REPERES - IREM . N° 22 - janvier 1996

« RESVERIES » D'UN ANCIEN

A quoi sert la géométrie quand on a soixante-quinze ans ?

Yves GENTILHOMME
Irem de Besançon

A mon ami Michel Henry

1. PRÉAMBULE

Oui ! A quoi peut servir la géométrie lorsqu'on a dépassé la borne des septante-cinq printemps ?

Qu'importe, dira-t-on, cette question n'a aucun impact sur l'économie du pays, sur le P.N.B., sur la résorption du chômage, sur le prix des carburants, sur le résultat des élections, sur la situation de la bourse, etc., etc., et, par ricochet, sur l'enseignement / apprentissage des mathématiques pour les générations montantes.

A cette évidence, j'objecterai par une non-évidence. Des épistémologues dignes de foi ont pu remarquer que, d'une part, les sciences (et, avec elles, l'humanité) ne progressent pas seulement en se laissant entraîner par des mobiles utilitaires et que, d'autre part, certaines situations singulières peuvent éclairer des situations qui le sont moins. Ergo : il n'est pas interdit de penser qu'il en sera de même en didactique des mathématiques, si science il y a.

Ceci posé, quelques enseignants cognito-didacticiens auront peut-être la curiosité de se demander quels fruits peut porter leur matière dans certaines situations singulières, lorsque, apparemment, elle ne sert plus à rien.

Encouragé par cette argumentation, j'ose prendre la parole et la plume devenue clavier, bien que, faute de sondages scientifiquement organisés, je sois réduit à ne proposer que mon modeste vécu, si "haïssable soit-il" (*dixit* Pascal).

1.1. Voici les faits

J'ai 75 ans et cette question me concerne. Elle concerne, peut-être, d'autres collègues retraités.

La géométrie me sert à lutter contre l'insomnie et l'ennui. Quand je m'éveille la nuit, je cherche à résoudre mentalement des problèmes de géométrie élémentaire (ou moins élémentaire). Parfois je découvre la solution (ce qui m'apporte satisfaction et apaisement), parfois je reste sur ma faim avec l'espoir de faire mieux la nuit prochaine. Quoi qu'il en soit, je m'endors sans être obligé de prendre des narcotiques et je me réveille de bonne humeur, sans nausées ni maux de tête.

Il est clair qu'un tel objectif didactique ne saurait être présenté devant aucune administration responsable. Il prête à sourire. D'ailleurs, les médications de confort personnel ne sont pas prises en considération par la Sécurité Sociale qui, en l'occurrence, a d'autres chats à fouetter que des septuagénaires insomniaques.

1.2. Problématique

Admettons que, par-delà l'idéologie pragmatique stricte, il n'est pas sans intérêt de poser une série de questions telles que : qu'est-ce qu'un mathématicien retraité et sommeilleux entend par résoudre mentalement un problème ? Comment s'y prend-il ? Quel genre de problèmes aborde-t-il ? Quelles difficultés rencontre-t-il ? Pourquoi éprouve-t-il du plaisir à le faire alors que l'Hexagonal moyen répugne à cette thérapeutique et préfère compter des moutons ? Enfin, comment en est-il arrivé là ?

Dans la mesure où ce témoignage aspire quand même à une certaine généralité, dans la suite de l'exposé, le "je", trop subjectif, sera remplacé par un "nous" collectif, voire par un "on" anonyme, qui noient la personne de l'énonciateur dans la neutralité équivoque d'une entité sociale virtuelle et indéfinie, comme c'est de règle dans les contributions qui se veulent objectives, sérieuses et scientifiques.

2. QU'EST-CE QUE RÉSOUDRE UN PROBLÈME ?

> Tout raisonnement mathématique, si compliqué soit-il, doit m'apparaître comme une chose unique ; je n'ai pas la sensation de l'avoir compris tant que je n'ai pas réussi à le saisir en une seule idée globale.
> Jacques HADAMARD, 1944, éd. fr.1959.

De toute évidence, c'est une vaste question épistémologique, métamathématique, à laquelle il serait présomptueux d'avancer même un début de réponse. Nous nous restreindrons à signifier uniquement ce que nous, dans les brumes de notre demi-sommeil, nous "ressentons" par résoudre un problème (1).

(1) En mathématiques, une tendance générale est d'identifier "résolution de problème" et "production d'un texte démonstratif". Cet acte social de nature "dialogique" (supposant un "je" et un "tu", extérieur social, en opposition au "je" intime) ne saurait être le fait d'un individu face à lui seul où, physiquement, le "je" (émetteur) et le "tu"(récepteur et arbitre) coïncident, tout en se dédoublant, par leurs fonctions. Paradoxalement, un certain "tu" semble coexister en "je". La production d'un texte démonstratif, oral ou écrit, devient inutile, le "message passe sans canal apparent". Faut-il imaginer un troisième larron, un "méta-je" qui observe la dialectique des deux premiers ?
Mais c'est là un vaste problème métaphysique qu'il nous est impossible même d'aborder.
Quoi qu'il en soit, en ce qui nous concerne, nous ressentons le processus démonstratif comme la recherche de l'ataraxie, d'un équilibre dialectique, d'une paix intérieure entre les trois larrons. Osons parler de **démonstration subjectivement valide**.

Ne disposant ni de papier, ni de quoi écrire, il ne peut être question de rédiger une démonstration en bonne et due forme. Bien plus, douillettement installé dans les bras de Morphée, il nous est difficile de parcourir pas à pas, avec toute la méticulosité souhaitable, le cheminement chancelant de notre "démonstration".

N'ayant pour interlocuteur que nous-même, nous n'avons pas à élaborer un discours démonstratif recevable par un quelconque destinataire.

Par résolution d'un problème, nous entendons, en termes imagés, la découverte d'une voie, ou, plutôt, d'un sentier, qui, à notre entendement, permettrait d'y parvenir avec rigueur si on voulait bien s'y appliquer.

Plus modestement encore, notre tentative se limite à la possibilité d'entrevoir et de parcourir, clopin-clopant, l'**enchaînement global** des étapes successives d'une démonstration, avec l'impression (sans plus) que, damant notre sentier, il serait possible de tracer une voie carrossable, mieux balisée, jusqu'à élaborer une démonstration conforme aux canons actuels du calcul des prédicats adopté par la communauté des mathématiciens bien pensants.

2.1. Créativité et technique démonstrative

A ce stade de notre réflexion sommeilleuse, il nous paraît que le damage relève davantage d'une technique démonstrative que de la créativité proprement dite. Nous avons l'impression, à tort ou à raison, qu'une fois installé devant un bureau, muni d'un crayon et de papier, nous serions en mesure de construire un texte, sinon dans le formalisme actuel, du moins tel qu'on l'exigeait de nous à l'époque où nous poursuivions nos études en taupe et à la Sorbonne lorsqu'elle abritait encore des enseignements supérieurs de mathématiques.

Cependant, un tel parachèvement ne nous tente guère et même nous ennuie. Aussi, une fois réveillé et éveillé, nous ne peaufinons pas notre rêverie. Tout au plus esquissons-nous, à l'occasion, quand nous avons des doutes, un rapide croquis qui, privilège de l'activité mathématique solitaire, suffit pour entraîner la conviction de son auteur. Mais c'est là une éventualité que nous examinerons à une autre occasion.

2.2. Compréhension en profondeur

En revanche, il est notoire que la compréhension en profondeur d'une démonstration ne saurait se contenter de la seule prise en compte de la bonne coordination logique des propositions élémentaires successives qui se suivent comme les wagons d'un train. La tâche du chercheur ne se limite pas à vérifier minutieusement, à la façon d'un cheminot, la correction de leurs accouplements. Un tel contrôle, nous semble-t-il, pourrait, à la rigueur, être effectué par un automate (mettant de ce fait au chômage quelques malheureux lampistes), mais il resterait, à notre su, incapable de fournir une appréciation globale subjective, certes, mais néanmoins précieuse.

2.3. Emergence systémique

Paradoxalement, il est essentiel (pour un roseau pensant), de posséder une supervision, sans doute relativement "vague", du processus démonstratif dans son entièreté et même au-delà, voire de situer la démonstration dans un certain "intertexte" mathématique non formalisable, statuant, entre autres, sur l'élégance, sur la valeur culturelle de la procédure.

En quelque sorte, ces épi-propriétés sont considérées comme des émergences systémiques (gestaltistes [(2)]), le terme *système* [(3)] étant pris dans un sens non-ensembliste, c'est-à-dire possédant des propriétés nouvelles qui ne sauraient être déduites à partir de ses constituants et des relations qu'ils entretiennent entre eux (comme c'est le cas du bon vieux sel de cuisine dont les vertus gustatives ne se déduisent pas de celles du chlore et du sodium).

Pour développer la métaphore du train, disons qu'il n'est pas sans intérêt de pouvoir, à partir d'une montgolfière, l'admirer filer à travers la campagne, au petit matin, par temps de brouillard, au grand dam des logiciens purs et durs.

Bien sûr, il ne faudrait pas suggérer aux étudiants de s'en tenir à notre flânerie heuristique, une fois découverte la sente prometteuse de notre première métaphore. Ce serait leur rendre un bien mauvais service. Une créativité efficiente, qui ne se réduit pas au "métabavardage", suppose pour le moins une virtualité technicienne. Or, la technique démonstrative aride, dispendieuse de temps et d'énergie, doit être étudiée, travaillée, avec beaucoup de persévérance, voire "accompagnée de pleurs et de grincements de dents", comme le préconisaient les pédagogues d'antan. Mais ces considérations relèvent d'un domaine de pensée étranger à notre actuel propos.

Le fait est que nous n'avons plus d'examen à passer et encore moins à apporter une contribution utile aux Mathématiques. Nous ne faisons pas partie de la cohorte prestigieuse des "inventeurs de théorèmes", tout au plus briguons-nous l'honneur de maintenir notre frêle radeau heuristique dans le sillage des "mathématiciens aux petits pieds (MPP)". Nous en reparlerons.

2.4. Conclusion provisoire

Ainsi, à la question : à quoi sert la géométrie lorsqu'on a 75 ans ? nous répondrons : la géométrie, abordée d'un point de vue égocentrique, possède la célèbre et délectable vertu dormitive de l'opium sans en avoir les inconvénients.

A titre de boni, une réflexion sur cette activité de raisonnement non standard peut, peut-être, apporter quelques timides lumières sur l'activité standard et, de ce fait, inciter les professeurs de mathématiques à une réflexion renouvelée sur l'appropriation de leur matière d'enseignement par des apprenants qui ont une perception du monde bien différente de la leur.

(2) *Grosso modo*, l'approche gestaltiste privilégie la perception de la forme globale d'un tout, plutôt qu'une justification par l'analyse des parties. Pour fixer les idées, un géomètre exercé perçoit d'un seul coup d'œil s'il a affaire à une ellipse (et non, par exemple, à un ovale de Cassini), sans avoir à faire appel aux propriétés de sa définition, ce qui ne le dispense pas d'une démonstration en bonne et due forme pour justifier sa perception auprès d'un interlocuteur.

(3) Le terme *système* admet de multiples acceptions selon les points de vue adoptés. Nous retenons ici celle des théoriciens de la systémique qui, d'une certaine façon, s'oppose à celle de l'École Bourbakiste. Ainsi, par exemple, les parties ne sont pas connues *a priori*, mais sont déterminées *a posteriori* de façon à créer une certaine cohérence globale. Bien plus, comme précisé ci-dessus, le tout possède une identité et peut avoir des propriétés non déductibles de ses constituants.

