REPERES - IREM . N° 22 - janvier 1996

ARBRES ET TABLEAUX DE PROBABILITÉ : ANALYSE EN TERMES DE REGISTRES DE REPRÉSENTATION

Claire DUPUIS
Suzette ROUSSET-BERT
Irem et Irma de Strasbourg

1. INTRODUCTION

L'enseignement des probabilités au lycée a subi ces dernières années d'importantes modifications dans son esprit. Il a suscité des contributions de recherche en didactique et de nombreux débats dont la revue *Repères IREM* s'est souvent fait l'écho.

En utilisant le cadre théorique des registres sémiotiques de représentation mis en place par Raymond Duval, cet article propose un point de vue nouveau à propos de la notion de probabilité conditionnelle et d'indépendance de deux événements.

La notion de registre résulte d'une perspective **sémiotique**. La sémiotique est une discipline qui étudie tout système de signes pouvant servir à **représenter** ou à **communiquer**. On peut constater que les progrès de la connaissance, dans tous les domaines, s'accompagnent toujours de la création et du développement de systèmes de signes nouveaux et spécifiques qui coexistent plus ou moins avec le premier des registres : celui de la langue naturelle. Ainsi, un registre sémiotique de représentation (nous dirons simplement un registre) est constitué par des signes au sens le plus large du terme : traits, symboles, icônes mais aussi lettres et mots. Les critères d'appartenance d'une représentation donnée à un registre donné sont souvent implicites dans l'enseignement.

Identifier un objet, une représentation, comme appartenant à un registre n'est évidemment pas le seul travail que l'on effectue : l'utilisation essentielle des systèmes de signes est la possibilité d'effectuer des transformations de représentations. Il existe deux sortes de transformations qu'il convient de distinguer : celles qui sont internes à un registre, les **traitements**, et celles qui consistent en un changement de registre, les **conversions**. En effet, si " (...) la propriété fondamentale des représentations sémiotiques (est) leur transformabilité en d'autres représentations qui conservent soit tout le contenu de la représentation initiale soit une partie seulement de ce contenu (...) **cette transformation ne correspond pas à la même activité cognitive** selon que la transformation se fait à l'intérieur du même registre ou, au contraire, consiste en un changement de registre" (R. Duval, 1993).

Nous nous proposons de :

– mettre en évidence la nécessaire coordination entre plusieurs registres (sémiotiques) de représentation (arbres, tableaux, langue naturelle, écriture symbolique...) pour résoudre un problème de probabilité.

– décrire les règles de fonctionnement propres à chaque registre et les règles de conversions d'un registre à l'autre en insistant sur le fait que cela ne va pas nécessairement de soi pour les élèves.

– montrer comment ce cadre théorique peut permettre d'expliquer des erreurs ou des blocages d'élèves en proposant une classification des problèmes (énoncés congruents ou non congruents à leur représentation dans un registre donné). Il resterait à montrer comment un enseignement systématique de ces registres est une aide pour les élèves dans la résolution d'un problème de probabilité et dans la compréhension des concepts en jeu. Nous n'aborderons pas en détail ce dernier point car il fait l'objet d'une recherche en cours.

– réinterpréter dans notre cadre théorique des résultats de recherches antérieures sur le thème des probabilités conditionnelles.

Après avoir brièvement rappelé que les registres sont utilisés par tous (§2), nous présenterons le registre des arbres (§3) en l'illustrant avec trois problèmes construits en fonction de leur représentation en arbre.

Ces problèmes ont été soumis à 35 étudiants du Deug B (préexpérimentation) puis à cinq classes de terminale après enseignement des probabilités (131 élèves). Les modalités seront précisées au §3.3.

Au §4, nous expliquerons brièvement ce que notre travail apporte par rapport aux travaux antérieurs, notamment d'autres analyses de résultats publiés dans *Repères IREM*.

Nous présenterons le registre des tableaux (§5) en l'illustrant avec deux autres problèmes construits à partir du même tableau en faisant uniquement varier le choix des données. Ces problèmes ont aussi été utilisés dans notre expérience.

2. REGISTRES SÉMIOTIQUES DE REPRÉSENTATION UTILISÉS DANS LES MANUELS

Les différents registres sémiotiques de représentation, le registre de la langue naturelle, celui des écritures symboliques, le registre des représentations graphiques, le registre des arbres et celui des tableaux sont tous utilisés dans les manuels scolaires. Pour exemple, dans le manuel de *Transmath Terminales C E* (1992), page 110 exercice 37, l'énoncé fait intervenir trois registres : le registre de la langue naturelle, celui des écritures symboliques (un peu) et le registre des tableaux. La compréhension des trois registres est nécessaire pour la compréhension de l'énoncé. Dans le même manuel, l'énoncé de l'exercice 4 page 106 fait intervenir deux registres : le registre de la langue naturelle et le registre des représentations graphiques. Dans le manuel *Dimathème Terminales F*, page 98, les corrigés des exercices 9 et 12 font intervenir les quatre registres des arbres, des tableaux, des écritures symboliques et de la langue naturelle. Les énoncés des exercices 9 (page 89) et 12 (page 90) font intervenir la langue naturelle et des écritures symboliques élémentaires.

Cette présentation des énoncés et des solutions, qui, de fait, met plusieurs registres en interaction, n'est absolument pas une erreur ou une maladresse des auteurs : c'est une **nécessité** dans l'enseignement des mathématiques. L'erreur pourrait être de faire comme si les changements de registres, et le choix du registre le plus adapté à la résolution d'un problème, étaient des activités transparentes pour les élèves, comme si l'introduction et l'imbrication de ces registres ne pouvaient que faciliter la résolution en donnant aux élèves des moyens de représentation de situations mathématiques abstraites, comme si cette "concrétisation" apparente ne pouvait qu'être une aide, un outil de résolution. Certes, les arbres, les tableaux, les graphiques sont des outils très performants de résolution mais uniquement pour celui qui a appris à les manipuler, qui en connaît les caractéristiques, les propriétés de "traitement", c'est à dire les manipulations internes, et les propriétés de "conversion" c'est-à-dire de changement de registre, bref celui qui sait "articuler" les différents registres.

Plus généralement, la compréhension de la notion de probabilité suppose **la coordination de tous ces registres**, c'est-à-dire la possibilité de changer de registre de représentation si nécessaire, en choisissant le(s) registre(s) le(s) plus adapté(s) à la situation.

3. LE REGISTRE DES ARBRES

Nous utiliserons comme exemples trois des problèmes de notre expérience.

3.1. *Les problèmes A1, A2 et A3*

Enoncé du problème A1

A1

On dispose d'un dé bien équilibré et de deux urnes contenant des boules blanches et des boules noires.
On jette le dé.
Si le résultat obtenu sur le dé est 1 ou 2, on tire une boule au hasard dans l'urne U1.
L'urne U1 contient 1/4 de boules blanches et 3/4 de boules noires.

Si le résultat obtenu sur le dé est 3 ou 4 ou 5 ou 6, on tire une boule au hasard dans l'urne U2.
L'urne U2 contient 5/6 de boules blanches et 1/6 de boules noires.

