REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

ET POURTANT, ILS TROUVENT...

Marie Claude PONTILLE,
Lycée St Exupéry, Lyon

Josette FEURLY-REYNAUD,
Lycée St Exupéry, Lyon

Claude TISSERON,
Université Claude
Bernard Lyon I

Cet article présente un aspect des réflexions d'un groupe de travail de l'IREM de Lyon, dont les membres sont Serge Betton, Yves Guichard, et les auteurs.

Ce groupe a observé des élèves dans une situation de recherche de problème dans le cadre de *MATH.en.JEANS* (Audin P., Duchet P., 1991).

La situation de travail des élèves n'est évidemment pas une situation classique d'enseignement : elle se déroule hors temps scolaire, avec des élèves volontaires, donc a priori motivés, et il n'y a pas de connaissance visée, dont l'apprentissage doive être réalisé à la fin de ce travail.

Cependant, les observations faites ont permis de pointer des phénomènes intéressants pour l'apprentissage de l'Analyse, comme par exemple la façon dont les élèves utilisent leurs connaissances dans cette recherche, les difficultés et les obstacles rencontrés, l'évolution de leurs conceptions à propos des nombres.

En présentant quelques éléments d'analyse de ces phénomènes, nous espérons alimenter la réflexion sur l'enseignement de l'Analyse au lycée, et ainsi apporter une modeste contribution à la compréhension des phénomènes d'apprentissage des concepts de ce domaine des mathématiques, et des difficultés d'un enseignement cohérent dans les conditions actuelles.

1. PRÉSENTATION DE LA SITUATION ÉTUDIÉE

Le cadre du travail des élèves

En 93-94, pour la deuxième année consécutive, un enseignant et des élèves du lycée St Exupéry à Lyon ont participé à un jumelage dans le cadre de *MATH.en.JEANS*.

Chaque semaine, d'octobre à juin, des élèves volontaires ont travaillé deux heures, en dehors du temps scolaire, en présence de l'enseignant, sur un sujet proposé par un chercheur en mathématiques (Roland Assous, maitre de conférences de l'Université de Lyon I).

En début d'année scolaire, le chercheur donne les mêmes sujets aux lycéens de deux établissements (en l'occurrence les lycées Jean Moulin et St-Exupéry à Lyon). La recherche sur l'un des sujets choisis par les participants s'est étalée sur l'année, elle a été effectuée par équipes de trois ou quatre élèves, et encadrée par deux enseignants.

Quatre fois dans l'année, les élèves des deux lycées se sont rencontrés, les équipes qui traitaient le même sujet ont confronté leurs travaux, leurs points de vue. Ils ont fait le point avec le chercheur, ont pu lui poser des questions, et ont exposé au groupe entier tout ou partie de leur travail.

Au printemps, un colloque régional a regroupé les participants à des recherches du même type. Les élèves ont alors communiqué l'état de leurs travaux par un panneau et par un exposé oral d'une vingtaine de minutes.

L'année s'est achevée par la rédaction d'un compte-rendu écrit de la recherche.

Un tel cadre permet d'observer un même groupe d'élèves qui travaillent pendant plusieurs mois sur le même problème.

Notons cependant que le contrat qui s'est noué dans ce cadre est très particulier : le rôle de l'élève n'est plus le même, mais celui de l'enseignant est également très différent de ce qu'il est d'habitude :

– il n'y a pas de connaissance visée spécifiquement comme objet d'enseignement.
– le temps n'est pas compté aux élèves.
– c'est le chercheur qui est garant de la validité des résultats, il peut donner des conseils sur les pistes à explorer.
– l'enseignant a la lourde tâche d'encadrer le travail hebdomadaire des élèves, la responsabilité de relancer leur travail, de choisir le moment et le type de ses interventions, il n'est pas censé connaitre la solution du problème
– lors des colloques, les élèves ont à communiquer leur travail à un public (rencontres inter-lycées et séminaire), ce qui demande un effort spécifique de rédaction et de présentation, et constitue un enjeu important pour eux.

La recherche menée à l'IREM de Lyon autour de *MATH.en.JEANS*

Un projet de recherche, centré sur les interactions entre élèves dans le travail de groupe, s'est concrétisé par la mise en place d'un groupe de travail, qui a pris *Math.en.Jeans* comme terrain d'observation.

Une première année (93-94) a été essentiellement consacrée au recueil de données (enregistrements audio et vidéo, transcriptions de ces enregistrements, interviews d'élèves), avec la contrainte forte de suivre en continu la progression d'au moins un groupe d'élèves tout au long de son travail.

L'année suivante a permis un début d'analyse du matériau recueilli.

L'hypothèse de départ était qu'une situation comme celle qui avait été mise en place, pouvait favoriser l'émergence de conjectures, le débat et l'argumentation, grâce aux interactions qu'elle permet, ainsi que l'émergence des conceptions des élèves à travers les actions qu'ils engagent et leur mise à l'épreuve dans la résolution de problème.

La nature du problème que nous avons choisi d'observer, ainsi que l'abondance du matériau recueilli, nous ont conduits à faire des choix. Nous avons en priorité travaillé sur les points suivants :

– les conceptions des élèves à propos des nombres et des fonctions, leur traduction dans divers cadres, les obstacles et conflits qui en surgissent, et leur évolution sur un temps long.
– la mise à l'épreuve des connaissances et savoir-faire scolaires dans ce problème, à la fois à propos des objets mathématiques et des méthodes

Beaucoup d'autres questions sont intéressantes, par exemple :

– celles concernant l'analyse du contrat, en particulier le rôle de l'enseignant dans cette situation, la façon dont il intervient et les moments où il s'autorise à le faire.
– celles qui se rapportent à la mise en place d'un rapport au savoir différent de celui qui se construit dans le cadre institutionnel.