3. CES "PROBLÈMES DÉLECTABLES"

Essayons de préciser le contenu que nous accordons au syntagme (4) nominal *problème délectable*.

Quelles questions se poser entre minuit et six heures du matin ?

Si l'on est à court d'idées, on a toujours la ressource de chercher à retrouver certaines propositions rencontrées au cours de sa scolarité et dont la démonstration s'est plus ou moins effacée de la mémoire consciente.

(Re)démontrer les propriétés de la droite et du cercle du géant Euler (fig. 1).

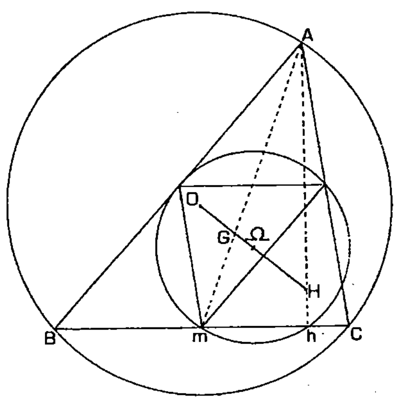

Fig. 1 : droite et cercle d'Euler, la division O, Ω, G, H est harmonique.

(Re)démontrer qu'un cercle bitangent à deux cercles donnés (fig. 2) reste invariant dans l'inversion (5) qui fait correspondre ces deux cercles (l'inversion est un trésor richissime).

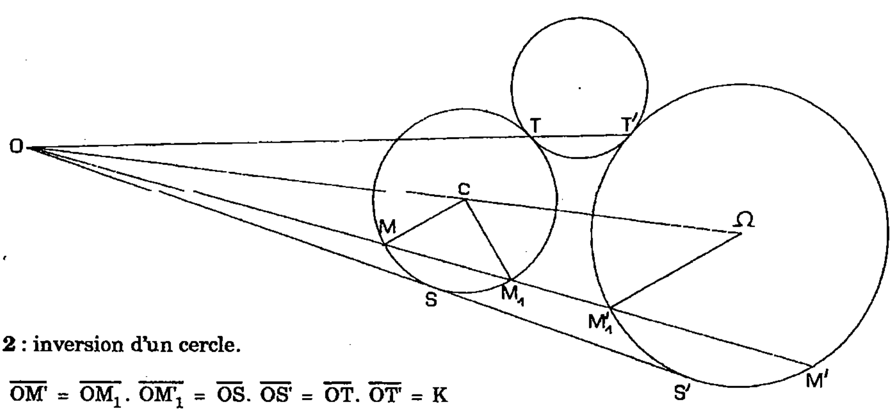

Fig. 2 : inversion d'un cercle.

$\overline{OM} . \overline{OM'} = \overline{OM_1} . \overline{OM'_1} = \overline{OS} . \overline{OS'} = \overline{OT} . \overline{OT'} = K$

(4) Par syntagme, nous entendons, d'une façon générale, une unité linguistique complexe de fonctionnement (formée de plusieurs mots) considérée du point de vue d'un système grammatical phrastique convenu. Ainsi le couple *problème délectable* peut avoir des fonctions diverses (sujet, complément) à l'intérieur d'une phrase, tout comme l'unité simple mot.

(5) L'inversion est une transformation ponctuelle in-

(Re)démontrer que les trois autres couples de rayons de deux faisceaux de droites ayant un rayon commun et de même rapport anharmonique (6), se coupent en trois points alignés (fig. 3). Etc...

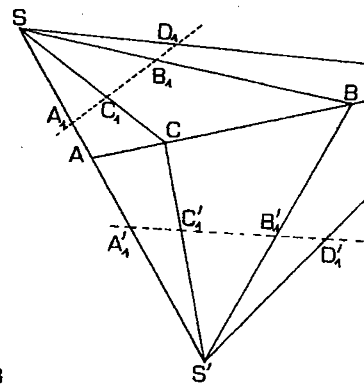

Fig. 3 : deux faisceaux de droites S' ABCD de même birapport, $[A_1 B_1 C_1 D_1] = [A B C D] = [A'_1 B$

On peut aussi, sous la douce lumière d'une lampe de chevet, parcourir en diagonale (sans les lire) les rubriques d'un dictionnaire de mathématiques comme celui rédigé sous la direction de feu François le Lionnais. On y glane d'intéressantes suggestions : *cercle orthotomique, cercle orthoptique, triangle pédal, triangle podaire...* autant d'embarcadères pour se lancer dans d'aventureuses excursions.

Cependant, il est excitant d'imaginer soi-même ses problèmes.

3.1. Ces bonnes vieilles constructions

La construction avec la règle et le compas constitue une caverne d'Ali Baba pour qui connaît le mot de passe.

Rien que la construction d'un triangle dont on donne trois éléments fournit une galaxie de problèmes. Parfois on trouve, parfois on sèche une nuit, deux nuits sur la même construction ; puis subitement, sans raison apparente, l'illumination arrive (ou n'arrive jamais).

La solution saute, pour ainsi dire, aux yeux si l'on se donne, par exemple, les trois médianes.

(Il faudrait dire : *les longueurs des trois médianes*, mais dans le demi-sommeil, cette subtilité langagière ne s'impose pas, on se comprend à demi-mot et même, souvent, sans mots du tout. Aussi usons-nous plus

volutive qui, étant donné un pôle fixe O et un réel k, associe à tout point M le point M' de la droite (OM) tel que : $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$.
L'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle. L'image d'une droite est un cercle passant par O et vice versa. L'inversion conserve les angles et, notamment, le contact entre courbes tangentes.
L'inversion est une transformation merveilleuse pour qui a le privilège de savoir s'en délecter.

(6) Étant donnés quatre points alignés A, B, C et D, on appelle rapport anharmonique ou birapport de ces quatre points pris dans cet ordre, l'expression $\overline{CA} / \overline{CB} : \overline{DA} / \overline{DB}$, notée en abrégé [A B C D]. Le birapport se conserve dans une projection. Le birapport d'un faisceau de quatre droites concourantes du plan est le birapport de leurs quatre points d'intersection avec une sécante quelconque. Si [A B C D] = –1 le birapport devient harmonique.

que de raison d'un idiolecte jargonneux qui n'acquiert de contenu univoque que dans la situation de notre monologue nocturne. Conservons donc pour la suite ce raccourci-abus de langage, confondons l'objet géométrique et sa longueur).

La donnée de la hauteur, de la bissectrice et de la médiane (*i.e.* les longueurs d'icelles) issues d'un même sommet, demande un grain de sénevé d'astuce (selon le mot de Dieudonné qui l'a prononcé, d'ailleurs, en citant de géniaux Inventeurs de Théorèmes).

La connaissance du cercle circonscrit au triangle, d'un côté et de la bissectrice du sommet (fig. 4) opposé incite à "coincer" un segment entre droite et cercle (c'est mal dit, mais qu'importe, les puristes ne nous entendent pas).

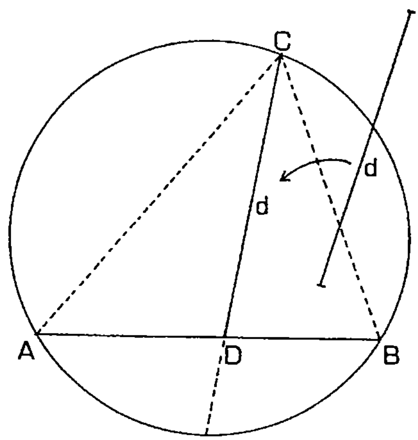

Fig. 4 : "coincer" la bissectrice d en droite (AB) et le cercle circonscrit.

Cette opération invite à penser aux conchoïdes [7] (fig. 5, 6 et 6') et aux astroïdes [8] (fig. 7). Mais est-ce vraiment indispensable ? Ne pourrait-on pas s'en passer ? On sèche.

(7) Une conchoïde d'une courbe (C) est le lieu des points N et N' d'une droite pivotant autour d'un point fixe O, coupant (C) en M de façon que les segments NM et N'M soient longueurs égales et constantes. Cette courbe prend des formes diverses, rappelant, plus ou moins, celle d'une conque et porte des noms prestigieux : *Conchoïde de Nicomède* (si (C) est une droite, fig. 5), *Limaçon de Pascal* (si (C) est un cercle, fig. 6). Pour des valeurs particulières des paramètres, elle ressemble à un cœur – c'est la courbe, par excellence, des mathématiciens amoureux qui se font des confidences codées – et s'appelle cardioïde ; son équation polaire, $r = 2R\,(1 + \cos u)$, peut devenir synonyme de *je t'aime* (fig. 6'). La rencontre avec ces "sinuosités remarquables" reste un événement marquant dans la vie du matheux-potache sensible non seulement à l'utilité ou à la rigueur, mais aussi au charme des formes mathématiques ondoyantes, et peut même décider de sa vocation future.

(8) Une astroïde peut être définie comme une hypocycloïde à quatre points de rebroussement, engendrée par un point d'un cercle de rayon R /4 roulant intérieurement sans glisser sur un cercle de rayon R ou, encore, comme enveloppe d'un segment de droite de longueur constante dont les extrémités décrivent les axes d'un repère généralement orthonormé. Par sa forme d'as de carreau, elle rappelle une étoile très effilée. C'est une courbe d'une extrême élégance qui ne laisse pas indifférent le matheux-potache (et néanmoins esthète) qui la rencontre au cours de ses études. Tel a été notre cas.

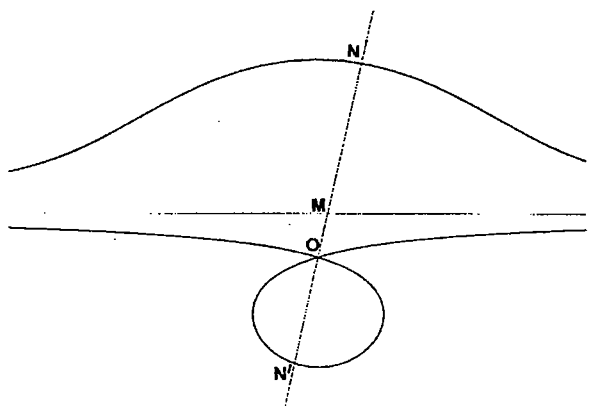

Fig. 5 : conchoïde de Nicomède, MN = MN' = C^{te}, "le charme des sinuosités".

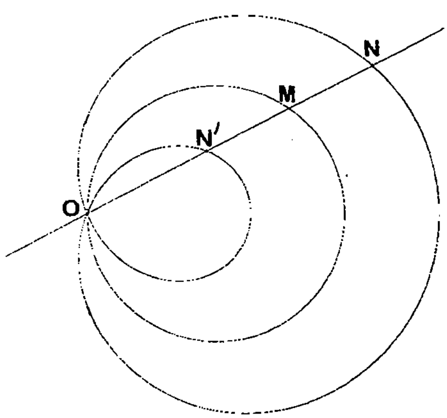

Fig. 6 : limaçon de Pascal

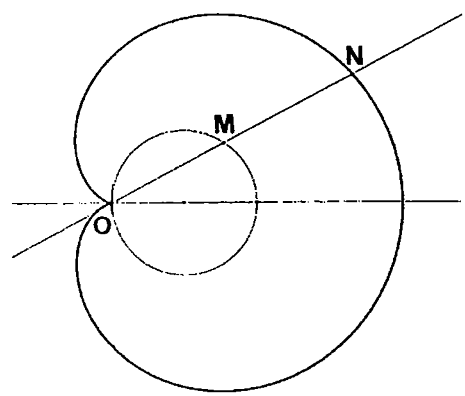

Fig. 6' : cardioïde, un joli cœur bien qu'un peu rondouillard

3.2. A l'école buissonnière

Chemin faisant, on fait l'école buissonnière, on flâne, on emprunte des chemins de traverse, on se perd dans des digressions, on rumine des souvenirs, on "ouvre des parenthèses"...