QUESTION 1 : Quelle est la probabilité que la boule ainsi obtenue soit blanche ?

QUESTION 2 : Si on sait que la boule obtenue est blanche, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne de l'urne U1 ?

Représentation de la situation A1 par un arbre

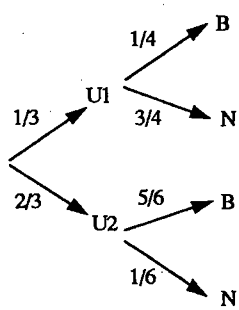


Fig. 1

Réponses.

QUESTION 1 : $p(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{23}{36}$

QUESTION 2 : $pB(U1) = \dfrac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{23}{36}} = \frac{3}{23}$

Enoncé du problème A2

> **A2**
>
> On dispose d'un dé bien équilibré et de deux urnes contenant des boules blanches et des boules noires.
> On jette le dé.
> Suivant le résultat obtenu sur le dé, on tire une boule au hasard soit dans l'urne U1 soit dans l'urne U2.
>
> DONNEES :
> La probabilité de tirer une boule blanche est : 7/18
> La probabilité de tirer dans l'urne U1 et de tirer une boule blanche est : 1/9
>
> QUESTION : Si on sait que la boule obtenue est blanche, quelle est alors la probabilité qu'elle provienne de l'urne U1 ?

Une représentation de l'énoncé A2 par un arbre

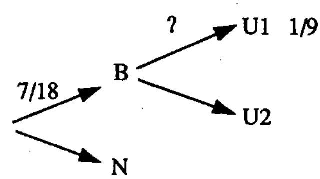


Fig. 2

Enoncé du problème A3

> **A3**
>
> On dispose d'un dé bien équilibré et de deux urnes contenant des boules blanches et des boules noires.
> On jette le dé.
> Suivant le résultat obtenu sur le dé, on tire une boule au hasard soit dans l'urne U1 soit dans l'urne U2.
>
> DONNEES :
> La probabilité de tirer dans l'urne U1 est : 1/6
> La probabilité de tirer dans l'urne U1 et de tirer une boule blanche est : 1/9
>
> QUESTION : Si on sait que la boule est tirée dans l'urne U1, quelle est alors la probabilité qu'elle soit blanche ?

Une représentation de l'énoncé A3 par un arbre.

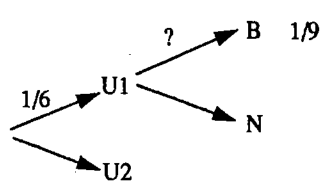


Fig. 3

3.2. *Le registre des arbres est un "registre sémiotique de représentation"*

Nous indiquerons, pour les registres qui nous intéressent plus particulièrement ici, c'est-à-dire le registre des arbres et celui des tableaux :

1 – ***les unités élémentaires*** de ces registres
2 – ***les règles de conformité*** : ce sont les règles qui "permettent la reconnaissance des représentations comme représentations dans un registre déterminé" (R. Duval, 1993, p. 31).
3 – ***des exemples de traitement***
un **traitement** est une transformation qui produit une autre représentation dans le même registre.
4 – ***des exemples de conversion***
une **conversion** est une transformation qui produit une représentation dans un autre registre que celui de la représentation initiale.

3.2.1. L'unité élémentaire du registre des arbres

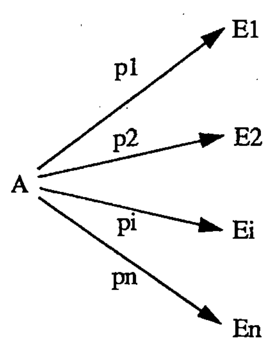


Fig. 4

L'unité élémentaire du registre des arbres, ou arbre élémentaire, est un ensemble de n branches orientées ($n \geq 1$) partant d'un seul point (A) de départ, se terminant en n points d'arrivée distincts Ei ($i = 1,n$), et munies de nombres pi positifs de somme égale à 1.

3.2.2. Les règles de conformité .

Tout arbre est

soit un arbre élémentaire
soit un arbre composé d'arbres élémentaires, de la façon suivante :

un arbre a un seul point de départ (on dit que ce point est au niveau 0 de l'arbre) ;
tout point d'arrivée d'un arbre élémentaire est soit un point d'arrivée de l'arbre, soit un point de départ pour un autre arbre élémentaire ;
entre deux points d'un arbre, il y a un trajet orienté et un seul.

On constitue ainsi un arbre à plusieurs niveaux : si le point de départ d'un arbre élémentaire est au niveau n, tous ses points d'arrivée sont au niveau n + 1.

Les nombres au bout des branches (dans les marges de l'arbre) peuvent être absents (figure 1) ou présents (une donnée dans chacun des arbres représentant les énoncés A2 et A3). Leur présence peut être due aux données de l'énoncé et nous en parlerons dans le §3.2.4. sur les conversions. Elle peut aussi être le résultat d'un traitement.

3.2.3. Des exemples de traitement

Reprenons l'arbre A1 (figure 1).

Premier traitement : compléter cet arbre en ajoutant, aux bouts des branches, les produits des nombres qui sont sur les branches

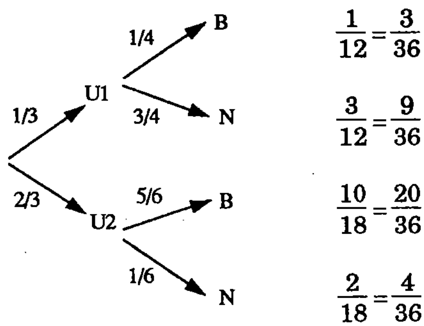


Fig. 5

ou même les sommes de certains produits, correspondant à la même "lettre" (par exemple B).

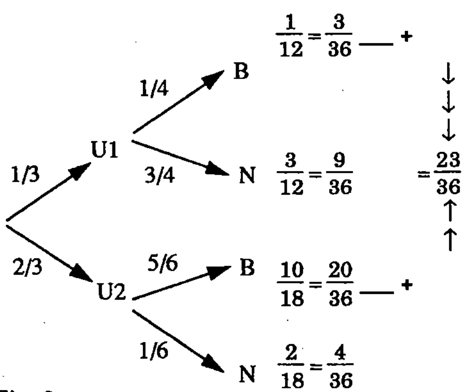


Fig. 6

Les arbres des figures 5 et 6 ont des marges ; s'il est nécessaire de distinguer, on parlera du premier niveau de marge (figure 5) et du deuxième niveau où se trouve le nombre 23/36 (figure 6).

Autre exemple de traitement : le renversement de l'arbre précédent.

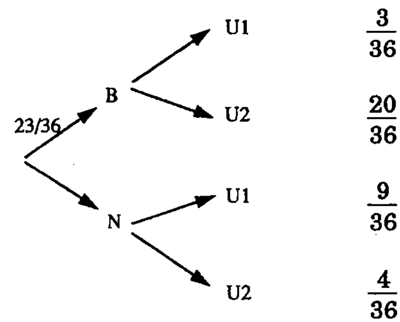


Fig. 7

Si nous explicitons des traitements possibles avant de parler de conversion, c'est pour bien montrer que le registre des arbres a ses propres traitements, même en dehors de tout contexte probabiliste.