Ces questions ne seront pas abordées directement dans ce texte.

Le problème "Point fixe"

Parmi les énoncés donnés en début d'année par le chercheur, voici celui sur lequel ont travaillé les élèves que nous avons observés

> On considère une application f de $\{1,2,...n\}$ dans $\{1,2,...n\}$ où n est un naturel non nul. On suppose f croissante, montrer qu'il existe un entier k tel que $f(k) = k$, k est appelé point fixe.
> Etudier de possibles généralisations aux cas suivants, avec f croissante :
>
> $f : D \cap [0,1] \to D \cap [0,1]$,
> où D est l'ensemble des décimaux.
> $f : Q \cap [0,1] \to Q \cap [0,1]$,
> où Q est l'ensemble des rationnels.
> $f : [0,1] \to [0,1]$
>
> ou toute autre généralisation.

Toutes les questions du problème précédent relèvent du résultat suivant : si E est un ensemble ordonné dans lequel toute partie non vide a une borne inférieure et une borne supérieure, toute fonction croissante de E dans E a un point fixe.

C'est le cas lorsque $E = \{1,2,...n\}$ ou l'intervalle $[0,1]$ de R, en revanche pour les intervalles $[0,1]$ dans D et dans Q, il en va autrement, si bien que les généralisations proposées conduisent à des résultats différents suivant les ensembles considérés.

Pour les élèves, les connaissances mathématiques à mettre en jeu de prime abord sont les suivantes :

– d'une part la notion de fonction et de restriction d'une fonction à un sous ensemble.

(domaine de définition, sens de variation, représentation graphique, à l'aide d'un dessin ou avec la calculatrice, catalogue de fonctions simples disponibles pour la fabrication d'exemples ou de contre-exemples...)

– d'autre part les connaissances liées à la nature des nombres, à celle des ensembles N, D, Q, R, et à la façon dont ils s'interpénètrent par rapport à l'ordre sur chacun d'eux.

Un des buts du chercheur qui a posé le problème était de faire travailler la notion d'infini et d'ensembles ordonnés. Un obstacle de taille était attendu : celui de concevoir un nombre réel comme borne supérieure d'un ensemble majoré.

Mais bien d'autres difficultés ont surgi tout au long de cette recherche, nous allons en décrire quelques unes, concernant la nature des nombres décimaux, et leurs relations avec les réels.

2. HISTORIQUE DE LA RECHERCHE DES ÉLÈVES

Les élèves ont abordé les questions dans l'ordre où elles apparaissent dans l'énoncé. Ils ont résolu le problème dans N, D et Q, mais ne sont pas parvenus à surmonter totalement l'obstacle du passage à l'ensemble des réels.

Nous développons ici surtout le travail portant sur N, D et Q. On peut distinguer plusieurs phases dans la recherche des élèves.

Période 1 : recherche dans N

Les élèves ont d'abord expérimenté avec des fonctions simples du programme de seconde. Ils ont notamment étudié les fonctions affines qui vérifient les hypothèses requises. Le fait de trouver la fonction identique (en fait sa restriction) comme seule fonction affine possible les a conduits à relire l'énoncé, et à chercher d'autres types de fonctions répondant aux contraintes que celles definies par une expression algébrique. Ce travail leur a donné l'idée de la solution, obtenue après quatre semaines, et qu'ils ont exposée fin novembre lors du premier séminaire. La voici, page suivante (extrait de cahier n°1).

Leurs observations leur ont par ailleurs suggéré un autre problème : en fabriquant pour n donné toutes les fonctions croissantes de {1,2,...n} dans lui même, quelle est la répartition des points fixes et son évolution en fonction de n ? A plusieurs moments par la suite, quelques membres du groupe se sont penchés sur cette question.

Période 2 : recherche dans D en utilisant le travail déjà fait pour les entiers

Au départ, les élèves ont pensé reprendre la démonstration effectuée sur les entiers, en utilisant "le plus petit décimal au dessus de 0". Ils partent de l'écriture $k.10^p$ avec k et p entiers, et divisent les entiers de 1 à n par une puissance de dix. Se rendant compte qu'ainsi, ils ne peuvent pas obtenir 0, ils reviennent au problème dans N, et montrent que le résultat reste valable avec les entiers de 0 à n au lieu des entiers de 1 à n.

A partir de là, cherchant à obtenir les décimaux de [0,1], ils divisent les entiers de [0,n] par n, en prenant pour n une puissance de dix, 10^x. Ils considèrent les applications f ' = f / n, où f est l'une des

Extrait de cahier n° 1

"Reformulation" de l'énoncé :

Montrer que n'importe quelle fonction f correspondant aux conditions de l'énoncé possède au moins un point fixe.

On va essayer de montrer l'inverse, c'est à dire qu'il n'existe pas d'application f n'ayant pas de pt invariant avec les conditions données par l'énoncé.
En fait, on essaye de trouver f sans point fixe :

$f(1) \to \{1, \dots n\}$.

Or on ne veut pas de point fixe donc

$f(1) \cancel{\to}\in \{2, \dots n\}$

Dans ce cas

$f(2) \cancel{\to}\in \{2, \dots n\}$

Mais, comme précédemment, on rejette 2 comme image de f(2). On a donc

$f(2) \cancel{\to}\in \{3, \dots n\}$

Plus généralement, on dira que

$f(k) \cancel{\to}\in \{k+1, \dots n\}$ (avec $k \in [1,n]$)

$f(n-1) \in \{n\}$

A ce moment-là ~~soit~~ ôté de $\{\cancel{1,2}, \dots, n\}$

$f(n) \cancel{\to}\in \{\cancel{n+1, \dots n}\}$ ce qui n'est pas possible

à $f(n) \neq n$

→ donc il n'existe pas de fonction f répondant aux conditions de l'énoncé qui n'admette aucun point invariant.