Peut-on trouver l'intersection d'une droite et d'une conchoïde ? On s'égare de plus en plus. Comment construire une tangente à une conchoïde ? Comment tracer une tangente passant, par un point donné, à une astroïde ? On se fait la main sur des cas particuliers où la construction s'avère accessible.

Comment construire le point courant d'une astroïde définie tangentiellement (fig. 7), comme enveloppe d'un segment qui prend appui sur deux rampes (9) (traduire en langage académique : *deux axes)* ?

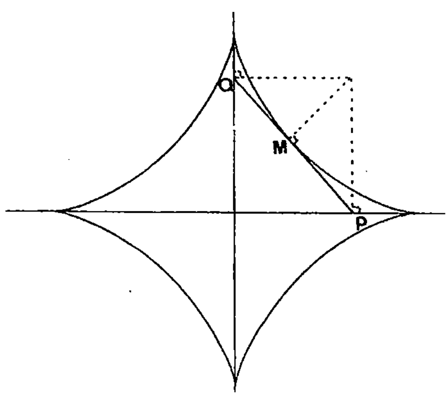

Fig. 7 : la belle astroïde, PQ = C^{te}.

Par stratégie ludique, on s'interdit les moyens analytiques que, d'ailleurs, on serait incapable de mettre en œuvre la tête enfoncée dans l'oreiller. On veut s'en tenir à des procédés visuellement accessibles.

Sans doute nos profs, en taupe, nous ont montré la manière de s'y prendre, mais on ne s'en souvient pas, il faut "réinventer".

Il n'est pas interdit de tricher, puisque personne ne vous surveille. Pour mieux entrevoir la solution, on fait bouger, se déformer continûment les figures. On ne se restreint pas aux procédures logiques bon teint. On fait appel à des concepts intuitifs de la cinématique (inavouables en géométrie scolaire), comme le déplacement (banni par l'isométrie), le glissement plan sur plan avec le centre instantané de rotation si précieux.

On ferme rarement les parenthèses ouvertes. On s'endort avant.

3.3. Les "minimétadécouvertes"

3.3.1. Les ondines

Les problèmes de formulation langagière simple et élégante sont affriolants. Il convient de s'en méfier. Ils sont comme ces ondines des contes populaires russes qui vous attirent vers des marécages où l'on s'embourbe sans espoir d'en sortir.

Tout un chacun a entendu parler de célèbres conjectures dans la théorie des nombres qui font mystère à ce jour (tout nombre pair supérieur à quatre est...). Il existe des défis en géométrie qui ont demandé toute la puissance de pensée de créateurs géniaux non seulement de théorèmes, mais de puissantes théories, pour jeter quelque lumière sur leur "irrésolution" (penser à la trisection d'un angle, à la duplication d'un cube...).

(9) Penser au plaisir transgressif de descendre l'escalier à cheval sur la rampe, plaisir qui se trame dans l'inconscient psychanalytique de plus d'un écolier et qui se dénonce par des rêves ou par certaines expressions incongrues d'apparence anodine.
Il n'est pas certain que les mêmes associations d'idées se présentent à l'esprit du professeur, lequel aura tendance à taxer de "gamineries" (de "bruit" au sens de la théorie de l'information) les associations d'idées parasites qui ne contribuent pas au dénouement logique qu'il attend. Au contraire, nous pensons que ces "ingrédients" inutiles dans la perspective logique sont essentiels pour l'assimilation humaine de la démonstration. Cette prise de position a été développée dans notre article « Les lubrifiants didactiques », publié en 1990 dans *Recherches en linguistique étrangère*, XIV, pp. 25-91, Annales Littéraires de l'Univ. de Besançon, U.F.R. Lettres.

Il n'est pas exclu qu'au modeste niveau des mathématiciens aux tout petits pieds (µMPP), il est des énigmes qu'ils ne résoudront jamais. Tel est bien notre cas. Certaines formulations d'apparence prometteuse restent pour nous inviolables, même en plusieurs nuits.

Construire un triangle avec la donne du cercle inscrit et de deux autres éléments (par exemple deux côtés), on se trouve trop souvent Gros-Jean comme devant.

Construire, point par point, la courbe lieu des points dont la somme des distances à trois points (quatre, cinq...) fixes est constante (généralisation de l'ellipse). On reste coi.

Pour les conchoïdes, les cycloïdes [10], certaines développantes [11] (fig. 8)... on imagine aisément des systèmes mécaniques susceptibles de les tracer (construits par exemple avec du meccano). En existe-t-il pour cette famille de courbes cousines germaines des ellipses ? Même le "truc" de la ficelle ne marche pas bien (à cause du frottement excessif, fig. 9).

3.3.2. Les feux follets

Les feux follets vous donnent l'impression de vous orienter vers une piste, puis, réflexion faite, on s'aperçoit qu'on était bien sot de s'y fier. Les feux follets se sont ri de vous.

Soit à construire un triangle dont on fixe, en position, la droite d'Euler avec sa division harmonique (centres du cercle circonscrit et

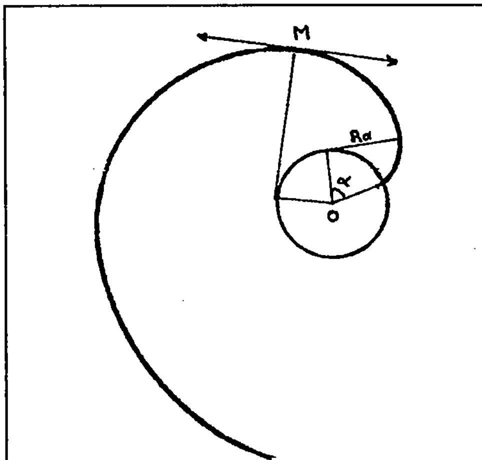

Fig. 8 : développante de cercle, le fil se déroule.

du cercle des neufs points, de l'orthocentre et du centre de gravité, fig. 1). Surprise ! La connaissance des quatre points les plus remarquables, s'il en est, ne permet même pas

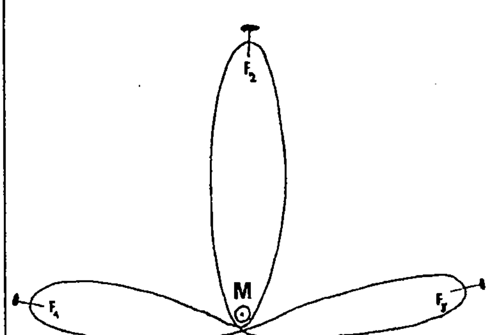

Fig. 9 : dispositif avec clous, ficelle et crayon pour dessiner la cousine de l'ellipse à 3 foyers : $MF_1+MF_2+MF_3 = Cte$

(10) Les cycloïdes (ou trochoïdes) forment une famille de courbes engendrées par un point du plan d'un cercle qui roule sans glisser sur une courbe, généralement une droite ou un autre cercle. Ainsi, la valve d'une chambre à air de bicyclette décrit une cycloïde particulière.

(11) Si l'on imagine un fil enroulé autour d'un cercle, l'extrémité du fil décrit, lorsqu'il se déroule tout en restant tendu, une développante de cercle. La même procédure peut être étendue à une courbe quelconque.

de déterminer la forme du triangle. Après tout c'est logique, le nombre de paramètres n'y était pas. La division harmonique n'était pas quelconque. On se trouve tout bête de n'y avoir pas pensé plus tôt. Les feux follets de la nuit nous ont engagé sur une fausse piste.

Autres errements. Soit à inscrire un carré dans un rectangle. On sèche. En prenant le problème à l'envers – circonscrire un rectangle à un carré –, il devient évident que ce rectangle ne saurait être qu'un carré. Tout s'éclaire. C'était un faux départ.

En classe de géométrie, on ne nous posait jamais de problèmes sans solution, ni de problèmes indéterminés. Curieux ! Nos professeurs étaient sans doute des gens trop sérieux pour se livrer à de telles espiègleries (sauf dans la discussion de la résolution de l'équation du premier degré où ces anomalies s'apparentaient au "pont aux ânes").

On tente de généraliser l'énoncé : inscrire un carré dans un parallélogramme (on s'en sort, fig. 10 : le parallélogramme et le carré ont le même centre), dans un trapèze, dans un quadrilatère quelconque, on baisse pavillon. On suspecte les ondines. Sont-ce de vraies ondines ou, bêtement, une situation anodine ?

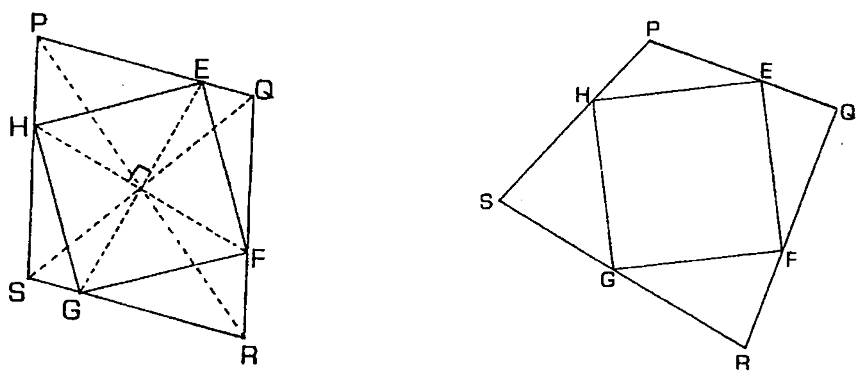

Fig. 10 : inscrire un carré dans un parallélogramme ? et dans un quadrilatère quelconque ?

3.3.3. Où la mémoire joue des tours

La mémoire peut jouer de vilains tours. On se souvient d'une propriété insignifiante qu'on a rencontrée il y a plus d'un demi-siècle et on oublie celle qu'on a mise en évidence à grand peine la veille. Pourquoi ?

Saint Antoine de Padoue qui a la gentillesse de vous aider à retrouver un objet perdu (en l'occurrence la démonstration égarée depuis peu) n'y peut rien. Dommage.

Ainsi, par exemple, on a découvert (ou on croit avoir découvert) une solution assez tarabiscotée pour construire un quadrangle inscriptible dont on connaît la longueur des côtés (fig. 11). Quelques nuits plus tard, impossible de la retrouver. Dommage. A-t-on rêvé ?