3.2.4. Des exemples de conversions.

La majorité des énoncés de probabilité élémentaires sont en langue naturelle, assaisonnée d'une dose variable d'écriture symbolique. La première conversion est donc très souvent le passage de cet énoncé, d'une situation présentée dans ces deux registres à un arbre de probabilité représentant la même situation. Trois exemples de conversions sont donnés avec les trois problèmes appelés A1, A2 et A3 (§3.1.).

Règle de conversion

Considérons un arbre ayant au moins n+1 niveaux et dans cet arbre deux points successifs E_n et E_{n+1} ; alors la probabilité p_{n+1} portée sur la branche $E_n \longrightarrow E_{n+1}$ vaut :

$$p_{n+1} = p\left(En+1 \,\middle|\, \bigcap_{i=0}^{n} Ei \right)$$

Les conventions habituelles de désignation des événements et des points dans l'arbre font que c'est le couple (désignation, position dans l'arbre) qui permet de savoir quel est l'événement en question. Ainsi, les probabilités écrites aux bouts des branches correspondent à l'intersection des événements E_i figurant aux points successifs des dites branches.

3.2.5. La congruence sémantique

Observons les différences de difficulté dans les conversions. Dans A1, la conversion est immédiate (si on connaît les probabilités correspondant à un dé). L'arbre se trace et se remplit au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé. On dit que la représentation en arbre est (**sémantiquement) congruente** à la représentation de l'énoncé. La congruence sémantique est un critère intrinsèque de facilité de la conversion [1].

Dans A3, où les données sont p(U1) et p(U1 $\cap$ B), on voit que pour convertir cet énoncé en arbre (figure 3), il faut savoir qu'un arbre peut être muni de "marges" pour y placer la probabilité p(U1 $\cap$ B). L'arbre ne se remplit pas de gauche à droite, au fur et à mesure ; la conversion est intrinsèquement plus difficile que la précédente. Nous la qualifierons de non-congruente.

Pour A2, où les données sont p(B) et p(U1 $\cap$ B), la difficulté de la conversion augmente encore et on a le choix entre deux représentations en arbres

– soit un arbre où on conserve l'ordre des événements dans le temps de l'expérience ; dans ce cas, toutes les données sont dans les marges et on a deux niveaux de marges. On imagine la difficulté de la conversion, surtout si les arbres avec marges n'ont jamais été présentés aux élèves.

– soit un arbre où on ne conserve pas l'ordre des événements dans le temps ; dans ce cas, on n'a plus besoin que d'un seul niveau de marge ; c'est cet arbre que nous avons représenté figure 2. Si l'on compare cet arbre avec l'arbre fait pour A3 (figure 3), on voit que la position des données et la position de la probabilité demandée sont les mêmes. On voit maintenant comment ces questions ont été construites pour notre expérience.

A1 est la forme la plus classique de problème sur les probabilités conditionnelles avec ses deux questions. Pour la question 1, il faut calculer p(B) en calculant au passage p(B $\cap$ U1) et p(B $\cap$ U2). Si on travaille dans le registre des arbres, ce travail se fait dans les marges (figures 5 et 6). Pour résoudre la question 2 par la formule classique

$$p_B(U1) = \frac{p(U1 \cap B)}{p(B)}$$

il faut avoir répondu à la question 1 et y retrouver l'élément non explicitement demandé p(B $\cap$ U1). Il "suffit" (entend-on dire) de faire la division entre ces deux quantités calculées précédemment. La difficulté est donc typiquement celle de sélection des données pertinentes.

Et l'on voit bien que, grâce au **traitement qui consiste à inverser les deux niveaux**, l'arbre peut être un bon outil de sélection des données pertinentes. Le problème (A1 question 2) ainsi représenté par l'arbre "inverse" de la figure 7 a exacte-

(1) Pour une définition de la congruence, on peut voir aussi R. Duval 1988 a et b ou 1993 ; A. Mesquita 1989

ment la même structure que les deux problèmes à une question A2 et A3 où les probabilités nécessaires sont les seules données du problème.

3.3. *Notre expérience*

Cinq collègues ont bien voulu passer nos questionnaires dans leurs classes et nous les en remercions ; il s'agit de deux classes de Terminale E (la TE1 a 22 élèves et la TE2 en a 26), deux classes de Terminale C (la TC1 a 40 élèves et la TC2 en a 15) et une classe de Terminale B (la TB a 28 élèves). Ces questionnaires ont été donnés aux élèves après la fin de l'enseignement des probabilités. Il y a eu quatre modalités de questionnaire, qui comprennent toutes le problème A1 et deux autres problèmes (les problèmes "tableaux" T1 et T2 figurent dans le §5).

modalité A	A1	A2	T1
modalité B	T2	A2	A1
modalité C	A1	A3	T2
modalité D	T1	A3	A1

Nous n'avons pas observé de différences significative de comportement suivant la place d'une question dans le questionnaire, ni suivant le voisinage d'une autre question. Ainsi, à l'intérieur de chaque classe, la question A1 est réussie à peu près de la même façon, quelle que soit sa place et qu'elle soit associée à A2 ou A3.

Pourquoi avons-nous choisi de faire deux versions (A2 et A3) de problèmes à une question alors que nous avons vu qu'il s'agit de la même structure ? Parce qu'on entend dire que la difficulté de la question p(U1 / B) tient à une résistance à remonter le temps, à conditionner le passé par l'avenir, à concevoir que l'on puisse répondre à une question sur le passé en connaissant l'avenir. Si cette hypothèse de résistance au renversement du temps est correcte, nous devons observer une réussite à A3 (probabilité d'avoir une boule blanche sachant qu'elle a été tirée dans U1) plus grande qu'à A2 (probabilité d'avoir tiré la boule dans U1 sachant qu'elle est blanche). Si ce phénomène est dominant, la réussite ne doit pas être meilleure pour A2 que pour la deuxième question de A1 dont l'énoncé est exactement le même.

3.3.1. *Tableau des résultats concernant les questions "arbres" A1, A2 et A3*

Nous avons un échantillon de cinq classes et nous considèrerons les réussites relatives des différentes questions par classe, car nous pensons que par rapport à l'utilisation ou non des arbres, la situation dépend fortement de l'enseignant.

Dans ce tableau figurent les proportions de réussite (obtention du résultat numérique correct) exprimées en

$$\frac{\textit{nombre d'élèves ayant réussi}}{\textit{nombre d'élèves auxquels la question a été posée}}$$

Pour la question 2 du problème A1 (Q2 en abrégé), on a aussi fait figurer le rapport :

$$\frac{\textit{nombre d'élèves ayant réussi Q2}}{\textit{nombre d'élèves ayant réussi Q2}}$$

puisque la réussite à Q1 est nécessaire pour la réussite à Q2.