→ donc toutes les fonctions répondant aux conditions de l'énoncé admettent au moins 1 point fixe (?)

applications de {0,1,2,...n} dans lui même, puis affirment que "puisque f admet au moins un point fixe k, alors on aura f(k) / n = k / n, donc f '(k) = k donc f ' a un point fixe".

Comme ils veulent le plus grand x possible, ils parlent de "x égal à +∞, du dernier entier avant +∞, de x tendant vers +∞".

Ils soumettent alors leur travail à l'enseignant : une discussion a lieu à propos de $n = 10^x$, au cours de laquelle l'enseignant pose des questions, par exemple :

si x tend vers +∞, n est-il fixé, ou non ?
Existe-t-il un dernier entier avant +∞ ?
+∞ est-il un entier ?

Dans la suite des échanges, l'enseignant amène les élèves à trouver des réponses à ces questions, sans que leurs idées à ce propos soient bien stabilisées (comme le montre la suite des enregistrements), puis les incite à mettre en œuvre concrètement le processus qu'ils ont envisagé, en prenant des exemples pour n, voire pour f.

Cette mise à l'épreuve pour $n = 10^{1000}$ leur fait prendre conscience du fait que leur procédé ne leur a pas fourni tous les décimaux de 0 à 1(voir l'extrait de cahier n° 3, plus loin).

Peu à peu, ils remettent en cause leur passage des fonctions de l'ensemble $N \cap [0,1]$ dans lui même, aux fonctions de $D \cap [0,1]$ dans lui-même.

Devant l'obstacle que constitue l'infinité d'images possibles pour un décimal, ils passent à un cadre graphique, et en décembre - janvier, apparaît une autre approche.

Période 3 : recherche dans D en plongeant D dans R

Persuadés de l'existence d'un point fixe, les élèves veulent encore se servir de la démonstration valable sur les entiers en remplaçant 1 par "le plus petit décimal strictement positif e". Le problème tourne alors autour de l'existence de ce nombre, admise au départ par le groupe, et rejetée petit à petit.

S'amorce alors toute une période de travail sur les décimaux, notamment sur la topologie de D et sur la représentation graphique des fonctions de D dans D.

Les élèves démontrent qu'il n'existe pas de plus petit décimal, en montrant qu'entre deux décimaux, il y en a toujours un autre. Mais ce résultat entre en conflit avec la représentation des décimaux comme des nombres successifs, avec un écart fixe entre eux, qui était la base de leur stratégie.

Les élèves dessinent des courbes de fonctions définies sur les décimaux, et à valeurs décimales, et se demandent si le croisement des lignes continues imaginaires qui portent les pointillés représentant les décimaux peut se faire en dehors de ces pointillés. Certains sont amenés peu à peu à remettre en cause leur conjecture initiale sur l'existence d'un point fixe.

Finalement, début février, l'un d'entre eux arrive avec des contre-exemples qui confirment qu'il n'existe pas toujours de point fixe dans le cas de D et Q. Voici (pages suivantes) ce qui est écrit ce jour-là sur le cahier de recherche.

Le bilan écrit final ne rend pas compte de toute la réflexion et l'approfondis-

Extrait de cahier nº 2

2/02/94

(Travail fait à la maison)

On essaye de trouver un contre exemple pour $f : \mathbb{D} \cap [0,1] \to \mathbb{D} \cap [0,1]$ en essayant avec des fonctions concrètes, le plus simple étant les fonctions affines.

$f(x) = ax + b$ (x décimal)

Pour que la fonction corresponde à l'énoncé, il faut que :

- a et b soient décimaux
- f soit dans les limites.

Trouver le point fixe revient à résoudre

$$f(x) = x$$

ou encore $ax + b = x$

d'où $x = \dfrac{b}{1-a}$

Or il n'est pas difficile de voir que si

- b peut s'écrire $3b'$ ("multiple de 3")
- $1-a$ ne — pas — $3(\frac{1}{3}-c')$ ("non multiple de 3")

on a $\dfrac{b}{1-a}$ non décimal...

Exemple concret :

$b = 0{,}2 \quad a = 0{,}7 \Rightarrow x_f = \dfrac{2}{3} \notin \mathbb{D}$

$f(x) = 0{,}7x + 0{,}2$

Voilà donc un contre exemple qui nous montre qu'il n'y a pas toujours de point fixe dans $\mathbb{D}$. On pourrait aussi le montrer pour des fonctions du type $f(x) = ax^2 + b$.

Par exemple $f(x) = 0,3x^2 + 0,3 \quad (x_f = \frac{1}{3})$
ou $f(x) = 0,3x^2 + 0,033 \quad (x_f = \frac{1}{30})$

Maintenant, on peut essayer dans $\mathbb{Q}$.
Les fonctions affines ont toujours un point fixe donc on essaye les fonctions du type $f(x) = ax^2 + b$:
On trouve le point fixe en résolvant

$$x = ax^2 + b$$

On trouve $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4ab}}{2a}$

et $\sqrt{1-4ab}$ n'est pas forcément rationnel

Exemple :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 0,1$$

$\Rightarrow$ point fixe en $x_f = 1 - 0,4\sqrt{5}$

et $\sqrt{5}$ n'est pas rationnel

sement que les élèves ont conduits sur leurs conceptions des décimaux. Cependant, des traces de cette évolution existent, sous la forme de mini-défis qu'ils ont posés à leurs camarades lors du congrès régional, et d'un exposé au lycée, sous la forme suivante :

Quel est le résultat de la division par 10^{∞} ?
Quel est le plus petit décimal autre que 0 ?
Comment représenter une fonction définie dans les décimaux ?