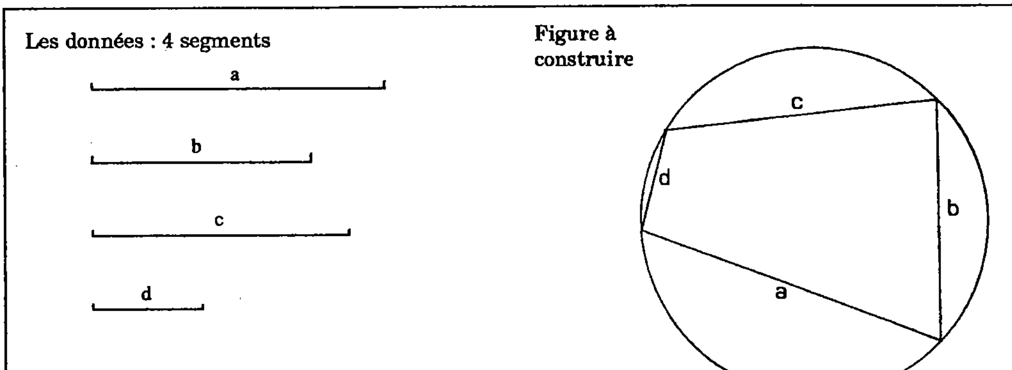

Fig. 11 : "l'édifice", le quadrilatère inscriptible

Parfois on n'oublie qu'à moitié. Un peu de réflexion et hop ! l'anguille est de nouveau dans le filet. Le déclic semble résulter de l'existence d'un fil conducteur, d'une idée générale qui surnage au dessus du tarabiscotage.

3.3.4. Les petites vexations

Il arrive que l'on peine sur quelque problème.

> Par exemple sur celui du billard quadrangulaire. On s'escrime avec des produits de symétries sans arriver à fermer le quadrilatère inscrit (fig. 12).

Pas moyen d'aboutir à un résultat qui nous donne satisfaction, c'est-à-dire avec l'impression (subjective) d'avoir résolu le problème, si bien qu'il n'y a pas lieu de chercher davantage. Puis, un beau jour, on tombe sur une résolution élégante, complète, faite par un géomètre de talent (Marcel BERGER, *Géométrie 2*, Paris, CEDIC/Fernand Nathan,1990).

On ressent un petit pincement à la fierté. On est passé à côté. Il faut assumer de n'être qu'un μMPP...

3.4. Problèmes "fermés" / problèmes "ouverts"

Dans un cas on sait (on suppute) ce que l'on veut trouver. Montrer que tels points sont alignés, que telles droites sont concou-

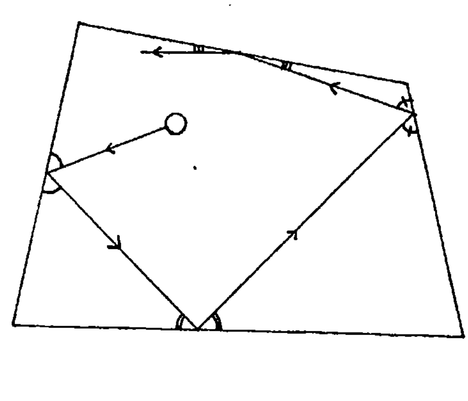

Fig. 12 : billard quadrangulaire. Trajectoire d'une boule.

Les points de Gergonne (12) d'un triangle ont-ils des propriétés intéressantes ?

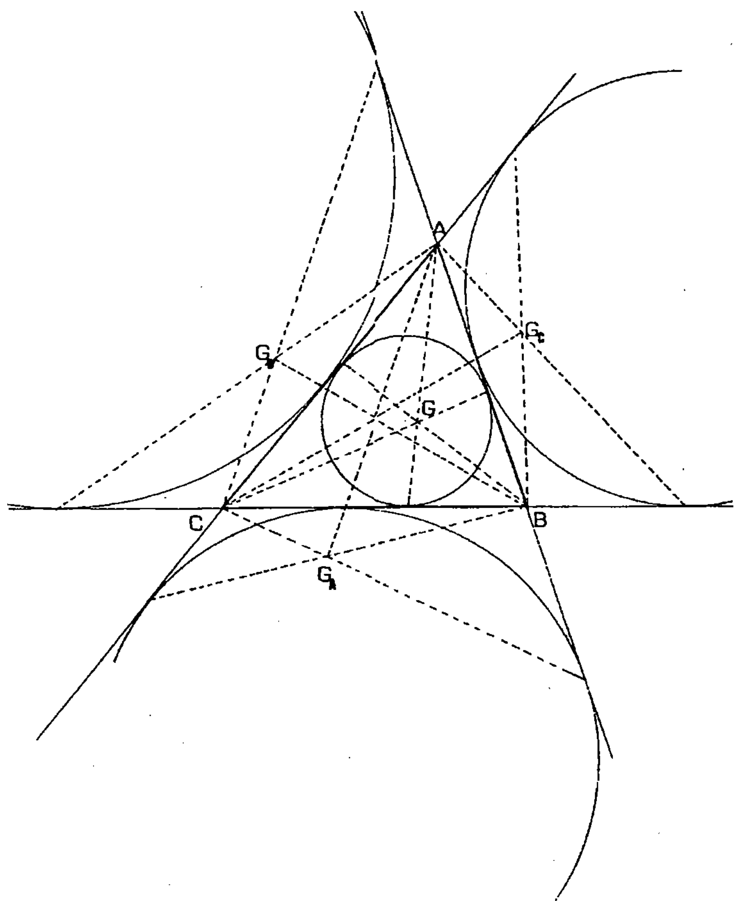

Fig. 13 : points de Gergonne

rantes, construire la tangente à une certaine courbe, s'assurer qu'un tel lieu est une ellipse, etc.

Dans l'autre cas on ignore ce que l'on veut trouver et même s'il y a quelque chose à trouver.

(12) Les céviennes d'un triangle (droites issues des sommets), passant par les points de contact du cercle inscrit, concourent au point de Gergonne. Construction similaire pour les cercles exinscrits, d'où quatre points de Gergonne.

Explorer les inverses (13) des points remarquables connus d'un triangle, ainsi que leurs polaires (14) respectives par rapport au triangle (fig. 14), aux cercles inscrit et circonscrits. Y a-t-il quelque chose de "valable" à retenir ?

On y va à tâtons et l'on revient bredouille plus souvent qu'on ne le craint. Les perles s'avèrent rares pour les µMPP qui sont de piètres plongeurs.

Dans la pratique, la partition binaire (ouvert / fermé) reste floue. Tel est souvent le cas lorsqu'on cherche à généraliser certains théorèmes.

Ainsi, peut-on extrapoler les théorèmes de Céva ou de Ménélaüs en les adaptant à un quadrilatère, à un polygone quelconque ?

Problèmes fermés, ouverts, semi-fermés, semi-ouverts ?

On pense bien qu'il faut chercher des droites concourantes et des points alignés, mais de telles droites ou de tels points existent-ils ? Aboutit-on à un résultat digne d'être énoncé ?

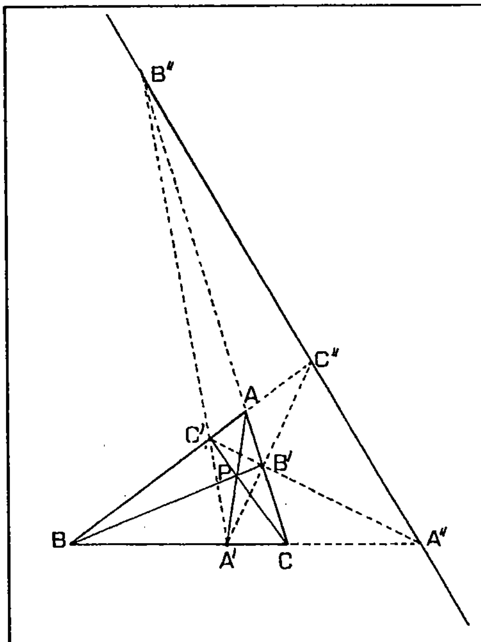

Fig. 14 : "polaire" de P par rapport au triangle ABC
[B C A'A"] = [C A B' B"] = [B A C' C"] = –1

Comment étendre à l'espace un problème connu dans le plan ?

(13) Soient x, y et z les "distances relatives" d'un point M aux côtés du triangle ABC et x', y' et z' celles du point M' inverse de M, on a xx' = yy' = zz'. On montre aisément que les céviennes de M' sont symétriques des céviennes de M par rapport aux bissectrices intérieures de ABC. Le centre du cercle inscrit est son propre inverse. L'inverse de l'orthocentre est le centre du cercle circonscrit. L'inverse du centre de gravité, point de concours des symédianes, est appelé point de Lemoine. Bref ! Il y a mille et une surprises à savourer.

(14) La polaire d'un point M par rapport à une conique (en particulier par rapport à un cercle ou à deux droites comme conique dégénérée) est la droite, lieu des conjugués de M par rapport à cette conique, i.e. le lieu des points M' tels que toute sécante passant par M et coupant la conique en P et Q détermine une division harmonique, [P M Q M'] = –1 (*cf.* note 6).
Le développement de la théorie des pôles et polaires a permis d'établir le méta-théorème "époustouflant", osons-nous dire : si un théorème ne comprend que les termes *point* et *droite* (ou leurs équivalents linguistiques), on obtient un autre théorème en remplaçant les mots *point* par *droite* et *droite* par *point* (avec des ajustements linguistiques et certaines précautions mathématiques, cela s'entend). Il y a de quoi rêver.
Par abus de langage, on appelle quelquefois polaire d'un point M par rapport à un triangle ABC (fig. 14) la droite passant par les conjugués harmoniques des pieds des céviennes AM, BM et CM pris sur les côtés respectifs (voir, à ce propos, les théorèmes de Ménélaüs et de Céva).

Le quadruple orthocentrique (trois sommets d'un triangle plus l'orthocentre) possède de multiples propriétés plus remarquables les unes que les autres. Qu'en est-il du "quintuple orthocentrique" (sommets d'un tétraèdre orthocentrique – ses hauteurs sont concourantes – plus l'orthocentre) ?

3.5. Priorité au plaisir

La liste des problèmes "délectables" relève, apparemment, de l'infini dénombrable, bien que certains le soient moins que d'autres.

Il est patent que la recherche de problèmes et de leur résolution donne lieu à des cogitations que des professionnels de la chose trouveraient sans doute naïves, obsolètes, superfétatoires. Mais ils ne sont pas là pour arborer leur "certain sourire". On est entre soi et soi, on s'adonne au remue-méninges pour le plaisir, sans souci du "qu'en dira-t-on".

Pour mieux illustrer notre propos, citons la construction avec la règle et le compas d'un cercle tangent à trois cercles donnés. C'est là un vieux problème appelé parfois problème d'Apolonius. On pourrait en trouver une solution complète et élégante dans des traités comme celui d'Eugène ROUCHE et de son collègue Charles COMBEROUSSE (à l'époque, les grands Maîtres écrivaient des traités ; on n'ose plus maintenant, ce serait contrevenir à la "modestie universitaire", et puis cela ferait rétro).

Rationnellement parlant, à quoi sert de résoudre maladroitement un problème qui a déjà été magistralement résolu ? Argumenter de la sorte, c'est se placer délibérément à côté de la plaque. Le plaisir n'est pas de prendre connaissance d'une solution toute faite, mais d'en découvrir une soi-même, si minable soit-elle. C'est un peu comme si l'on se posait la question : à quoi sert de goûter un vin, puisque des goûteurs de cru l'ont fait avant vous et l'ont décrit dans leur fleuri et hermétique jargon ?

3.6. De fil en aiguille

Bien entendu, dès l'abord (quand on est un µMPP), on ne conçoit pas, comme il se devrait, un problème dans toute sa généralité. Ainsi, il est plus intuitif de se représenter au départ des cercles extérieurs les uns aux autres (*Cf.* le paragraphe 4.3.1. ci-dessous : les figures prototypiques).

On peut aussi, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, chercher à limiter les techniques d'investigation (en sport, dans les médias on parlerait de *challenge*).

Peut-on se passer de la dilatation des cercles permettant de réduire à un point le plus petit des trois cercles donnés, donc de construire un cercle passant par un point et tangent à deux cercles seulement ?