	A1 Question 1 p(B)	A1 Question 2 p(U1 / B) **inversion du temps**	A2 p(U1 / B) **inversion du temps**	A3 p(B / U1) **pas d'inversion du temps**
classe TE1	$\frac{12}{22} = 0{,}55$	$\frac{3}{22} = 0{,}136$ $\frac{3}{12} = 0{,}25$	$\frac{6}{10} = \mathbf{0{,}60}$ **la mieux réussie dans la classe**	$\frac{3}{12} = 0{,}25$
classe TE2	$\frac{24}{26} = 0{,}92$	$\frac{11}{26} = 0{,}42$ $\frac{11}{24} = 0{,}46$	$\frac{13}{14} = \mathbf{0{,}93}$ **la mieux réussie dans la classe**	$\frac{9}{12} = 0{,}75$
classe TC1	$\frac{39}{40} = \mathbf{0{,}975}$ **la mieux réussie dans la classe**	$\frac{11}{40} = 0{,}275$ $\frac{11}{39} = 0{,}28$	$\frac{11}{20} = 0{,}55$	$\frac{18}{20} = \mathbf{0{,}90}$ **A3 est mieux réussie que A2**
classe TC2	$\frac{10}{15} = 0{,}67$	$\frac{4}{15} = 0{,}27$ $\frac{4}{10} = 0{,}40$	$\frac{8}{9} = \mathbf{0{,}89}$ **la mieux réussie dans la classe**	$\frac{5}{6} = 0{,}83$
classe TB	$\frac{15}{28} = \mathbf{0{,}54}$ **la mieux réussie dans la classe**	$\frac{6}{28} = 0{,}21$ $\frac{6}{15} = 0{,}40$	$\frac{7}{15} = 0{,}47$	$\frac{6}{13} = 0{,}46$

3.3.2. Commentaires

Réussite par classe

La question la plus réussie est soit A1 question 1, soit A2 soit A3. La question la moins réussie est partout la question 2 de A1, même lorsqu'on ne considère que la réussite de ceux qui pouvaient réussir ; pourtant, formellement, c'est la même question que A2.

Inversion du temps

L'inversion du temps, c'est-à-dire ici le fait de demander la probabilité de tirer dans l'urne U1 sachant que la boule tirée est blanche, n'est pas le phénomène prépondérant qui pourrait expliquer une plus grande difficulté de A2 par rapport à A3. Si la question 2 de A1 est la plus difficile, c'est parce qu'elle est la deuxième question d'un problème et qu'elle utilise le résultat et un calcul intermédiaire de la première question.

Organisation des données

Le problème essentiel est celui de l'organisation des données. De ce point de vue, la connaissance des formules n'est pas d'une grande aide. La représentation de la situation dans le registre des arbres peut être d'une grande efficacité, à condition que les conversions et les traitements aient été enseignés. Et c'est là que nous voyons une grande différence entre les classes.

TE1 : Très peu d'arbres dans cette classe ; les élèves utilisent les formules. Les erreurs viennent d'une mauvaise identification des données et des probabilités écrites.

TE2 : La réussite est globalement meilleure que dans la classe précédente. Les élèves font beaucoup d'arbres pour A1, très peu pour A2 et A3 où les données à organiser sont moins nombreuses. A2 est réussie par 13 élèves sur 14 alors qu'il y a inversion du temps dans cette question.

TC1 : Dans cette classe, les arbres ont visiblement été institutionnalisés : 39 élèves sur 40 ont fait un arbre pour A1 et ces arbres se ressemblent. Mais ces arbres quasi-obligatoires n'ont pas de marge et ne sont jamais inversés de sorte qu'ils deviennent un obstacle pour la question A2 : on y voit apparaître des arbres suivis d'un échec ou d'une absence de réponse, car les seuls arbres connus des élèves ne sont pas adaptés à la situation.

TC2 : Dans cette classe, on trouve des arbres à toutes les questions, mais l'effectif faible (15) fait que quelques erreurs de calcul font chuter les taux de réussite (4 élèves sur 15 font comme seule erreur à A1Q1 une erreur de calcul).

TB : Cette classe ressemble à la TE2 en ce sens qu'il y a beaucoup d'arbres pour A1, très peu pour A2 et A3 . Mais des erreurs de calcul plus fréquentes qu'en TE2 font baisser les taux de réussite sans modifier significativement l'ordre de réussite des questions.

3.3.3. En conclusion, à propos du registre des arbres

Les arbres apparaissent souvent en classe comme représentation d'une situation donnée en langue naturelle, lorsqu'il y a congruence entre les deux c'est-à-dire lorsque la conversion de la langue naturelle vers une représentation en arbre se fait au fur et à mesure. La possibilité d'utiliser des arbres avec des marges est rarement enseignée, et si elle est évidente pour les enseignants, elle ne l'est pas pour les élèves à moins d'un apprentissage explicite.

Les conversions dans des situations de non congruence et les traitements dans le registre des arbres et notamment l'inversion ne sont pas non plus enseignées en général.

Pour bien comprendre toutes les possibilités qu'offre le registre des arbres, il faut avoir pratiqué de façon systématique, les conversions dans les deux sens entre ce registre et tous les autres registres en jeu et les traitements propres à ce registre.

4. QUELQUES TRAVAUX PORTANT SUR L'UTILISATION D'ARBRES ET DE TABLEAUX DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES DE PROBABILITÉ

Les arbres ayant été reconnus comme un outil de résolution d'une classe de problèmes élémentaires de probabilité, ils ont été étudiés par plusieurs auteurs (A. Totohasina 1992, 1993, 1994, R. Gras & A. Totohasina 1993, B. Parzysz 1990 et 1993) et utilisés de plus en plus dans les manuels scolaires et dans des publications IREM (par exemple, IREM de Strasbourg, 1992 et 1994).

Les deux articles de Bernard Parzysz sont un véritable plaidoyer pour les arbres. Nous adhérons bien entendu pleinement à son plaidoyer lorsqu'il affirme : "l'arbre probabilisé présente donc un intérêt bien plus grand que celui de simple illustration de la situation" (Parzysz 1993, p. 103), puisque un arbre peut constituer une représentation d'une situation, éventuellement énoncée dans un autre registre. B. Parzysz énonce des définitions et des règles, qui pourraient être pour nous des règles de conformité ou de conversion ; leur présentation résulte d'une perspective mathématique qui ne permet pas de comprendre leur rôle, ni de concevoir les variations systématiques nécessaires à leur enseignement. Aucun exemple de "traitement" (interne au registre des arbres) n'est donné, le retournement de l'arbre étant justifié par des formules donc dans un autre registre ; ce faisant, une des richesses des registres de représentation n'est pas exploitée.

Analyse, du point de vue des registres, des résultats obtenus par A. Totohasina

Il y a dans le travail d'André Totohasina une foule de données sur la notion de probabilité conditionnelle. Nous nous contenterons ici de (beaucoup) résumer une expérience d'enseignement suivie d'une évaluation (A. Totohasina, 1993 et 1994 ; les références de pages concernent l'une ou l'autre de ces publications désignées par 1993 ou 1994).

