer l'enseignement dans les classes scientifiques du lycée comme une phase de familiarisation, de constructions d'expériences et de connaissances sur un corpus d'objets, phase où l'on peut commencer à confronter les lycéens avec la nécessité d'outils et de définitions théoriques pour aller "plus loin". Et il doit être possible de penser l'enseignement en DEUG comme l'apport de ces outils théoriques et de la formalisation, les exemples et le sens émergeant de l'expérience acquise au lycée. Si nous pouvions décrire l'état réel - ou souhaité - des connaissances des bacheliers, leurs conceptions des nombres et des objets de l'analyse, les outils de pensée dont ils disposent, cela nous permettrait de faire des propositions sérieuses pour articuler les programmes de Terminale S avec ceux de l'enseignement scientifique post-bac. Comment fait-on des démonstrations d'analyse en Terminale S ? Quel sens a la démonstration en analyse au lycée ? Le lycéen démontre pour qui ? Pour lui, pour le maître, pour la note ? Que veut dire "démontrer" quand on oblige les lycéens à démontrer "rigoureusement" des résultats dont ils ont l'intuition à partir de règles établies "expérimentalement" ? Quel est le statut de ce qui est observé, manipulé, admis, démontré au lycée ? Comment étayer les connaissances et le savoir ainsi construits pour qu'il servent de point d'appui aux définitions formelles introduites après le baccalauréat ? Les règles du jeu sont-elles claires pour tous les élèves, et dans quel état d'esprit abordent-ils ce que leur apporte l'enseignement supérieur ? Quelles y sont alors les exigences pour la démonstration ? Quel rôle joue la calculatrice dans l'invention des mathématiques où il faut arriver à faire passer la rationalité avant l'expérience ? Quelle rupture épistémologique profonde les étudiants de première année doivent-ils affronter ?

Et quid de la formation des maîtres dans ce contexte ? Ils sont collégiens, lycéens, étudiants, élèves-professeurs et la boucle est bouclée, ils reviennent sur le terrain et les universitaires critiquent l'enseignement secondaire. Soit, mais où introduire le petit changement qui va modifier la boucle de causalité circulaire ? A ce sujet, il est important de rappeler et de souligner l'effet des pratiques de l'université sur la formation des enseignants du secondaire et en particulier sur leur rapport aux mathématiques et sur leur conception des modes de transmission des savoirs mathématiques.

Les articles de ce numéro

Dans ce numéro, deux thèmes sont privilégiés : enseignement de l'analyse et outils informatiques, enseignement de l'analyse et analyse non standard.

Et pourtant ils trouvent... des nombres qui leur apparaissent sous un jour nouveau. Bien sûr, au collège les élèves se sont familiarisés avec les différentes sortes de nombres. Faut-il en conclure que cet enseignement a été inefficace ou plutôt que les connaissances ainsi construites s'effritent au contact d'un obstacle résistant et doivent être reconstruites dans la problématique de l'analyse ? L'expérience MATH.en.JEANS, étudiée par une équipe de l'IREM de Lyon, fait apparaître la nécessité de confrontation des élèves avec les problèmes épistémologiques en mathématiques, l'importance du temps de maturation et nous donne quelques aperçus du travail privé qui reste à faire aux élèves pour mettre leurs idées en cohérence interne. Et nous pouvons voir que la résolution d'un vrai problème d'analyse "avec les moyens du bord" amène beaucoup de questions certes, mais aussi des réponses en termes d'autres questions fort pertinentes.

Avec les calculatrices et avec DERIVE, nous continuons le débat sur la machine qui fait "à la place de l'élève" et sur l'évolution du rôle du professeur qui doit être garant de la circulation et de l'appropriation d'un savoir par l'élève.

Comment utiliser DERIVE pour faire évoluer les connaissances des élèves sur les tangentes vers une définition plus rigoureuse nécessitant des outils mathématiques nouveaux et comment obtenir que la dérivation, en Première S, ne soit pas uniquement un outil au service de l'étude des variations d'une fonction ? Pour Philippe Michel, la machine ne travaille pas à la place de l'élève, elle redéfinit son rôle d'élève en le forçant à réfléchir. Et si nous pensons qu'il existe encore une composante éducative dans l'acte d'enseigner, une telle situation d'enseignement est une aubaine !

Luc Trouche étudie les modifications induites par l'utilisation d'une calculatrice graphique ou d'une calculatrice de calcul formel en Terminale, les modifications dans la classe du contrat qui lie le maître et l'élève, mais aussi les modifications de l'enseignement et des notions mathématiques apprises par l'élève. Et s'il est vrai qu'il ne peut y avoir conception de programme sans réflexion "écologique", alors il faut prendre en compte l'arrivée massive des nouveaux outils informatiques dans l'environnement des élèves, et cet article nous incite à y penser.

Le débat sur l'analyse non standard avait été ouvert dans Repères-IREM par deux articles de Thérèse Gilbert - équipe du GEM de Louvain-la-Neuve – dans les numéros 11 et 13, et ce débat pose le problème de la pertinence de la séparation des concepts entremêlés dans le concept de limite, ordre de grandeur, forme, ombre, convergence, et des difficultés à entrer dans les raisonnements contravariants.