Période 4 : travail dans R

Il a commencé début février. L'expérience vécue à propos des décimaux a rendu les élèves prudents sur la conjecture à adopter pour les fonctions dans R. De nombreux essais de représentations graphiques les amènent peu à peu à pencher pour l'existence d'un point fixe.

Ils essaient en vain de construire des suites qui convergeraient vers des points réels qui seraient des points fixes, mais piétinent.

Lors du séminaire de mars, le chercheur leur suggèrera d'examiner le cas où l'ensemble $A = \{x \in [0,1], f(x) > x\}$ admet un plus grand élément, situation où ils résolvent le problème.

Mais le cas général résiste, et l'année scolaire se termine...

Dans la suite de ce texte, nous parlerons seulement des difficultés des périodes 1, 2 et 3.

3. CONCEPTIONS MISES EN ŒUVRE DANS LA RECHERCHE, OBSTACLES ET DIFFICULTÉS

De l'étude des enregistrements et des documents écrits, émergent diverses conceptions élèves, et leurs évolutions.

Au cours de ce travail, les élèves ont été amenés :

– à construire un modèle de D différent de celui qu'ils ont pour N.

– à appréhender D comme un ensemble non discret.

– à se rendre compte que l'on ne peut raisonner sur l'infini comme sur le fini.

– à travailler ce qu'est une fonction et à réaliser que l'utilisation des représentations graphiques a des limites, liées aux règles implicites relatives aux propriétés qu'il est légitime de lire sur le dessin.

Voici quelques exemples de la façon dont ces conceptions interviennent dans la conduite de la recherche, et des difficultés ou obstacles rencontrés.

3.1. A propos des divers modes de définition possibles d'une fonction

Actuellement en Seconde, les élèves n'ont que très rarement l'occasion de créer des fonctions définies sur N, une fonction est souvent perçue soit comme un algorithme de calcul, soit comme un dessin.

Le travail sur N s'est d'abord déroulé à l'aide des fonctions usuelles (fonctions affines, polynômes du second degré). Aucune parmi elles, sauf l'identité, ne répondait aux contraintes imposées. Devant cette difficulté, les élèves se sont interrogés et ont envisagé d'autres moyens de définition d'une fonction que l'utilisation d'une formule.

On peut constater que le passage au discret a été un premier obstacle – qui nous parait découler de l'enseignement tel qu'il est fait actuellement – , qui a fait émerger la question plus fondamentale de ce qu'est une fonction.

Une difficulté similaire est réapparue pour les fonctions de D dans D : comment construire une telle fonction ? Ils essaient de réinvestir ce qu'ils viennent de faire dans N, L'idée d'associer à chaque décimal de [0, 1] un décimal de [0, 1] n'est pas stabilisée, comme le montre l'essai de définition suivant, finalement abandonné (*cf.* extrait de cahier n° 3, page suivante)

3.2. A propos des nombres décimaux

La définition des décimaux prise au départ, à savoir $k.10^p$ avec k et p entiers, s'est avérée non opérationnelle ici pour certains élèves, ce qui a conduit le groupe à chercher d'autres représentations, et à plonger D dans R.Une conception des

Extrait de cahier n° 3

Généralisation à $f : \mathbb{D} \cap [0,1] \to \mathbb{D} \cap [0,1]$

* Nous avons tout d'abord essayé de généraliser ce que nous avons vu dans $\mathbb{N}$ à $\mathbb{D}$.
On commence par "généraliser" l'application f, de $\{0, \dots n\}$ dans $\{0, \dots n\}$ où $n \in \mathbb{N}$
(ni démonstration que dans $\{1, \dots n\}$)
On fixe a très gd (l'idée était $a = $ "10^{∞}")
On considère ensuite l'application

$$f' = \frac{f}{a}$$

Nous pensions que son ensemble de définition deviendrait

$$f' : \mathbb{D} \cap [0,1] \to \mathbb{D} \cap [0,1]$$

comme f admet toujours un point fixe tq $f(k) = k$, on aurait alors

$$\frac{f(k)}{n} = \frac{k}{n} \Rightarrow f'(k) = k$$

Mais voyant qu'il était difficile de "cerner" 10^{∞}, nous avons pris a "très grand". Par exemple, $a = 10^{1000}$:

Dans ce cas, on a, par exemple

$f(0) = 2$ $\quad f'(0) = 2 \times 10^{-1000}$

$f(1) = 3$ $\quad f'(10^{-1000}) = 3 \times 10^{-1000}$

$f(2) = 6$ $\quad f'(2 \times 10^{-1000}) = 6 \times 10^{-1000}$

etc...

Extrait de cahier n° 3 (suite)

Or on voit tout de suite qu'il manque des décimaux, entre 0 et 10^{-1000}, entre 10^{-1000} et 2×10^{-1000} etc...

On ne peut donc pas passer d'une fonction dans IN à une fonction dans D. Il faut essayer autre chose !

Extrait de cahier n° 4

* Nous avons alors essayé de nous servir de la démonstration dans IN en posant "e le plus petit décimal". On pourrait écrire les décimaux comme suit

0, e, 2e, 3e etc...

décimaux qui a surgi lors de ce travail est celle de nombres consécutifs, où l'écart entre un nombre et son suivant est constant. En voici quelques traces (*cf.* extrait de cahier n° 4).