Deux classes sont observées : une terminale D et une terminale A. En terminale D, un enseignement introductif de la notion de probabilité conditionnelle est fait, à partir d'un problème en utilisant des arbres comme "support graphique". Les élèves connaissent les "arbres de dénombrement", "technique traditionnellement déjà pratiquée dans le chapitre sur le dénombrement, antérieur au présent chapitre" (1993, p. 10 ; *N.B. :* l'expérience a été faite en 1991). Aucun travail de traitement n'est fait sur les arbres en tant que représentations appartenant à un registre, puisque ce n'est pas le point de vue de l'auteur. L'enseignant fait passer les élèves de la langue naturelle de l'énoncé à l'arbre qualifié de "direct". Nous remarquons que ce changement de registre est du type le plus simple, puisque l'arbre est congruent à la situation présentée par l'énoncé. Puis l'enseignant les fait passer de l'arbre "direct" aux notations symboliques pour répondre aux questions 2 et 3. Pour la question 4, "il s'agit alors de compléter l'arbre inversé" (1993, p. 14). On remarquera que l'arbre inversé n'est pas construit directement à partir de l'arbre "direct". En fin de séance, après avoir défini formellement la probabilité conditionnelle, on fait traiter un exemple qualifié de simple, deux tirages sans remise dans une urne à deux couleurs. Le lendemain de la séance de cours, évaluation immédiate par deux problèmes. Ces problèmes sont aussi proposés aux élèves de la terminale A1 "mais la situation didactique menée dans cette classe ne mobilisait pas la variable arborescence d'une manière institutionnalisée" (1993, p. 20). Au vu des résultats, il est évident que les élèves de cette classe là ont appris à manipuler les tableaux à double entrée ; André Totohasina nous l'a confirmé, et cela se voit aussi dans les deux exemples de réponses cités page 112 (1994).

Évaluation 1 : Fabrication des boulons

Une usine dispose de deux machines M1 et M2 fabriquant des boulons.
La machine M1 fabrique 40% de la totalité des boulons ; 5% des boulons fabriqués par cette machine sont défectueux ; 1% des boulons fabriqués M2 sont défectueux.
On tire un boulon au hasard. Tous les boulons ont la même probabilité d'être tirés.
L'examen du boulon montre qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par la machine M1 ?

Pour André Totohasina : "Il s'agit d'un problème isomorphe à celui traité collectivement (en terminale D) pendant la séance d'introduction du chapitre sur la notion de probabilité conditionnelle." (1994, p. 108). Pour nous, il s'agit surtout d'une situation congruente à une représentation en arbre. L'arbre "direct" se construit donc facilement.

Évaluation 2 : Problèmes d'urnes

Deux urnes U1 et U2 contiennent respectivement 2 boules blanches et 3 boules noires, et 4 boules blanches et 1 boule noire. On tire au hasard une des urnes, puis on tire de cette urne une boule : on obtient une boule blanche. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne U1 ? (2)

Cette situation est congruente à une représentation par un tableau à double entrée. Construire un arbre pour représenter cette situation est bien plus difficile que pour la fabrication des boulons, parce qu'il n'y a pas congruence entre la situation problèmes d'urnes et un arbre représentant cette situation.

Au vu de cette analyse des situations et de leur congruence avec des représentations d'un registre ou d'un autre, on comprend les résultats obtenus. Les élèves de terminale D, qui ne connaissent que la représentation par les arbres, réussissent mieux le problème congruent (3) des boulons (20 sur 32, dont 19 ont fait des arbres) que le problème non congruent des urnes (12 sur 32, dont 11 ont fait des arbres). **Pour eux, les urnes sont plus difficiles que les boulons** puisque les 12 qui réussissent les urnes réussissent aussi les boulons. Cela n'implique absolument pas que les urnes constituent un problème intrinsèquement plus difficile : il est seulement non congruent à la seule représentation dont ils disposent, alors que les boulons constituent un problème congruent. Cette affirmation est confortée par le fait que pour les élèves de terminale A l'ordre de réussite (4) est inverse : 5 sur 43

(2) Le choix de cette situation nous semble malheureux dans le cadre d'une évaluation, car les deux urnes équiprobables ont le même nombre total de boules. La réussite peut parfaitement être usurpée, puisqu'on peut y arriver avec un raisonnement généralement faux, le mélange des contenus des urnes.

(3) Qui, rappelons le, est aussi "isomorphe à celui traité collectivement".

(4) On remarquera que leur réussite est globalement faible, mais nous savons trop peu de choses sur eux pour pouvoir l'expliquer.

réussissent les boulons alors que 13 sur 43 réussissent les urnes. **Pour eux, les boulons sont plus difficiles que les urnes.** Nous ne savons pas combien d'entre eux ont fait des tableaux mais seulement qu'un seul élève sur 43 a utilisé "un support visuel autre qu'un tableau à double entrée"(1993, p. 24). On voit ici clairement l'influence du registre de représentation dont disposent les élèves sur la réussite à l'un ou l'autre problème, un problème congruent à la seule représentation dont on dispose sera toujours mieux réussi qu'un problème non congruent.

5. LE REGISTRE DES TABLEAUX (DE PROBABILITÉ)

Nous utiliserons comme exemples les problèmes T1 et T2 de notre expérience, dont voici les énoncés avec les différentes représentations dans le registre des arbres et tableaux et les réponses exprimées dans le registre des écritures symboliques.

5.1. *Les problèmes T1 et T2*

Le problème T1

T1

Une urne contient des jetons de deux couleurs : ROUGE et NOIRE, portant chacun un numéro.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
La probabilité pour que le jeton soit ROUGE est 1/3.
La probabilité pour que le jeton porte un numéro PAIR est 4/9.
La probabilité pour que le jeton soit ROUGE et porte un numéro PAIR est 1/9.

QUESTION 1 : Quelle est la probabilité pour que le jeton soit NOIR ?

QUESTION 2 : Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro IMPAIR?

QUESTION 3 : Quelle est la probabilité pour que le jeton soit NOIR et porte un numéro IMPAIR?

QUESTION 4 : Les événements "être NOIR" et "porter un numéro IMPAIR" sont-ils indépendants ?

QUESTION 5 : Si on sait que le jeton tiré est NOIR, quelle est alors la probabilité pour que ce jeton porte un numéro IMPAIR ?

Représentation par un tableau

	R	N	
P	**1/9**	3/9	**4/9**
I	2/9	3/9	5/9
	1/3	2/3	1

Les probabilités données dans l'énoncé sont écrites en gras. Dans ce problème, les trois données ne sont pas du même type : deux données (1/3 et 4/9) sont à placer dans des marges et une donnée (la probabilité d'être Rouge et Pair égale à 1/9) dans une case que nous appellerons " case de catégorie croisée".