Au gré de la fantaisie, on explore d'autres situations. Il existe des cas particuliers où l'inversion (*cf.* note 5) permet sinon de se tirer d'affaire, du moins de "simplifier" le problème. Avis aux amateurs éclairés.

Si, par exemple, deux cercles se coupent, une inversion les transforme en deux droites. D'où un autre problème apparemment plus simple.

Si, d'aventure, les trois cercles passent par un même point, on a vite fait de se ramener à la figure classique des cercles inscrit et exinscrits dans un triangle.

Le miracle de l'inversion

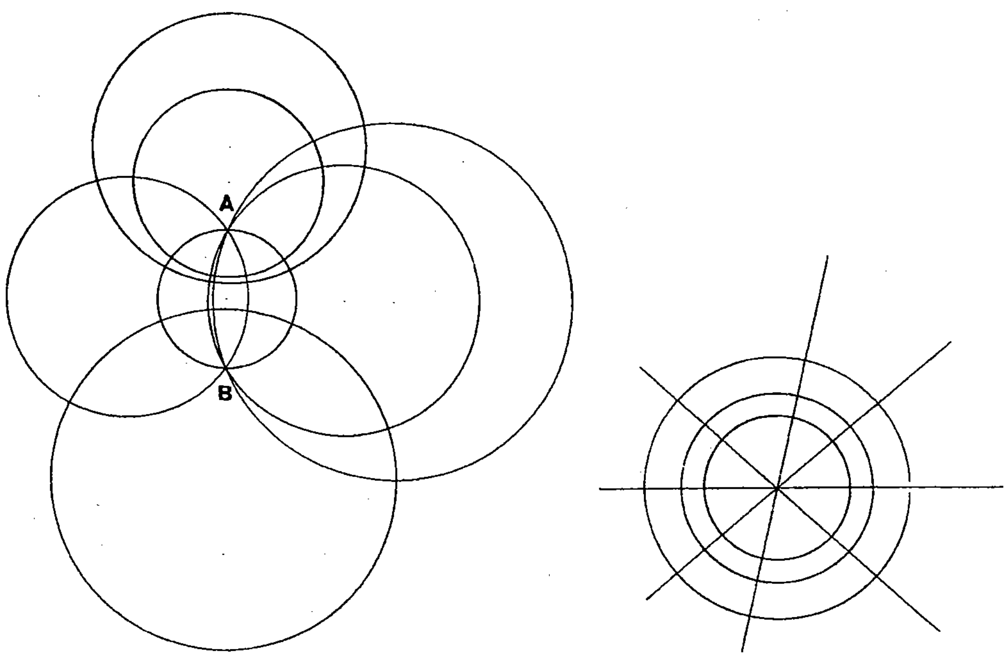

Fig. 15 : faisceaux de cercles orthogonaux — Transformée par inversion de pôles A ou B

L'impossibilité devient évidente, il n'y a plus rien à démontrer

Mais que se passe-t-il, si les trois cercles appartiennent à un faisceau à points de base [15] ou, au contraire, à points de Poncelet [16], une inversion bienvenue les transforme soit en droites concourantes, soit en cercles concentriques (fig. 15). Et alors ?

Faut-il se mettre en quête d'une discussion générale ? On patauge.

(15) Ensemble de cercles passant par deux points fixes.

(16) Ensemble de cercles dont les centres sont alignés et orthogonaux à un cercle donné.
Les points de base d'un faisceau sont les points de Poncelet du faisceau orthogonal et vice versa.

C'est là une recherche d'un type nouveau : imaginer la stratégie qui permette à meilleur compte de répertorier et de traiter tous les cas de figure.

Comme on voit, les problèmes s'enchaînent les uns aux autres, à la façon des spaghetti au parmesan, un spaghetto en entraînant d'autres, sauf qu'on n'arrive jamais à faire une bouchée du plat entier trop copieux.

Bien plus, on a l'embarras du choix. Parmi les spaghetti excellents qui vous arrivent aux lèvres, lesquels consommer le jour même, lesquels mettre au frigo pour la nuit prochaine, lesquels jeter aux chats ? Notons, incidemment, que, contrairement aux spaghetti (*al dente*, comme le veulent les Italiens), le fait de "réchauffer" un problème peut le rendre encore plus digeste et plus savoureux. La métaphore des spaghetti était donc mauvaise, mais, bien que volant très bas, elle paraît amusante. Doit-on éliminer d'une démonstration toute trace de bonne humeur ? Est-ce le prix à payer pour obtenir la rigueur ? Doit-on se corseter au plus serré [17] ?

3.7. Point de vue terre-à-terre du dessinateur

La démarche heuristique, pour trouver une construction, fait intervenir plusieurs opérations (transformations, appel à des problèmes dont la solution est déjà connue). Comment réaliser une synthèse optimale ?

Comment, par exemple, réduire au maximum le nombre d'opérations élémentaires à effectuer pour réaliser une construction ? Le souci d'élégance oblige.

Selon que l'on ne dispose que de la règle et du compas ou que l'on peut se munir en plus d'une équerre, d'un pantographe, d'une ficelle... la solution la plus simple ne sera pas obligatoirement la même. Peut-on faire fi du matériel disponible ?

Ci-dessus, nous avons évoqué la construction d'un cercle C tangent à trois cercles donnés C_1, C_2 et C_3 qui pouvait se faire en plusieurs étapes :

1) Dilatation du cercle cherché C en C', jusqu'à réduire le plus petit des trois cercles C_1 à un point A et les deux autres en C'_2 et C'_3.

2) Inversion qui associe les deux cercles réduits en laissant globalement invariant le cercle bitangent C' cherché, lequel se doit de passer par l'inverse A' de A.

3) On aboutit au problème classique : construire un cercle passant par deux points et tangent à un cercle donné (un des deux cercles C'_2 ou C'_3)

4) Réduction inverse de la dilatation initiale pour restaurer C_1, C_2 et C_3.

Tout cela, c'est de la théorie, dira le dessinateur. Comment dois-je, moi, opérer avec ma règle, mon compas, mon équerre, mon tire-ligne (mon stylo) ? Certes, je peux reprendre une à une les quatre étapes, mais c'est long et il y aura beaucoup d'approximations. Je risque de cafouiller. Comment simplifier au maximum mon boulot ?

Jadis, l'ingénieur Lemoine a proposé de définir la simplicité d'une construction par le nombre de démarches élémentaires à effectuer. Les promoteurs de la Géométrie du compas prétendaient même que, pour certaines constructions, il était plus rentable d'abandonner la règle. Sauf qu'on arrivait difficilement à se faire une idée globale de la construction. Bref, on tombait de Charybde en Scylla.

Il faut reconnaître que, dans les conditions matérielles de notre recherche, ce problème dépasse le "microsystème" (voir

(17) Voir à ce propos : Yves Gentilhomme: « Les lubrifiants didactiques », cf. note 9.
Au cours de notre carrière, nous avons cru observer que les chercheurs scientifiques en phase de créativité n'hésitaient pas à plaisanter, du moins en catimini (pas devant des "bailleurs de fonds"). En revanche, lorsqu'ils n'avaient plus rien à dire, ils arboraient volontiers des manchettes et un faux col bien amidonnés, afin d'être pris au sérieux. Mais peut-être n'est ce là qu'une anamorphose de la réalité dans le miroir de notre propre idéologie.

ci-dessous) à notre portée de µMPP sommeilleux. Nous n'arrivons pas à "négocier" la synthèse des quatre étapes.

4. UN BRIN DE THÉORIE

Tout mathématicien de coeur, même aux tout petits pieds (µµMPP), ne peut s'empêcher, malgré son infirmité, de réfléchir à ce qu'il fait et à l'occasion de "métaphysiquer", comme s'il avait affaire à un problème de géométrie (ce en quoi, souvent, il se "plante", car, en l'occurrence, les axiomes se réduisent à une idéologie implicite). Nous n'échappons pas à ce travers. Que le lecteur en soit averti.

Ainsi que nous l'avons noté au début, la réflexion sur la pratique terre-à-terre d'"endormissement géométrique" peut amener à des pensées plus nobles, partagées, c'est certain, par de nombreux profs de math, telles que : que faut-il entendre par élégance d'une démonstration ? par langage intérieur ? comment construit-on dans son esprit les figures sur lesquelles on raisonne ? qu'est-ce qu'une figure prototypique ? qu'est-ce qu'un microsystème géométrique ? etc.

4.1. Les élégantes

Existe-t-il des solutions plus élégantes que celle qu'on a trouvée ? Qu'entend-on par *plus élégantes* ? Comment appréhender cette propriété émergente du système solution d'un problème ? Comment se mettre en quête de l'élégance convoitée ? Comment optimiser la solution ?

Autrefois, Georges BOULIGAND a donné un exemple percutant, en relation avec la mise en évidence de la causalité profonde (*La Causalité des théorèmes mathématiques*, Paris, Hermann, 1934).

Souvenons-nous que la démonstration du théorème de Pythagore a donné lieu à une pléthore de solutions plus ou moins intuitives ou sophistiquées, simples ou tarabiscotées.

Cependant, si l'on songe que le rapport de l'aire des figures semblables varie comme le carré de leur rapport de similitude et si l'on remplace les carrés construits sur les côtés et sur l'hypothénuse par les deux triangles formés à l'intérieur du triangle rectangle donné par la hauteur issue de son angle droit, la propriété des carrés devient évidente : il n'y a plus rien à démontrer (fig. 16). Le reste n'est plus qu'une affaire de mise au point technique.

La démonstration la plus élégante serait, paradoxalement, celle où "il n'y aurait plus rien à démontrer", pourvu que l'on sache jeter un certain coup d'œil (éventuellement génial) sur le problème posé.

Nous admettrons, sans démonstration, pour notre propre gouverne (qui ne coïncide pas nécessairement avec celle de tout mathématicien) qu'une démarche vraiment élégante est celle où il suffit de faire appel à une réflexion fondée sur des idées générales simples portant sur une vision globale ou différente de la figure.

D'où le corollaire : une telle démarche est plus élégante que celle qui exige une méticuleuse trituration des hypothèses (définition illusoire, car nous sommes incapables de définir rigoureusement ce qu'est une trituration).

Quelles que soient les objections mineures et majeures que l'on puisse nous opposer, nous maintenons que cette conception s'accorde de façon satisfaisante

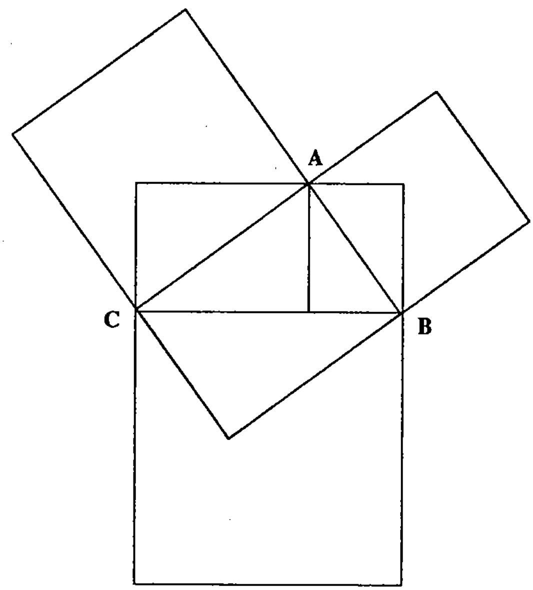

Fig. 16 : théorème de Pythagore, les carrés sont remplacés par des triangles semblables à ABC.

avec nos contraintes situationnelles nocturnes.