> *– Dans D comme dans N, ça va être plein de points, la fonction. C'est pareil, ça va être des points, la seule différence, c'est, en fait, l'écart entre les points... Le problème, en fait, c'est ça, dans la fonction dans N, l'écart entre les points, on le connaissait, c'était 1... là, on le connait plus.*
> *– Pour l'instant, on est dans les décimaux... Parce qu'on a bien un écart qui est toujours le même entre les différents points. Oui, c'est toujours le même écart...*
> [Décryptages]

Pour les élèves, la question de l'existence d'un plus petit décimal est reliée à celle d'un écart constant entre deux décimaux. En effet, après avoir démontré qu'entre deux décimaux, existe un autre décimal, et donc qu'il n'existe pas deux décimaux consécutifs, ils s'interrogent :

> *– Je me demande si c'est la même chose : il existe un plus petit décimal et il existe deux décimaux consécutifs. On peut*

toujours chercher l'écart...
– Il existe toujours un écart, mais jamais chiffrable. Il n'existe pas de plus petit décimal e, car sinon, 0 et e seraient consécutifs.
[Décryptages]

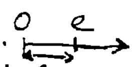
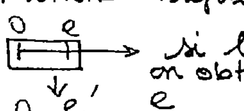
On peut noter qu'un peu plus tard, dans la même séance, le même élève repose la question : "Comment démontrer qu'il n'existe pas de plus petit décimal ?"

La démonstration sera finalement écrite le même jour sur le cahier de recherche (extrait de cahier n°5).

La dernière phrase, écrite par un autre élève que celui qui avait commencé, montre bien l'incertitude qui persiste après la démonstration, il semble que cet élève considère ce résultat comme incertain (pas très satisfaisant), et soit prêt à le réexaminer.

Par la suite, les deux idées "il n'y a pas de plus petit décimal" et " il existe un écart

Extrait de cahier n° 5

Prenons un point e, situé près de o.

On pourra toujours trouver un point entre zéro et e tel le point A, tel que $OA = \frac{e}{2}$. Il n'y a donc pas de plus petit décimal.
On peut le montrer d'une autre manière.
Prenons toujours le point e, le plus proche de 0 :

si l'on fait un zoom (cadre rouge) on obtient un nouvel écart, dans lequel on peut trouver un point situé entre e et 0, e'.
On remarque que l'on pourrait procéder ainsi indéfiniment. Il n'y a donc pas de plus petit décimal.

Bien que cette définition ne soit pas très satisfaisante (et il faudra probablement y revenir), nous allons considérer pour la "suite" qu'il n'existe pas de plus petit décimal. Si on aboutit dans une impasse, nous reviendrons à cette définition...

fixe entre deux décimaux" cohabitent, et sont en conflit. Voici quelques phrases issues des dialogues sur ce sujet :

– Mais dans ce cas-là, s'il n'y a pas d'écart, il n'y a pas de plus petit décimal.
– Si on montrait qu'il n'y a pas de plus petit décimal, ça aurait tendance à dire qu'il n'y a pas d'écart entre deux décimaux.
– Mais s'il y a un écart...
– Tu peux toujours trouver un décimal entre deux décimaux mais tu peux toujours trouver un écart entre deux décimaux aussi...
– Bon, alors il va falloir revoir un peu...
– Ouais ouais, parce que, y'a un léger conflit de théorie quoi !
– Mais non,
– Ouais, mais je suis désolé, si il n'y a pas de plus petit décimal, ça veut dire qu'il n'y a pas d'écart entre deux décimaux.
– Ben moi je me demande si tu peux pas justement démontrer ça en disant que comme y'a pas de plus petit décimal, il n'y a pas d'écart entre deux décimaux.
– Mais si, y'a un écart...

En parlant de "il y a un écart ou il n'y a pas d'écart":

– On peut dire ni l'un ni l'autre, on peut simplement dire qu'on peut toujours trouver un décimal entre deux décimaux.
– Ah mais, pas d'écart, ça veut dire quoi ? ça veut dire qu'après 0,1 y'a 0,1 ?
– Non, c'est plus, tu peux toujours trouver deux décimaux consécutifs.
– Dans ce cas-là, ça veut dire que t'as un écart, j'suis désolé !
– Dans ce cas-là, c'est tous les mêmes.
– Ah mais j'suis désolé, c'est vachement contradictoire ! Ben, on peut ni dire qu'il y a un écart, ni dire qu'il n'y en a pas, on dit qu'on peut toujours trouver un décimal entre deux décimaux.
– Si tu dis qu'il n'y a pas d'écart, là, les points sont confondus, enfin !
– Moi j'dis pas qu'il y a un écart, mais j'dis pas qu'il y en a pas non plus, c'est vrai...
– Il y a un écart absolument petit...un écart infiniment petit...
[Décryptages]

On peut constater que la taille de l'écart a évolué, le modèle de l'écart fixe entre deux décimaux consécutifs a été remis en cause.

3.3. A propos des fonctions et de leur représentation graphique

Les fonctions de {1,2,...n} dans lui même ont d'abord été représentées par des traits continus, le passage à des points isolés comme représentation graphique n'a pas été immédiat.

Mais il est à noter que dans ce travail sur les fonctions de {1,2,...n} dans lui même les connaissances des élèves sont suffisantes pour résoudre le problème et ils disposent d'un élément fort de contrôle perceptif sur les représentations graphiques qui les aide à découvrir les idées et à suivre les étapes de leur démonstration.

Par contre, pour les fonctions de D dans D, le dessin ne joue plus le rôle de contrôle perceptif, les élèves vont s'interroger sur diverses façons de représenter les décimaux.

La question de la possibilité de représenter une ligne de points à coordonnées décimales et de la signification à accorder à une telle représentation a été au cœur des discussions entre les élèves pendant plusieurs semaines.

Voici quelques exemples qui illustrent ces questions :

Sur la représentation de la figure a, chaque point décimal est représenté par un petit carré.