Représentation par un arbre

Dans l'arbre (fig. 8, page suivante) les trois probabilités données dans l'énoncé se retrouvent : la première (1/3) le long d'une branche, la deuxième(4/9) en marge de deuxième niveau, la troisième (1/9) en marge de premier niveau

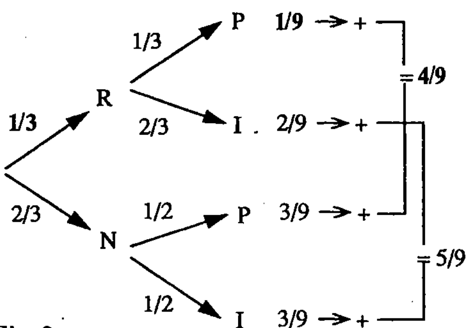


Fig. 8

Réponses exprimées dans le registre des écritures symboliques

Q1 $p(N) = 1 - p(R) = 2/3$

Q2 $p(I) = 1 - p(P) = 5/9$

Q3 $p(N \cap I) = 2/3 - 3/9 = 3/9$

Q4 $p(N \cap I)) \neq p(N).p(I)$

Q5 $p(I / N) = \dfrac{p(N \cap I)}{p(I)} = ½$

Le problème T2

T2

Une urne contient des jetons de deux couleurs : ROUGE et NOIRE, portant chacun un numéro.
On tire au hasard un jeton dans cette urne.
La probabilité pour que le jeton soit ROUGE et porte un numéro PAIR est 1/9.
La probabilité pour que le jeton soit ROUGE et porte un numéro IMPAIR est 2/9.
La probabilité pour que le jeton soit NOIR et porte un numéro PAIR est 3/9.

QUESTION 1 : Quelle est la probabilité pour que le jeton soit ROUGE ? soit NOIR ?

QUESTION 2 : Quelle est la probabilité pour que le jeton porte un numéro PAIR ? IMPAIR ?

QUESTION 3 : Quelle est la probabilité pour que le jeton soit NOIR et porte un numéro IMPAIR ?

QUESTION 4 : Les événements "être NOIR" et " porter un numéro IMPAIR" sont-ils indépendants ?

QUESTION 5 : Si on sait que le jeton tiré est NOIR, quelle est alors la probabilité pour que ce jeton porte un numéro IMPAIR ?

Représentation par un tableau

	R	N	
P	1/9	3/9	4/9
I	2/9	3/9	5/9
	1/3	2/3	1

Les données de l'énoncé sont trois probabilités d'intersection qui sont toutes les trois placées dans des cases de catégories croisées du tableau.

Représentation par un arbre

Les probabilités données dans l'énoncé doivent être placées en bout de branches dans les marges de premier niveau figure 9, page suivante).

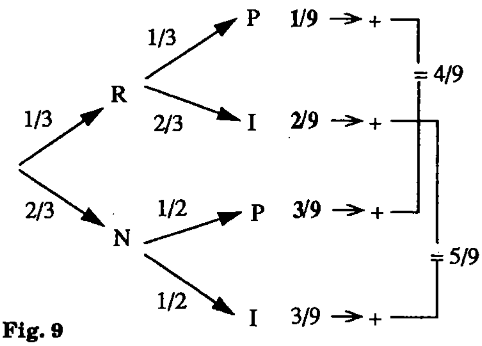


Fig. 9

Réponses exprimées dans le registre des écritures symboliques

Q1 $p(R) = 1/9 + 2/9 = 1/3$
$p(N) = 1 - 1/3 = 2/3$

Q2 $p(P) = 1/9 + 3/9 = 4/9$
$p(I) = 1 - 4/9 = 5/9$

Q3 $p(N \cap I) = 5/9 - 2/9 = 2/3 - 1/3$
$= 1 - (1/9 + 3/9 + 2/9) = 1/3$

Q4 $p(N).p(I) = 10/27$.
$p(N \cap I)) \neq p(N).p(I)$

Q5 $p(I / N) = \dfrac{p(N \cap I)}{p(I)} = ½$

5.2. *Le registre des tableaux est un registre sémiotique de représentation*

5.2.1. Les règles de conformité

On se limitera ici aux tableaux de type (2,2).

– Un tableau contient 15 cases.
– L'existence potentielle de toutes les cases est nécessaire pour avoir un tableau.
– Les cases sont de quatre types différents :
- **les cases de détermination sémantique**, C, L (au nombre de deux) Par exemple pour les problèmes T1 et T2, les deux déterminations sémantiques qui nous intéressent sont la couleur et la parité du numéro. Ces déterminations ne sont en général pas explicitées.
- **les cases de catégories** C1,C2, L1, L2 au nombre de quatre. Par exemple pour les problèmes T1 et T2, les catégories sont rouge, noir, pair, impair.
- **les cases de catégories croisées,** au nombre de quatre. Par exemple pour les problèmes T1 et T2, les catégories croisées sont rouge et pair, rouge et impair...
- **les marges** au nombre de cinq dont une marge totale qui contient toujours le nombre 1.

		C		
		C_1	C_2	
L	L_1	p_{11}	p_{12}	$p_{1.}$
	L_2	p_{21}	p_{22}	$p_{2.}$
		$p_{.1}$	$p_{.2}$	1

Les cases de catégories croisées et les marges contiennent des nombres compris entre 0 et 1. Chaque marge de ligne (ou marge de droite) contient la somme des valeurs qui se trouvent dans les catégories croisées de la ligne correspondante. $p_{11}+p_{12} = p_{1.}$ $p_{21} + p_{22} = p_{2.}$

Chaque marge de colonne (ou marge de dessous) contient la somme des valeurs qui se trouvent dans les catégories croisées de

la colonne correspondante.
$p_{11}+p_{21} = p_{.1} \qquad p_{12} + p_{22} = p_{.2}$

La somme des valeurs des marges de ligne (droite) vaut 1. La somme des valeurs des marges de colonne (dessous) vaut 1.

5.2.2. Traitements

On s'est limité ici aux tableaux "minimum" de type (2,2). Les seules opérations qui nous intéressent correspondent aux règles de conformité écrites plus haut. On pourrait définir des traitements, tels que des opérations de mélanges de tableaux mais ils ne nous semblent pas utiles dans l'enseignement actuel en terminale. On peut augmenter la taille des tableaux lorsque le nombre de caractères possédés par les individus est supérieur à deux. Nous n'aborderons pas ici ce type de tableaux.

5.2.3. Conversions

Le tableau est un moyen d'organisation des données pertinentes. Il permet de traduire certains énoncés, correspondant au problème suivant :

– on tire un individu au hasard dans une population
– on connaît des probabilités de catégories croisées et/ou de marges.

La probabilité $p_{1.}$ par exemple est la probabilité de l'évènement : "l'individu tiré possède le caractère L1". La probabilité p_{12} est la probabilité de l'événement "l'individu possède à la fois le caractère L1 et le caractère C2". La signification de ce nombre est déterminée avec deux déterminations sémantiques.

Le tableau permet dans chaque cas le choix des calculs à faire. Certains calculs seront faits en dehors du registre des tableaux.

5.2.4. Congruence sémantique

Les énoncés des deux problèmes T1 et T2 sont congruents à une représentation en tableau. C'est en effet la traduction de l'énoncé en langue naturelle dans le registre des tableaux qui est la traduction la plus facile. C'est aussi celle qui permet la résolution la plus rapide du problème.

Pour le problème T2, la traduction est immédiate et, une fois les données placées, il suffit de compléter les cases, à l'aide d'additions ou de soustractions, en respectant les règles de conformité. Pour le problème T1, la difficulté de conversion est un peu plus grande puisque les données sont à placer dans des cases ayant un statut différent. Une fois les données placées, la résolution reste rapide.