Autre exemple. Soit à construire un triangle dont on donne les trois hauteurs. Par une construction relevant du b a ba géométrique on obtient leurs inverses proportionnelles aux côtés du triangle cherché, puisque le produit d'une hauteur par le côté opposé est constant. Une homothétie, et le tour est joué.

Il semble plus amusant (élégant ?) de construire les inverses comme hauteurs d'un nouveau triangle dont les côtés sont les hauteurs données, car on ne sort pas du champ conceptuel du triangle et des hauteurs (économie de moyens ?). Ce n'est pas un argument suffisant, nous dira-t-on. Qu'importe, nous le ressentons ainsi. C'est notre fantaisie.

Comment, en ces circonstances, justifier l'élégance par la seule causalité profonde ? Une cause unique universelle ne suffit pas. Quel serait alors le "faisceau causal" de l'élégance ?

Bien plus. La construction considérée doit être discutée en tenant compte des "relations d'inégalité triangulaires" imposant (ou semblant imposer) des limites plus ou moins étroites à ces constructions. Qu'en est-il au juste ? Autre problème adventice qui égratigne le principe d'élégance que nous avons imprudemment fait nôtre.

Il s'ensuit un questionnement plus large. Une démonstration est-elle élégante en soi ou l'élégance dépend-elle du contexte plus ou moins large où elle trouve sa place, voire de l'intertexte mathématique ?

Existe-t-il un principe universel d'élégance ou plusieurs principes en concurrence ?

Une fois de plus, nous nous endormons sans avoir trouvé la "vraie réponse".

4.2. Sur le langage intérieur

> Je crois qu'il y a plus de choses dans ma tête que ce que les mots peuvent dire. Il m'arrive de chercher mes mots, parce qu'il y a quelque chose en moi que je veux dire avec le plus de justesse possible. [...] C'est pour moi une réalité d'expérience.
> Jacques ARSAC, 1975, p. 230.

Il nous paraît évident que l'expression langagière explicitant pour un interlocuteur la démarche démonstrative est bien plus longue que la réflexion intime qui la sous-tendait à l'origine. En quelque sorte, le canal de transmission, avec les bruits parasites qu'il peut introduire, est court-circuité, le message démonstratif à l'émission coïncide avec celui à la réception et cela sans omission ni distorsion (*cf.* note 1). C'est pourquoi, contrairement à la communication dialogique usuelle, les non-dits et les divers raccourcis ne créent pas de malentendus. La pensée se satisfait de mots et de syntagmes (*cf.* note 4) sémantiquement flous, mal formulés, mais subjectivement monosémiques dans la réalité sommeilleuse vécue (18).

Nous avons déjà signalé que l'usage de lettres, jouant un rôle identificatoire ou anaphorique (19), est bien souvent superfétatoire.

Qu'importe si l'orthocentre figure sous le nom de H, de I... (on peut y faire passer tout l'alphabet latin, grec et même hébreux), voire sous celui de *Joséphine* ou de *Cunégonde* (pour reprendre une plaisanterie que Henri LEBESGUE aimait faire à ses étudiants, selon le témoignage de sa fidèle assistante Lucienne FÉLIX. Les grands de ce monde peuvent se permettre des jeux de mots et de symboles interdits aux MPP).

Si l'on fixe son attention sur l'orthocentre, il est là, devant vous, au centre de votre pensée. A quoi bon lui donner un sobriquet, littéral ou nominal ?

Un semblant de dénomination apparaît lorsqu'il y a plusieurs points en jeu et qu'il importe de distinguer divers éléments les

(18) Autrement dit, le sujet donne un sens unique à ce qui paraîtrait vague ou ambigu à un interlocuteur. Pour la bonne bouche, donnons un exemple linguistique. Soit l'énoncé considéré hors contexte : *les jumelles de l'opticien grossissent à vue d'œil.* Deux interprétations au moins sont concevables. L'une souligne l'importance du grossissement de l'appareil d'optique constitué par les jumelles ; l'autre insinue que les deux petites filles jumelles mangent trop de pâtisseries. La personne qui formule ce jugement en son for intérieur sait bien de quoi il s'agit. Il n'y a pas d'équivoque pour elle. Si elle le prononce pour un tiers non informé de la situation vécue, l'énoncé devient ambigu. L'énonciateur n'en a pas conscience nécessairement (à moins d'une situation ludique). Il peut en résulter des quiproquos comiques.
Le problème de l'ambiguïté est trop grave en mathématiques pour qu'on puisse l'évacuer en quelques mots. Aussi préférons-nous n'en rien dire. Voire à ce propos les publications de l'APMEP : *MOTS, réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs.*

(19) Un anaphorique est un mot qui, considéré hors contexte, est vide de sens (ou presque). Il reprend un mot, un syntagme ou une phrase antérieurs. *Le <u>triangle isocèle que</u> tu as dessiné... Les <u>quatre points sont cocycliques</u>, nous <u>le</u> savions déjà. Soit <u>H l'orthocentre du triangle ABC</u>, les symétriques de <u>H</u> par rapport aux côtés AB, BC et CA sont situés sur le cercle circonscrit. Le symbole "H", hors de ce contexte, est disponible pour désigner n'importe quoi.*

uns des autres. Point trop n'en faut, sinon on “s'emmêle les pointes bic”.

Les lettres apparaissent-elles inscrites sur la figure, produit évanescent de l'imagination ? Sans doute dans son langage intérieur, on cite parfois des lettres : *polaire A"B"C" d'un point P intérieur à un triangle ABC, les céviennes AP, BP, CP coupent les côtés en A', B', C'. A",B", C" sont leurs conjugués harmoniques* (fig. 14). Cependant on ne voit pas obligatoirement ces lettres sur la figure. On sait seulement que les points existent, qu'on est libre de les nommer par des lettres, d'évoquer ces lettres, de les faire apparaître ou disparaître, de les changer à volonté, si on le désire avec suffisamment d'insistance.

Prononce-t-on mentalement les dénominations ? Énonce-t-on en son for intérieur le mot *hauteur* en pensant à une hauteur ? Peut-être, car ma femme me demande parfois de répéter ce que j'ai chuchoté et qu'elle a mal entendu. Je me rends compte alors que j'ai parlé. Je lui signifie que cela n'a pas d'importance, que cela ne la concerne pas et elle est satisfaite de cette réponse (on ne rendra jamais assez d'hommages à la discrétion des femmes de mathématiciens).

En revanche, l'appel aux lettres et autres symboles devient incontournable, lorsqu'on s'aventure dans des relations métriques.

Tel est le cas, si, par exemple, on transforme par inversion la relation de Chasles pour obtenir le célèbre théorème de Ptolémée [20] reliant les côtés et les diagonales d'un quadrilatère inscriptible. On peut tenter la même procédure sur une division harmonique, sur la relation dite de Stewart [21], mais on est vite dépassé par les événements.

Les formules apparaissent comme des figures d'une nature spéciale. On manipule des signifiés et non des signifiants. Cependant, elles deviennent rapidement “indessinables” (du moins pour nous).

4.3. Qu'est-ce que voir une figure ?

Il est bien connu que, selon les individus, selon leur prédominance visuelle, auditive, voire olfactive ou tactile, la représentation des images mentales varie considérablement.

En ce qui nous concerne, se représenter une figure en imagination n'est pas une opération simple. D'abord, la figure n'apparaît pas toute tracée. Il faut se concentrer pour la construire, “sans craie ni crayon”. On ébauche une première esquisse partielle et floue. Puis, petit à petit, on la rend plus nette et on complète la première ébauche par d'autres éléments.

Ainsi, un triangle n'apparaît pas *ipso facto* avec ses hauteurs, ses médianes, ses bissectrices, ses cercles remarquables. Patiemment, il faut les construire dans son imagination. En cours de route certaines parties peuvent s'effacer. Il faut les restaurer, voire tout recommencer.

(20) Dans un quadrilatère convexe inscriptible, on a, entre les diagonales m et n et les côtés a, b, c et d, la relation : $mn = ac + bd$.
On peut se poser la question : la réciproque est-elle vraie ?

(21) Soit M un point du plan et A, B, C trois points alignés, on a :
$$MA^2 . \overline{BC} + MB^2 . \overline{CA} + MC^2 . \overline{AB} + \overline{BC} . \overline{CA} . \overline{AB} = 0.$$
Contrairement à la relation, AB + BC = AC, qui constitue une condition nécessaire et suffisante pour l'alignement de trois points, la réciproque de la relation de Stewart est fausse, comme l'a montré Lucienne FELIX.

On "voit" rarement la figure convoitée dans son entier. On porte son attention sur certains éléments, comme avec une loupe, pendant que le reste s'estompe à la façon d'un champ périphérique de vision trouble. Il en est ainsi, par exemple, des cercles inscrits, exinscrits d'un triangle, du quatrième rayon d'un faisceau harmonique, de la polaire d'un point. On balaie la figure avec sa loupe au gré de l'opportunité de la démonstration.

Il est des questions auxquelles nous ne saurions répondre : quelle est la couleur de la figure ? Apparemment (du moins pour nous) ni le fond ni les traits n'ont de couleur, bien qu'il nous soit tout à fait possible d'imaginer des couleurs vives. Ce ne semble être ni du blanc sur du noir, comme de la craie sur un tableau d'ardoise, ni du noir sur du blanc comme le tracé à l'encre sur du papier.

On distingue, parfois, la notion "abstraite" de *figure* de celle "concrète" de *dessin*, en ce sens qu'une figure géométrique théorique peut être représentée (sur papier ou au tableau) par divers dessins (plus ou moins exploitables).

Peut-on appeler *dessins* ces images mentales fugitives, que l'on a de la peine à fixer, qu'il faut sans cesse reconstruire et ajuster pour qu'elles répondent au projet heuristique ? Nous aurions besoin de l'aide des psychologues pour affermir notre façon d'en parler.

4.3.1. Figures prototypiques / figures quelconques

Grosso modo, un **prototype** répond à une question naïve, a-logique, du genre : quel est le rectangle "le plus rectangle", c'est-à-dire, celui qu'on se représente de prime abord ? Un rectangle trop aplati n'est pas un bon rectangle, un rectangle trop proche du carré non plus. Apparemment, on opte pour un rectangle prototypique voisin du "rectangle d'or" (22), quitte par la suite, à l'allonger ou à le rétrécir.

Ajoutons également que, dans une première esquisse mentale, on place, généralement, le grand côté horizontal, plutôt que vertical ou oblique. Il faut effectuer une opération mentale supplémentaire pour obtenir un rectangle dans une autre position (tel est notre cas, du moins).

Au § 3.6. nous avons considéré la figure prototypique de trois cercles. Dans une approche naïve, on se les imagine, semble-t-il, ni trop grands, ni trop petits, entièrement tracés sur le support disponible et de plus non sécants. Pour les apercevoir autrement, nous devons déjà exercer un contrôle sur notre impulsion spontanée (23).