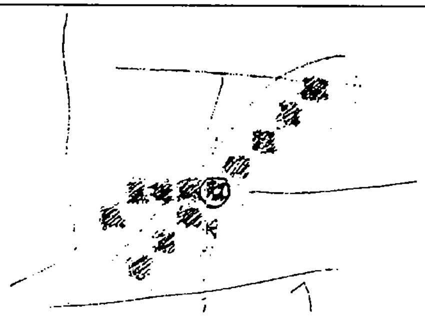


Figure a

"On considère par exemple que les décimaux, c'est juste un nombre sur deux, un carreau sur deux, bon..., c'est faux, bien entendu..."
[Décryptages]

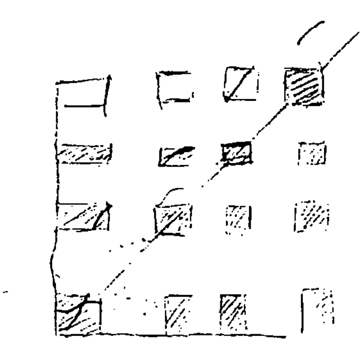


Figure b

En même temps, l'élève fait le dessin reproduit figure b.

Ces représentations, qu'on peut qualifier de type discret, sont à rapprocher de celle-ci, recodée par nos soins, car des couleurs différentes avaient été utilisées :

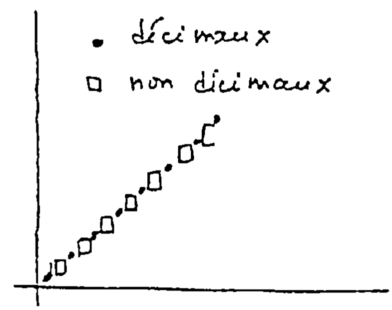


Figure c

D'autres représentations de type "continu" ont consisté à dessiner une ligne continue sur laquelle un point non décimal éventuel est spécifié de diverses façons (*cf.* figure d).

– On a vu que dans la droite des décimaux, y a des trous
– Voilà, on dit donc là y a des trous, hein...; la courbe est trouée, c'est une courbe trouée !
– Mais si, elle a des trous, c'est forcé qu'elle a des trous...
– Bon alors, elle a des trous ou elle en a pas ? c'est du gruyère ou du fromage ?
[Décryptages]

Les élèves se sont posés beaucoup de questions : comment faire une représentation graphique, quel usage peut-on en faire ? En voici quelques témoignages, issus des décryptages, au début d'une séance :

Jean Yves
ouais mais on peut relier les points pour étudier la fonction ce qui nous permet plus de facilité graphiquement.

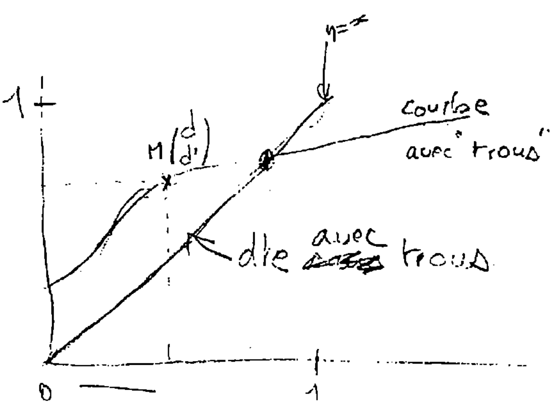


Figure d

et un peu plus tard :

Jean Yves
en fait on aura une ligne pointillée avec tantôt des décimaux tantôt des rationnels tantôt des réels qui s'entremêleront complètement et c'est pour ça qu'il faut qu'on relie nos points et qu'on travaille en courbe sinon on pourra rien faire.

Au départ, les élèves conjecturaient l'existence de points fixes pour les fonctions sur les décimaux, idée que semble conforter le dessin de type continu, alors que la représentation de type discret semble l'infirmer. A la suite de la remarque précédente de Jean Yves, et à la découverte d'une nouvelle propriété reliant réels et décimaux, l'un des élèves a exprimé un doute et suggéré un changement de conjecture :

Stéphane
Est ce que je peux te poser une question ?

Antoine
Ouais laquelle ?

Stéphane
C'est... est ce que la fonction f peut traverser le graphe... peut traverser la fonction... enfin peut couper la fonction y = x enfin en un point de coordonnées ee non décimales ?

Antoine
Non parce que ta fonction f c'est que des décimaux.

Jean Yves
Ouais mais si on relie si on...

Antoine
si on relie les points mais... ce sera pas un point de la fonction

Jean Yves
si on bouche les trous si on bouche les trous ben oui justement / est ce que ça peut... est ce que le croisement va se faire en un point qui n'a...

La conjecture est difficile a exprimer. Il y a un chemin conceptuel à franchir pour aller de "boucher les trous" à l'idée que la fonction considérée peut être obtenue par restriction d'une fonction sur les réels. Pour l'instant Antoine proteste contre ce mode de représentation du graphe :

Antoine
Si on relie les points ce ne sera pas un point de la fonction. [vivement] toi tu dis c'est ça toi, tu es obligé de faire avec des points, tu peux pas faire autrement

Jean Yves
ouais mais on peut relier les points pour étudier la fonction ce qui nous permet plus de facilité graphiquement

Voici ce qu'on peut voir sur le cahier à ce moment-là (extrait de cahier n°6).

Ce changement de regard va conduire certains élèves à chercher des contre-exemples.

3.4. A propos du plongement de D dans R

Tant qu'ils restent dans les décimaux, les élèves ne réalisent pas que les trous correspondent à d'autres nombres que les décimaux. Ils ne perçoivent pas d'emblée que si f est définie sur les décimaux, l'équation f(x) = x peut ne pas avoir de solution dans D, mais qu'un prolongement continu de f peut en avoir une dans un autre ensemble.