Peut-on enseigner l'analyse aujourd'hui ? André Deledicq répond non tout de suite et nous invite à la modestie dans nos ambitions. Ce point étant réglé, nous pouvons alors le suivre en toute liberté dans sa proposition de casser le concept de limite en deux concepts, l'un de nature plutôt numérique et l'autre de nature plutôt géométrique. Et ces propositions mises en œuvre sur des exemples simples et pertinents nous donnent à penser et nous invitent à un autre point de vue.

Comment enseigner l'analyse de façon covariante, au plus près du cheminement heuristique ? A-t-on le droit de faire une chose pareille ? N'est-il pas dangereux de mêler étroitement l'intuitif et le formel ? R. Lutz, A. Makhlouf et E. Meyer nous proposent les résultats d'un long travail de réflexion sur les concepts de l'analyse, et là, le petit brin de dictionnaire de Francine Diener pourra aider les lecteurs qui ne reconnaîtraient pas les mots du discours de l'analyse non standard.

EDITORIAL

Des vacances pour lire, réfléchir, écrire et pour alimenter le débat ouvert dans ce numéro

Ce numéro de *Repères-IREM* vous arrive juste au début des vacances, il est petit, il est léger, il se glisse dans n'importe quelle valise ou sac à dos, il sera plus long à lire qu'un polar, et avec un peu de papier et un crayon vous pourrez faire des démonstrations non standard et prendre des notes ! A la rentrée, envoyez-nous vos réactions et vos points de vue, et pourquoi pas des articles.

Bonnes vacances à tous et à toutes.

Nice, le 17 avril 1996
Maryse MAUREL

À LA RECHERCHE DE LA PIERRE PHILOSOPHALE POUR ENSEIGNER L'ANALYSE

Marc LEGRAND
Irem de Grenoble

En fait, dès que nous voulons introduire en classe une problématique de limite, nous nous heurtons à l'obstacle épistémologique d'un concept mathématique pour lequel il n'existe pas de définition qui soit simultanément assez simple et significative pour engager à l'action et assez solide au niveau de la logique pour permettre une action proprement mathématique.

En effet, quand on aborde le problème de la limite d'une fonction au niveau du sens ou de l'action, on est inexorablement conduit à regarder en quoi une modification infinitésimale sur la variable produit ou non une modification du même type sur la fonction. Or, lorsqu'on se place à ce niveau, i.e. ce que Luc Trouche appelle la conception primitive de la limite, on a l'air au niveau de la logique de proposer la simple implication "Si x tend vers x_0 , alors $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ ". Si tel était le cas, *i.e.* s'il s'agissait bien d'une simple implication, les choses seraient "simples" car il suffirait alors de faire jouer les règles habituelles de la logique pour "récupérer" un principe de contradiction à propos des limites (*i.e.* pour savoir si oui ou non f a une limite en x_0 et si cette limite est L !).

En réalité, nous savons qu'il n'en est rien puisque nous sommes obligés de constater que s'il est possible, en ayant recours au langage symbolique, de donner un sens mathématique précis à l'expression globale "Si x tend vers x_0, alors $f(x)$ tend vers $f(x_0)$", il est par contre impossible de donner un sens (qui entre dans la dichotomie propre à la logique standard) à chacun des deux membres pris séparément "x tend vers x_0" et "$f(x)$ tend vers $f(x_0)$" de cette "fausse implication".

Comme, pour pouvoir "faire des mathématiques" en classe, il faut bien entendu que nos élèves puissent donner du sens aux objets que nous introduisons, mais également, et de façon tout aussi nécessaire, qu'ils puissent exercer sur ces nouveaux objets un principe de contradiction, apparaît alors la double nécessité que ces élèves puissent d'une part au niveau du sens et de l'heuristique exploiter la vision primitive de la limite (vision qui les conduit à imaginer une action infinitésimale sur la variable pour en observer le résultat sur la fonction) et d'autre part, au niveau des preuves, qu'ils puissent travailler en sens inverse, c'est-à-dire qu'ils puissent concevoir que pour se persuader de quelque chose au niveau des limites, il faut le plus souvent se donner d'abord des contraintes infinitésimales sur les images (c'est-à-dire une famille fondamentale de contraintes de proximité au niveau des images) et regarder à chaque fois s'il est possible ou non de trouver une contrainte de proximité correspondante sur les antécédents (*i.e. il faut qu'ils puissent disposer de l'efficience mathématique que la définition en* $\varepsilon - \alpha$ *confère à la limite.)*

C'est donc bien autour de ces deux nécessités contradictoires : préserver à tout prix sens et intuition d'une part (nécessité satisfaite par la vision primitive de la limite) et d'autre part contrainte épistémologique de se doter d'un principe de contradiction permettant de faire des mathématiques (nécessité satisfaite par les définitions en $\varepsilon - \alpha$), que les différents acteurs de l'enseignement "ferraillent" depuis des années en espérant un peu naïvement avoir découvert la pierre philosophale en optant radicalement à chaque réforme pour une position ou pour l'autre.