(22) Le rapport des ses côtés est égal au nombre d'or : $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(23) Nous avons emprunté l'idée de figure prototypique à la linguistique (*cf.* Georges RASTIER, *La Sémantique du prototype*, 1990).
Ainsi, quelle image mentale se fait-on lorsque, dans une conversation à bâtons rompus, on entend le mot *oiseau* ? Pour fixer les idées, considérons la suite : *moineau, rossignol, canari, pigeon, aigle, paon, cygne, charognard, colibri, ibis, autruche, aptérix, manchot, chauve souris, exocet, lièvre, girafe, hippopotame.* Si B.B. vous annonce : "j'aime les oiseaux", pensez-vous, sans un plus ample informé, qu'il s'agit d'autruches, d'aptérix ou de manchots ? Il y a gros à parier que ce sera plutôt un animal, ni trop gros, ni trop petit, qui a des plumes et qui vole tel un moineau ou un rossignol... à l'extrême rigueur un ibis ou une autruche, mais, à coup sûr, ni un aspic ni un dinosaure qui communément n'ont pas le statut d'oiseau et, au surplus, n'ont pas la réputation d'être particulièrement gentils.
Sans doute, la zoologie établit-elle une frontière

L'idée de figure prototypique fait penser à celle de **figure quelconque**, mais tellement quelconque qu'elle en est remarquable.

Ainsi, on évite par principe les cas de figures dotées de propriétés jugées particulières. S'il s'agit de trois cercles, comme ci-dessus, on ne les prendra pas *a priori* tangents deux à deux ou appartenant à un même faisceau.

D'une façon générale, quelle contrainte le qualificatif *quelconque* apporte-t-il ? Il y a plusieurs façons de l'entendre. Le mot *quelconque* apparaît comme polysémique.

Une façon de l'interpréter consiste à éviter les formes qui ont le statut de remarquables, voire d'exceptionnelles : le *triangle isocèle, équilatéral, rectangle* et même, d'un point de vue naïf, le triangle obtusangle [24] ne semblent pas quelconques lorsqu'on parle de triangles.

De même une hauteur, une médiane, une bissectrice ou une symédiane (*cf.* note 13) n'apparaissent pas comme des céviennes quelconques. Cependant, pour peu que l'on s'intéresse à la géométrie du triangle, on découvre une foule d'autres céviennes dotées de propriétés curieuses. On peut même se demander s'il existe des céviennes quelconques en ce sens.

Heureusement, selon Platon, la géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses ; le fait que la cévienne ne soit pas quelconque n'est pas rédhibitoire. Dans l'absolu, aucune figure n'est quelconque. L'essentiel, c'est de faire abstraction des particularités au cours du raisonnement [25].

Néanmoins, humainement parlant, on évitera certaines figures et c'est ce que nous faisons dans notre situation de démonstration. C'est en ce sens pragmatique qu'il faut l'entendre, en l'occurrence.

Signalons que, parfois, comme pour nous contrarier, une forme particulière, non désirée, s'impose dans notre champ de

---

entre *oiseau* et *non-oiseau*, cependant par ignorance ou par métaphore on peut par extension attribuer à la chauve-souris ou à l'exocet le sobriquet de drôles d'oiseaux, mais non à l'éléphant ou à la puce. Bref, le mot *oiseau* évoque de préférence certains animaux et en exclut d'autres.
Quelle image mentale le mot rectangle évoque-t-il dans l'esprit d'un Hexagonal moyen ? On peut se poser la question de façon très générale. L'imagine-t-il de façon immatérielle, comme c'est notre cas ou, au contraire, voit-il un rectangle en carton, en fil de fer plus ou moins tordu, un champ rectangulaire ? Le voit-il dessiné sur du papier avec un crayon gras, sur le tableau avec un feutre ou avec de la craie? Etc.
Et le MPP que voit-il ? Trop vaste question. Nous avons essayé de décrire la nôtre dans les circonstances que l'on sait. Elle ne coïncide pas nécessairement avec celle d'autres MPP.
Des considérations semblables peuvent concerner d'autres figures dotées de certaines caractéristiques, mais pas de n'importe lesquelles ; de même qu'on peut se faire une image mentale, par exemple d'un oiseau, mais pas d'un animal quelconque. Problème psycho-mathématique à explorer.

(24) En parlant de triangles : *obtusangle* s'oppose à *acutangle*, *i.e.* triangle doté d'un angle obtus et triangle dont tous les angles sont aigus. Ces adjectifs, bien que très évocateurs, paraissent peu usités.

(25) Voir à ce propos : Jean-Marc HILGERT, « Quelconque : un exemple d'indéfinition par degrés définis », *in Cahiers de Lexicologie*, 62, 1993-1, pp. 133-145.
Michel HENRY propose la définition suivante : "une figure est quelconque dans la mesure où, pour son lecteur, elle est porteuse des propriétés de toutes les figures analogues répondant aux mêmes critères de construction, et d'elles seulement".

vision et on a toutes les peines du monde à la chasser. On a envie de comparer cette contrariété à la mésaventure de l'apprenant cycliste qui, voulant éviter un poteau, se sent attiré par lui et finit par y buter malgré tous ses efforts : sauf que nous n'attrapons pas de bosses.

Une autre façon d'interpréter le qualificatif *quelconque* consiste à s'intéresser à l'attitude psychologique de la personne qui s'en occupe. A partir du moment où l'on porte son attention sur une figure déterminée, celle-ci cesserait d'être quelconque.

Concluons, de façon lapidaire, qu'une figure **prototypique** qui nous vient spontanément à l'esprit est, en un sens, **quelconque** dans sa catégorie ou, du moins, on la souhaiterait comme telle, tout en n'étant pas quelconque en un autre sens.

4.4. Raisonnement ou déraisonnement ?

Il est bien connu que dans un quadrilatère convexe circonscriptible ABCD (*i.e.* admettant un cercle inscrit dont le centre est le point de concours des quatre bissectrices des angles intérieurs) on a : AB + CD = AD + BC (1).

La réciproque est-elle vraie ?

A force de se creuser la tête, on découvre une démonstration par l'absurde, qui *a priori* semble un peu tirée par les cheveux. Et puis, une nuit prochaine, on se demande : ai-je le droit de raisonner de la sorte ? La question reste en suspens, faute de mentor.

Voici le corps du délit (fig. 17). Admettons que dans notre figure, DC < AB, ce qui ne diminue pas la généralité du raisonnement. Si le quadrilatère n'est pas circonscriptible, on peut inscrire dans le triangle formé par les droites AB, AD et BC un cercle qui ne sera pas tangent à CD. Deux cas de figure. Ce cercle coupe le côté CD ou ne le coupe pas.

Dans le premier cas, on trace la tangente issue de C au cercle qui coupe AD en T. Du théorème direct on peut déduire : CT + AB = AT + BC ou CT + AB = AD + DT + BC et compte tenu de (1) : CT = CD + DT, ce qui est en contradiction avec l'inégalité stricte CT < CD + DT. On procède de façon analogue dans l'autre cas de figure.

Sans même évoquer les mathématiques constructives où l'on distingue ***démonstration de l'absurde*** (ce qui est le cas ici) de ***démonstration par l'absurde,*** on note que cette "candidate démonstration" s'appuie fortement sur les propriétés topologiques intuitives de la figure. A-t-on le droit de s'y prendre ainsi, si l'on veut paraître vraiment sérieux aux yeux des collègues compétents ?

Encore une fois, insistons sur le fait que l'exposé écrit de la démonstration est bien plus long que la vision mentale de cette même démonstration. Pour communiquer, on est contraint de désigner clairement à

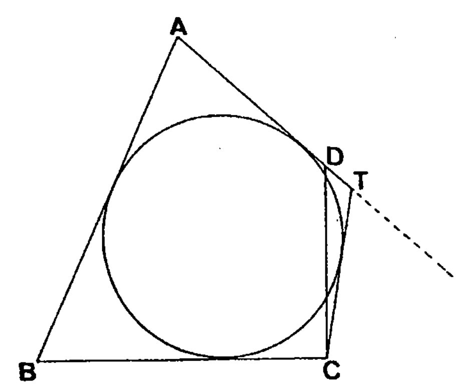

Fig. 17 : quadrilatère circonscriptible, condition suffisante de circonscriptibilité.

son interlocuteur les éléments dont on parle et de ce fait introduire des lettres, ce qui n'est pas obligatoirement le cas dans une représentation mentale où l'on ne s'adresse qu'à soi-même. Le caractère de simplicité change de nature selon que l'on se parle à soi-même ou que l'on s'adresse à autrui.

Pour mieux nous faire comprendre, donnons comme exemple le calcul des segments déterminés par les points de contact A', B', C' d'un cercle inscrit dans un triangle ABC.

Pour voir que AB' = AC' = p – BC, avec p = 1/2(AB + BC + AC), on replie par la pensée CB' sur CA' et BC' sur BA' sans avoir besoin de nommer quoi que ce soit, car la propriété saute aux yeux (fig. 18). Mais est-ce là une démonstration ?

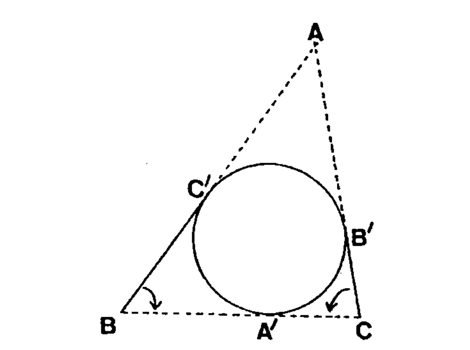

Fig. 18 : cercle inscrit dans un triangle.

4.4.1. Autres déraisonnements

Soit à construire un carré dont les côtés passent par quatre points ABCD. La solution que nous connaissons consiste à porter sur la perpendiculaire à AC passant par B, une longueur BE égale à AC. ED est un côté du carré (fig. 19).

Comment le montrer ? Mentalement, nous faisons pivoter d'un angle droit l'ensemble infini des parallèles à AC. Parmi toutes leurs images, on trouve BE et une parallèle à BE qui passe par D. Elles découpent sur les côtés du carré passant par B et par D des segments égaux à ceux découpés par leurs antécédentes sur les côtés passant par A et C.

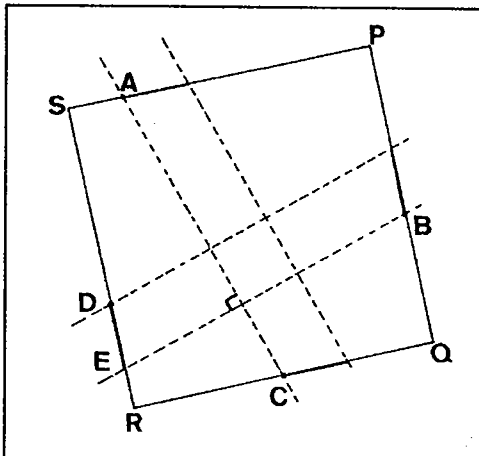

Fig. 19 : construction d'un carré dont les côtés passent par 4 points donnés

Tout cela est mal dit, c'est du langage non policé et puis on fait pivoter un ensemble infini. A-t-on le droit de le faire et de le dire, tout en sachant que parler d'ensembles infinis achevés ne doit être qu'une façon abrégée de parler d'ensembles infinis en puissance (selon Henri POINCARÉ) ? Or, on sait bien, qu'en l'occurrence, on pourra développer ("délayer" inutilement) la démonstration, en ne se servant que de propriétés élémentaires (cas d'égalité des triangles, entre autres). Mais ce "délayage" sera profondément ennuyeux.

Notre façon hétérodoxe de parler nous plaît d'autant plus qu'on entrevoit la possibilité de généraliser, sans peine, le problème à la construction d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné dont les côtés passent par quatre points. Sommes-nous coupables ?