Notons d'abord que l'idée d'imbrication entre réels non décimaux et décimaux est apparue assez tôt, dès la période 2 :

–ça fait ça, décimal, décimal, réel machin, décimal, réel truc, rationnel, décimal, réel...., et là tu en as une infinité,
– entre les deux, tu as une infinité de réels, une infinité de rationnels, mais t'as aussi une infinité de décimaux...c'est ça qui est amusant
– c'est incroyable, ce truc
– c'est délirant, quoi !

Cependant, cette idée n'a pas été mobilisée ni exploitée tant que la certitude d'un point fixe dans D a subsisté (période 2 et une partie de la période 3).

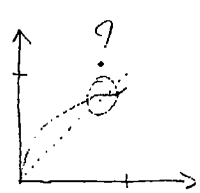
Les élèves savent qu'entre deux décimaux, il y a des réels non décimaux, mais c'est la propriété symétrique, concernant la présence de décimaux entre des réels quelconques qui a joué un rôle important dans l'apparition du changement de conjecture de la période 3.

Cette propriété nouvelle les surprend.

Nous retraçons ici, par des extraits significatifs de décryptages ordonnés

Extrait de cahier n° 6

* Est-ce que le graphe de la fonction f peut ~~passer~~ "traverser" le graphe de "y = x" sans "passer" par un point de "y = x" qui soit de coordonnée décimale ?



chronologiquement, le cheminement des élèves à partir de cette découverte.

Antoine
et je me demande si tu peux pas entre deux non c'est pas possible, entre deux rationnels mettre un décimal aussi
Jean Yves
oui je pense ouais
Jean Yves
tu as deux réels non décimaux est-ce que tu peux mettre un décimal entre les deux ?
Stéphane
ben ouais entre pi sur 4 et pi tu peux forcément mettre des décimaux
Antoine
ouais d'accord mais entre deux réels n'importe lesquels est-ce qu'on peut mettre un décimal
Jean Yves
tu dois pouvoir je pense

La discussion qui vient ensuite montre l'approfondissement de l'idée qu'il est possible que le croisement se fasse en un point à coordonnées non décimales, c'est à dire sur un "trou". Les élèves buttent sur la difficulté à caractériser les "trous" des décimaux comme des réels non décimaux

Stéphane
justement admettons qu'il y ait un trou et que ce trou là se trouve sur un réel
Antoine
non mais s'il y a un réel ici la courbe ne peut pas passer dedans /aucun point de la courbe n'englobe aucun réel
Stéphane
Antoine les trous de notre courbe sont constitués par quoi... par des réels
Antoine
des réels donc des non décimaux tout simplement

Stéphane
justement laisse moi finir / la courbe est constituée de trous et ces trous ne sont pas des réels

...

Stéphane
pourquoi c'est pas possible que ça fasse comme ça... parce que justement il se trouve un trou pile à l'intersection
Antoine
ouais mais là dedans tu as des décimaux aussi
Jean Yves
tu as normalement un point en tout qui a une image dans le trou

...

Antoine

...

mais toi ce que tu disais elle passe à un endroit, elle peut pas passer à un endroit où c'est réel
Stéphane
je voulais dire moi puisqu'elle est constituée de trous, il se peut qu'un trou se trouve à l'intersection avec la droite
Antoine
ça choque parce qu'elle y passera pas, ça ne fera pas partie de la droite

Après l'optique "boucher les trous" adoptée auparavant, on peut noter maintenant l'inversion consistant à dire que le graphe est constitué de trous. Ce changement de point de vue nous paraît à relier avec l'idée, apparue la semaine suivante, qu'on peut considérer le graphe d'une fonction définie sur les réels et utiliser sa restriction à D.

C'est Antoine qui viendra alors avec les contre exemples montrés dans l'extrait de cahier n° 2.

Ceci nous montre le chemin parcouru par les élèves pour réorganiser leurs connaissances sur les nombres et les fonctions de façon opérationnelle et résoudre le problème dans D.

3.5. A propos de la possibilité de faire la droite avec des points...

Voici quelques extraits qui, à des moments divers, montrent les conceptions des élèves à propos des objets droites et points, qui leur sont pourtant conceptuellement familiers, mais que ce problème interroge d'une façon surprenante et dérangeante pour eux :

– Si y'a pas d'écart, ça veut dire que c'est une droite, tous les points sont liés.
– C'est des points, d'accord, mais ils sont tellement proches que ça fait une droite.
– Mais est ce que tu pourras en mettre tellement qu'à la fin si tu mets tous les points au milieu des deux autres, au bout d'un moment, tous tes points formeront une droite ?
...
– T'as des points, tchac tchac, t'en mets plein entre, toudoudoudoudoudoudoudoudou, ouais, tu vois, ça fait plein de points, hop,tu vois, tu fais un zoom et tu verras...
C'est une suite de points... enfin c'est une infinité de points... une série de points qui est mise bout à bout, ça donne une forme.
– Regarde, t'as deux points, tu peux mettre un autre point ici, mais tu peux aussi mettre un espace
...
– Parce qu'ici, tu peux mettre 10 poireaux, et tu mets trois poireaux, mais un poireau ça prend de la place et un point ça prend pas de place...
– La droite, c'est que des trous.
– Comme c'est une droite, c'est une infinité de points.

Ces dialogues évoquent les problèmes de l'infini et du continu, qui ont été moteurs en mathématiques et sont restés vivaces depuis l'antiquité jusqu'au XIX^{e} siècle.