Les énoncés des problèmes T1 et T2 ne sont pas congruents à une représentation dans le registre des arbres. En effet les probabilités données dans les deux énoncés sont des probabilités de catégories croisées, autrement dit d'intersection (donc à mettre en marges en bout de branches) ou des probabilités à placer en marges de deuxième niveau. L'arbre reste un bon outil d'organisation des données, mais à condition de savoir utiliser un arbre avec marges.

5.3. Notre expérience

Tous les élèves ont eu à résoudre l'un des deux problèmes T1 ou T2 dont les énoncés et les représentations dans les registres des arbres et des tableaux ont été donnés au §5.1.

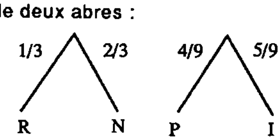
5.3.1. Résultats du problème T1

Classes	Nombre d'élèves (5)	représentations utilisées	Réussites aux trois questions Q3 Q4 Q5	Réussites à Q3 et Q5 avec échec à Q4
TE1	11	aucune	0	0
TE2	16	2 arbres dont 1 exact	0	0
TC1	21	10 arbres dont 1 exact 2 arbres dissociés (6)	2	1
TC2	7	3 arbres 2 arbres dissociés	1	2
TB	13	1 tableau 5 arbres dont 1 exact	0	4
Total	68		3	7

On peut remarquer que les élèves des classes de TE1 et TE2 ont très peu utilisé des représentations de type arbre ou tableau. Les élèves des classes de TC1 et TC2 ont utilisé des arbres. Nous savons que dans ces deux classes l'arbre a été utilisé par le professeur dans son enseignement.

Le professeur de TB a introduit à la fois les outils arbres et tableaux, mais on constate qu'un seul tableau a été dessiné.

(5) Ayant eu les modalités A ou D du questionnaire.
(6) Nous avons appelé "arbre dissocié" la juxtaposition de deux abres :

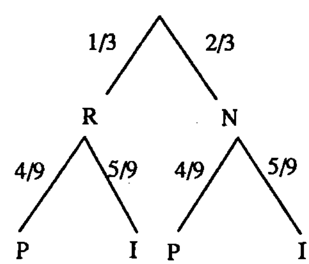


Ce type de représentation est toujours associé à un échec aux questions Q3, Q4 et Q5.

Parmi les arbres utilisés, on peut constater de nombreuses erreurs portant essentiellement sur les branches de deuxième niveau.

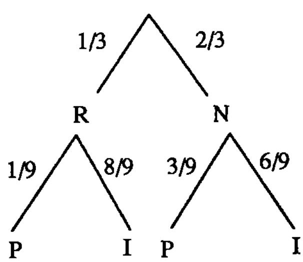
Voici deux exemples d'arbres inexacts :

Premier exemple:



Dans cet arbre les probabilités conditionnelles (qui ne sont pas données dans l'énoncé) ont été remplacées par p(P) = 4/9 et p(I) = 5/9. Cette erreur est renforcée par le fait que traditionnellement on écrit les lettres P et I en bout de branche alors que les événements correspondant aux bouts de branches sont les intersections $R \cap P$, $R \cap I$, $N \cap P$ et $N \cap I$.

Deuxième exemple



Dans cet exemple les probabilités sur les branches de deuxième niveau ont été confondues avec une probabilité d'intersection et son complément à 1.

Questions Q1 et Q2

Ces deux questions sont presque entièrement réussies (65 élèves sur 68), ce qui ne sera pas le cas pour la modalité T2. Nous expliquons ceci par le fait que pour trouver p(N) et p(I) il suffit de tenir compte d'une seule donnée et de passer au complémentaire.

Question Q3

Seuls 6 élèves répondent correctement à la question.

La réponse inexacte $p(N \cap I) = p(N).p(I)$, est donnée par 31 élèves sur 68.

17 élèves essaient de raisonner par passage au complémentaire. Seuls 3 de ces raisonnements sont corrects. Les erreurs de raisonnements par passage au complémentaire sont assez diverses. La plus fréquente (faite par 8 élèves sur 68) est du type $p(N \cap I) = 1 - p(R \cap P)$.

Questions Q3, Q4, Q5

Seuls 3 élèves sur 68 réussissent entièrement **l'ensemble des questions Q3, Q4, Q5** avec une réponse argumentée pour la question Q4 (indépendance).

Si l'on enlève la question de l'indépendance, les réussites sont un peu plus grandes mais restent faibles. Les questions Q3 et Q5 sont réussies par 10 élèves.

Sur ces dix réussites, sept élèves utilisent un arbre, un élève utilise un tableau et deux élèves seulement utilisent uniquement le calcul symbolique sans convertir le problème dans un autre registre de représentation.

Quelques remarques concernant l'indépendance

Au sujet de l'indépendance, rappelons tout d'abord les deux conceptions auxquelles on peut se référer (nous reprenons la formulation qui se trouve dans la thèse de Sylvette Maury) :

> a) "Deux événements sont considérés comme indépendants en un sens intuitif lorsqu'ils ne s'influencent pas, c'est à dire lorsqu'ils sont associés à des expériences se succédant dans le temps et dont l'indépendance est postulée."
> b) "L'autre conception repose sur la définition formelle de l'indépendance stochastique."

Aucune allusion n'est faite à une quelconque chronologie et l'indépendance est définie par $p(A \cap B) = p(A).p(B)$."

Dans la plupart des problèmes posés aux élèves (et en particulier dans les problèmes de modélisation issus d'autres disciplines), l'indépendance est postulée *a priori* et il est impossible de la vérifier. Dans les deux problèmes posés ici il s'agissait de faire fonctionner la définition mathématique du *b)*.

Les résultats de la question **Q4** (indépendance) sont difficilement exploitables car il y a beaucoup d'absence de réponse et beaucoup de réponses par oui ou par non sans justification.

Les erreurs les plus fréquentes sont le recours à la formule $p(N \cap I) = p(N).p(I)$ déjà utilisée abusivement pour répondre à la question Q3 (29 élèves sur 68) et le recours à l'indépendance intuitive "le fait d'être noir est indépendant du fait d'être impair" (8 élèves sur 68 dont 6 en TE1).

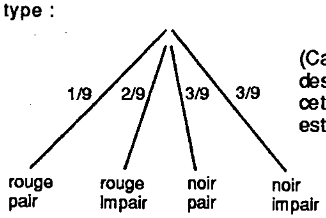
5.3.2. Résultats du problème T2

Classes	Nombre d'élèves (7)	Représentations utilisées	Réussites à Q3 Q4 Q5	Réussites à Q3 Q5 sans Q4
TE1	11	aucune	0	4
TE2	10	aucune	0	6
TC1	19	9 arbres 2 arbres "partition" (8)	4	8
TC2	8	6 arbres	1	2
TB	15	3 tableaux 5 arbres 2 arbres "partition"	0	4
Total	63		5	24

Par rapport au problème T1, on constate une bien meilleure réussite puisque 23 élèves sur 63 arrivent à traiter l'ensemble du problème sauf peut être la question de l'indépendance. Parmi eux 13 y arrivent en utilisant uniquement le calcul symbolique, un seul utilise un tableau et 9 autres utilisent un arbre.