4.4.2. Le feuilleton de nuit

Pourquoi séchons-nous une nuit sur un problème, alors que, la nuit suivante, la solution nous tombe du ciel ? On nous explique, que notre inconscient, entre deux, œuvre pour nous. L'inconscient a bon dos. On peut lui attribuer tout ce que l'on veut, puisque l'inconscient est tautologiquement inconscient. Mais peut-être avons-nous mauvais esprit et posons des questions qu'il n'est pas opportun de poser. En suivant le conseil d'Hubert REEVES et avant de s'occuper du "pourquoi", observons de plus près le "comment".

Lors de notre comparaison contestable du § 3.6., nous avons rappelé le fait notoire que la résolution d'un problème peut en soulever (suggérer) plusieurs autres dont la solution reste à trouver.

Ainsi, à la fin du § 4.4.1., nous avons cherché à généraliser la construction d'un carré dont les côtés devaient passer par quatre points donnés, à celle d'un parallélogramme semblable à un parallélogramme donné. La solution proposée pour le carré se généralisait aisément (moyennant quelques adaptations mineures) au parallélogramme, mais non au quadrangle quelconque. Le problème-feuilleton se bloquait. Cependant, nous ne voulions pas nous sentir définitivement vaincus et espérions une revanche. Celle-ci est venue inopinément sans que nous l'attendions.

Ah ! le brave Inconscient a œuvré pour nous. Si l'Inconscient était un saint, nous aurions pu lui allumer un cierge. Mais que faire pour le remercier et pour obtenir ses bonnes grâces ? Monsieur l'Inconscient, merci, mille fois merci.

Dorénavant, nous considérerons avec optimisme les obstacles qui nous bloquent comme des suspens d'un roman feuilleton et attendrons l'issue favorable dans un prochain épisode.

L'idée que l'Inconscient nous a suggérée a été de faire appel aux arcs capables d'un angle donné.

Le sommet P du carré PQRS à construire se trouve sur le cercle de diamètre AB, le sommet R sur celui de diamètre CD. La diagonale PR, bissectrice des angles droits P et R du carré, recoupe les cercles ainsi construits en I et J. P et B voient l'arc AI sous un angle de 45°, d'où la construction de I. Bref, IJ détermine le carré (fig. 20).

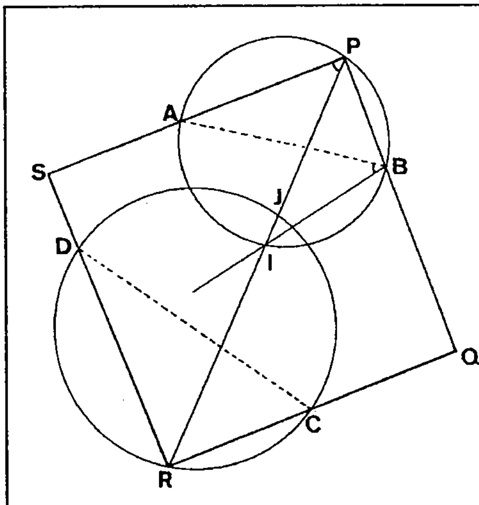

Fig. 20 : construction d'un carré dont les côtés passent par 4 points donnés, les capacités d'un arc capable.

Cette construction est plus compliquée que la précédente et appelle une discussion laborieuse fondée sur une topologie intuitive. Cependant, elle est extensible à la construction d'un quadrangle quelconque semblable à un quadrangle donné et dont les côtés passent par quatre points donnés. Les angles considérés n'ont plus 90 et 45 degrés, mais ils sont connus et par suite les point I et J.

Ce qu'on perd en élégance, on le gagne en efficacité.

Mais il y a plus. Depuis longtemps, nous séchions sur la construction d'un carré dont les sommets sont situés sur les côtés d'un quadrangle donné (Q).

A présent la solution devient simple : il suffit de prendre le problème à l'envers. On circonscrit un quadrangle (Q'), semblable à (Q) par la méthode précédente et on obtient une figure semblable à celle cherchée. Un homothétie pour la ramener à la bonne dimension et le tour est joué.

Il est clair que cette construction peut être étendue à l'inscription d'un quadrangle quelconque, semblable à un quadrangle donné dans un autre quadrangle quelconque.

En prenant du recul par rapport à notre démarche globale, nous voyons que l'ultime construction était demandée de façon prématurée. Pour y parvenir, nous avons dû passer par une série d'autres problèmes que, dans notre idéologie, nous appelons des microsystèmes. Le feuilleton nocturne se déroulait en une série de récits avec, chaque fois, un suspens à la fin.

Nous nous sommes longtemps délectés avec un autre feuilleton : étant donné un triangle, trouver les triangles inscrits ou circonscrits d'aire extrémale (*a priori*, on ne sait pas si ce sera un maximum ou un minimum), semblables à un triangle donné. Le feuilleton s'est achevé sur une *"happy end"*, mais ce serait trop long d'en conter par le menu tous les épisodes.

4.5. Approche microsystémique (μS)

Nous poserons, d'abord, deux définitions du même concept, l'une philosophique (vision du train dans la brume matinale) l'autre plus précise (destinée à l'ingénieur). Mais il n'y en aura aucune pour le mathématicien pointilleux [(26)].

Définition philosophique (permettant de saisir la raison d'être du concept) : *Un μS est un système adapté à la condition humaine, réduit à l'échelle de l'être humain qui le pense.*

Définition technique (permettant de mettre en œuvre le concept) : *un S est un système finalisé, suffisamment petit, voire prédégénérescent, pour pouvoir être traité avec l'approximation requise, en un temps réel, compte tenu de la technique, discursive et / ou expérimentale, disponibles, mais suffisamment grand pour rendre compte de sa finalité.*

Sans vouloir nous aventurer dans une longue discussion sur le bien-fondé de cette définition, essayons d'en faire "deviner" l'intérêt pédagogique à l'aide d'exemples "simplets".

Supposons que nous voulions donner une idée de ce qu'est un ensemble de parties à de jeunes apprenants, non aguerris à l'effort d'abstraction mathématique. Si nous leur proposons de travailler sur un

(26) Yves GENTILHOMME, *Essai d'approche microsystémique. Théorie et pratique*, Berne, Francfort-s. Main, New York, Peter Lang, 1985.

ensemble de 100 éléments, il est évident que, matériellement, l'opération est irréalisable. Tout ce qu'ils pourront retenir c'est qu'il y en a beaucoup. Essayons de diminuer le nombre d'éléments jusqu'à ce que l'opération soit faisable. Même avec un ensemble de dix éléments, l'opération risque d'engloutir trop de temps. A l'opposé, avec un ensemble à un seul élément, l'opération devient triviale, trop simple pour être instructive (à ce niveau pédagogique). Il y a là "dégénérescence", dironsnous. La limite raisonnable semble se situer aux environs de trois. En deçà, c'est trop peu, au-delà c'est trop "beaucoup". L'ensemble de trois éléments constitue ce que nous convenons d'appeler un "système prédégénérescent" au regard de notre objectif et de la situation didactique vécue. Du point de vue pédagogique, il est particulièrement intéressant.

Autre exemple : prenons l'objectif de montrer concrètement à des apprenants normaux (non "surdoués", s'il en existe), comment obtenir le produit de deux matrices. Si on leur présente, à titre de premier exercice, deux matrices de 100 lignes, 100 colonnes, on aura, dès le départ, quelque difficulté matérielle à écrire tous les termes. Même si on y parvient, au bout d'un temps excessif au regard du temps qu'il est raisonnable d'y consacrer, les apprenants seront débordés par le nombre. Ils n'arriveront pas à appréhender et à mettre en œuvre le mécanisme simple de l'opération. Le nombre étouffe la compréhension. La "complexité" est trop lourde à supporter. Si, en revanche, on leur propose comme exercice deux matrices à une ligne, une colonne, il ne reste plus rien à montrer.

Dans le premier cas, nous dirons que le "système pédagogique" est trop complexe, compte tenu des moyens matériels et intellectuels disponibles. Dans le second, qu'il est dégénéré, au sens qu'il a perdu les propriétés pertinentes (sur lesquelles on voulait justement attirer l'attention). Une pédagogie réaliste invite à présenter, à une certaine étape de l'acquisition du savoir-faire, des matrices relativement petites, mettons, de 2 à 4 lignes et colonnes permettant aux apprenants de s'entraîner commodément au savoir-faire escompté. Concluons que le microsystème pédagogique optimal est prédégénérescent (si on le réduit davantage, il dégénère). Par la suite, les apprenants auront la capacité de réaliser ce mécanisme avec des matrices plus conséquentes sans être noyés par la complexité.

Généralisons ces idées. Une figure peut comporter trop d'éléments pour que nous arrivions à nous la représenter mentalement dans son entièreté. Pour y parvenir et pour pouvoir raisonner, il nous faut la simplifier en ne portant notre attention que sur certains de ces éléments, en effaçant momentanément d'autres. Cependant, si l'on en supprime trop, toute réflexion devient impossible.

Exemple. Il nous est impossible de voir en même temps un triangle, avec ses six bissectrices, les cercles ayant pour diamètre les segments joignant les pieds des bissectrices outre le cercle circonscrit, les trois cercles ayant pour diamètre les côtés du triangle, le cercle d'Euler, les axes radicaux... On détache dans cette figure-système complexe des figures partielles formant des S (par exemple le triangle et deux cercles seulement) sur lesquels il nous est possible de raisonner. La réunion des S permettra, par la suite, de concevoir le système entier comme un μS système de μS.

L'approche microsystémique a été pratiquée de tout temps (sans être identifiée en tant que telle) par des générations d'enseignants soucieux de s'adapter à la psychologie de leurs ouailles. Nous avons simplement voulu rappeler ce concept structurel général qui joue un rôle important dans le processus de résolution des problèmes que nous nous posons pour rejoindre les bras de Morphée.

Conclusion

S'il est difficile de commencer un article (phénomène dit de la page blanche), il n'en est pas moins ardu de le terminer. On s'arrête sur l'impression d'avoir laissé de côté de nombreuses questions. Néanmoins, il faut s'arrêter et on s'arrête.

Par le témoignage introspectif de mon cas personnel, j'ai cherché à décrire ce qui se passe dans la tête d'un µMPP (et il y en a beaucoup de par le monde), lorsqu'il s'attaque naïvement à une discipline qui, en fait, dépasse ses facultés pour réaliser une œuvre utile. Néanmoins, cette activité peut lui apporter un certain bonheur, ce qui n'est pas négligeable. Elle en vaut bien une autre.

Par ailleurs, les apprenants n'étant pas dans leur majorité des génies mathématiques, il se peut que se produisent, dans leur tête, des phénomènes comparables, ce qui n'est pas sans intérêt pour la didactique de cette matière.

Enfin, j'ose espérer que les µMPP, par leur existence même, forment un terreau fertile d'où germeront, peut-être, un jour, de véritables inventeurs de théorèmes. Mais, comment devient-on un µMPP ? Question que j'aborderai, si j'en ai le courage, une autre fois (27).

(27) Dans une dernière note, nous tenons à adresser tous nos remerciements à Michel HENRY, auquel nous avons dédié cet essai para-mathématique, pour son encouragement et les nombreuses remarques, d'une grande pertinence, qu'il a faites sur notre texte, ainsi qu'à Annie, sa femme, qui a redessiné avec soin les figures. Nous sommes reconnaissant à notre femme, Serena G. et à Martine COUTIER (de l'Institut National de la Langue Française) qui ont relu notre manuscrit et y ont relevé d'innombrables coquilles.