Les données sont ici trois probabilités d'intersection sur les quatre qui décrivent totalement la situation. En quelque sorte les catégories croisées sont visibles dans l'énoncé et l'organisation des données est donc plus facile, même sans une représentation élaborée.

(7) Ayant eu les modalités B ou C du questionnaire.
(8) Nous avons appelé "arbre partition" un arbre du type :



(Car l'ensemble des probes de cette "ligne" est égal à 1)

Ce type d'arbre permet de décrire les données mais ne permet pas d'aller plus loin.

Le recours à une représentation explicite en arbre ou tableau est beaucoup moins indispensable pour résoudre ce problème T2 que pour résoudre T1.

Questions Q1 Q2

La réponse correcte aux questions Q1 et Q2 est donnée par 52 élèves sur 63. Dans les cas d'erreurs pour les questions Q1 et Q2, on remarque des tentatives de faire intervenir des probabilités conditionnelles, ou des calculs du type
$p(R) = p(R \cap P).p(R \cap I)$.

La difficulté plus grande des questions Q1 et Q2 par rapport à celles du problème T1 s'explique par le fait qu'il faut tenir compte simultanément de deux déterminations sémantiques puisque les données sont des probabilités d'intersection.

Question Q3

La question Q3 est traitée la plupart du temps par recours au complémentaire. Assez souvent la réponse à Q3 se trouve déjà dans les calculs faits en Q1 et Q2.

La question Q3, bien mieux réussie que dans le problèmeT1 n'est cependant exacte que dans 33 cas sur 63 seulement.

Question Q4

On observe encore beaucoup d'absences de réponses (18/63) ou de réponses par oui ou non sans justification (12/63). On retrouve également un certain nombre de recours à l'indépendance intuitive (14/63 dont 8 élèves dans la classe de TE1).

La réponse correcte $p(N \cap I) \neq p(N).p(I)$ est bien plus souvent rencontrée (14/63) que dans le problème T1 car $p(N \cap I)$ a pu être calculé facilement par passage au complémentaire et il ne reste plus qu'à vérifier $p(N \cap I) \neq p(N).p(I)$.

Question Q5

On rencontre 34 élèves sur 63 sachant que l'on doit calculer $p(N \cap I)/p(N)$ mais les erreurs de calcul font tomber à 20 sur 63 le nombre d'élèves trouvant le bon résultat 1/2 pour $p(I/N)$.

Cinq élèves traitent le problème sans recours aux formules mais en constatant qu'il y a la même proportion de numéros pairs ou impairs parmi les boules noires.

5.3.3. En conclusion, à propos du registre des tableaux

Les problèmes T1 et T2 ont été construits, à partir d'un tableau, en faisant varier le choix des données. Nous n'avons pas observé beaucoup de conversions vers le registre des tableaux puisque cet outil a été très peu choisi par les élèves, soit parce qu'ils ne le possédaient pas, soit, et c'est le cas de la classe de Terminale B, parce qu'ils en ont préféré un autre. Même lorsque le problème T2 n'est pas converti explicitement dans le registre des tableaux, les "catégories croisées" sont visibles dans l'énoncé et l'organisation des données est relativement facile. Le problème T1 est un problème que très peu d'élèves arrivent à résoudre sans le passage explicite dans un autre registre de représentation que celui de la langue naturelle.

6. CONCLUSION

Les expérimentations que nous avons décrites se situent en terminale, à un niveau de première acquisition des concepts de probabilité conditionelle et d'indépendance.

On peut constater que les problèmes proposés à ce niveau, dès qu'ils présentent une certaine complexité comme le problème T1, sont mal résolus par les élèves qui ne maîtrisent pas les outils arbre ou tableau suffisamment pour organiser les données. Lorsque ces outils ont été proposés aux élèves, ils ont permis un début d'organisation des données pertinentes dans le cas des problèmes congruents mais ils n'ont pas joué pleinement leur rôle car les règles de fonctionnement propres à chaque registre et les conversions d'un registre à l'autre n'ont pas fait l'objet d'un enseignement systématique.

Il est donc indispensable de ne pas sous-estimer cette étape d'enseignement systématique des outils et de leur fonctionnement, (tableaux en explicitant le rôle des différentes cases et des marges, arbres avec marges, renversement d'arbre...). En ce qui concerne les conversions entre tous les registres en jeu, langue naturelle, écritures symboliques, arbres, tableaux, il conviendra d'expliciter les passages d'un registre à l'autre, dans les deux sens. L'enseignant organisera des variations de situation dans chaque registre pour faire analyser les variations concomittantes dans les autres registres.

Les diverses conversions et les traitements dans les registres fournissent des représentations qui sont des outils de résolution de problème. Certaines représentations sont des outils transitoires dans l'acquisition des concepts et ne doivent pas devenir des buts de l'enseignement. Dans une situation de résolution de problème, une représentation intermédiaire utile peut parfaitement ne plus être explicitée par l'élève alors qu'elle a été pour lui une aide fondamentale à la conceptualisation.

Ainsi la coordination des registres, la capacité de choisir les registres de représentation adaptés à une situation témoigne de la maîtrise du concept.

L'analyse en termes de registres, de congruence et de non congruence, de traitement, de conversion et d'articulation de registres, ouvre des perspectives pour améliorer notre compréhension des phénomènes et donc notre enseignement.

BIBLIOGRAPHIE

DUVAL Raymond (1988 a) : "Ecarts sémantiques et cohérence mathématique", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, Vol. 1, IREM de Strasbourg.

– (1988 b) : : "Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, Vol. 1, IREM de Strasbourg.

– (1993) : "Sémiosis et noésis", manuscrit communiqué par l'auteur (à paraître 1995).

GRAS Régis et TOTOHASINA André (1993) : "Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse de données : implication-similarité-corrélation", *Pré publication 93-05*, Institut de Recherche Mathématique de Rennes.

IREM de Strasbourg(1992) : "Enseigner les probabilités en classe de Première", Brochure de l'IREM de Strasbourg.

– (1994) : "Enseigner les probabilités en classe de Terminale", Brochure de l'IREM de Strasbourg.

MAURY Sylvette (1986) : "Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes", Thèse ès Sciences, Université des Sciences et Techniques de Languedoc, Montpellier.

MESQUITA Ana (1989) : "L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : éléments pour une typologie", Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

PARZYSZ Bernard (1990) : "Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste", *Bulletin de l'APMEP* n°372, pp. 47-52.

– (1993) : "Des statistiques aux probabilités Exploitons les arbres", *Repères-IREM* n°10, pp. 91-104.

TOTOHASINA André (1992) : "Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle", Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1.

– (1993) : "Réflexion sur une ingénierie didactique pour introduire le concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénient de l'arborescence", *Pré publication 93-06*, Institut de Recherche Mathématique de Rennes.

– (1994) : "L'introduction du concept de probabilité conditionnelle : avantages et inconvénient de l'arborescence", *Repères-IREM* n°15, pp.93-117.

Manuels cités :

ANTIBI André *et alii* (1992) : *Mathématiques Terminales C E*, Tome 2, Transmath, Nathan, Paris.

MARMORET Jean-Claude et VERLANT Bernard (1992) Terminales F, Dimathème, Didier, Paris.