Citons par exemple Aristote (d'après "Faire la droite avec des points", dans *Histoire d'infini,* Actes du Colloque Inter-Irem d'épistémologie et d'histoire des mathématiques) :

"Si la continuité, le contact, la consécutivité obéissent aux définitions précédentes, il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles, par exemple qu'une ligne soit formée de points..."

Et Bolzano, dans un mémoire de 1817, à propos des propriétés qu'on pourrait exiger du continu, qu'il est en train d'essayer de caractériser (d'après le même document) :

"Que peut-on exiger de plus ? Certains répondront : que chaque point ait un voisin en contact immédiat avec lui-même ! Cette demande est cependant une impossibilité claire, et recèle une contradiction. Car quand dirons nous que deux points se touchent ?... Soit un point a une partie en commun avec l'autre, et alors ils coïncident. Soit c'est quelque chose de différent, et les deux doivent se trouver séparés, laissant la place pour un point intermédiaire, et donc pour une infinité d'autres, puisque l'argument peut être appliqué à nouveau au premier point intermédiaire."

Les élèves ont rencontré également la question de la comparaison du nombre de points de deux segments, ou d'une droite et d'un segment.

> *– Si tu prends deux segments quelconques, bon, ils ont le même nombre de points.*
> [suit la preuve, dessin à l'appui, de la mise en bijection des points des deux segments grâce à une homothétie : *bon, tu te débrouilles, tu les mets... parallèlement,tu traces les droites qui passent par les extrêmités...*)]
> *Donc ça fera l'infini, une infinité ici, et c'est la même infinité.*
> *– Alors on peut dire que sur une droite, si on prend deux points, entre ces deux points on peut dire qu'il y a autant de points que sur toute la droite ?*
> *On ne sait pas combien mettre de points sur toute la droite.*
> *– En fait il y en a une infinité..., quel que soit l'endroit où tu prends ton segment.*
> *– On peut pas comparer une infinité par rapport à une autre infinité.*

Ceci nous montre que les élèves se sont intéressés à des questions non directement reliées au problème à résoudre, lequel joue d'une certaine façon le rôle d'un catalyseur.

4. MAIS OÙ SONT LES NOMBRES DANS LES CONTENUS DE PROGRAMMES ?

Les observations précédentes nous amènent à nous interroger sur les programmes actuels. Leur texte est rédigé en plusieurs parties, que la plupart des enseignants interprètent ainsi :

> *– une première partie comprenant des généralités : intentions majeures, organisation de l'enseignement, objectifs, recommandations aux enseignants...*
> *– une seconde partie donnant les contenus mathématiques détaillés, qui précise clairement, au besoin par la négative, les limites des connaissances à faire acquérir aux élèves : en clair, ce que les programmes de collège appellent l'exigible, mais qui se retrouve également dans ceux de lycée, sous une autre forme.*

L'attention des enseignants se porte tout naturellement en priorité sur cette seconde partie.

La suite de ce paragraphe propose un parcours rapide de la façon dont les nombres et les ensembles de nombres interviennent dans les programmes, en tenant compte de la distinction précédente.

Au collège, les élèves apprennent à manipuler différentes écritures : entiers, décimaux, fractions, racines carrées. Mais ces formes ne recouvrent pas les différentes sortes de nombres : $\sqrt{9}$ n'est pas un irrationnel, 12,0 est un entier... L'utilisation de règles de calcul spécifiques à chacune de ces écritures peut induire, chez l'élève l'idée qu'elles sont caractéristiques des différents types de nombres.

A aucun moment, la différence de nature entre les diverses sortes de nombres rencontrés n'est un objet d'étude mentionné dans les contenus des programmes. Les élèves peuvent rencontrer le mot "irrationnel" lorsque sont introduits les nombres qu'on ne peut pas écrire autrement qu'avec le symbole $\sqrt{\ }$. L'usage des calculatrices est habituel, et peut renforcer la confusion entre un nombre et une de ses valeurs décimales approchées.

La suite des apprentissages numériques et algébriques au lycée est, selon les recommandations des programmes, axée sur la résolution de problèmes, et met en jeu la résolution d'équations, d'inéquations, de systèmes, puis l'étude de fonctions définies sur un intervalle et de suites simples.

Là encore, l'étude des différences de nature entre les nombres ne figure pas dans les contenus de programmes.

En Seconde, la notion d'approximation décimale d'un nombre a est inscrite dans le contenu du programme. Ce peut être une occasion d'introduire des distinctions entre les différentes sortes de nombres, mais rien n'oblige à le faire, tout dépend du choix des exercices proposés.

Dans le programme de Seconde, les ensembles de nombres N, Z, Q, R, sont cités une seule fois : dans le paragraphe "Objectifs et capacités valables pour l'ensemble du programme" sous la rubrique "Vocabulaire et notations", et il est précisé qu'"il s'agit d'un simple vocabulaire", et qu'"aucun développement n'est au programme".

La suite du programme de Seconde, et également celui de Première ne parlent plus du tout de l'ensemble R : curieusement, même la partie d'analyse est rédigée sans y faire référence, le contenu des programmes parle simplement de "fonctions définies sur un intervalle"(ou sur une réunion d'intervalles).

Au cours de la classe de Première, une occasion de travailler (indirectement) sur les différentes sortes de nombres est l'étude des suites. Là encore, tout dépend des exemples choisis, et le contenu du programme mentionne seulement :

> "Exemples simples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre (aire, volume, racine carrée)" en précisant que "sur les exemples étudiés, on pourra mettre en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme d'approximation, étude de la suite ainsi obtenue, obtention de la précision visée".

Le programme de Terminale peut être l'occasion d'aborder les ensembles de nombres au moment de l'introduction des complexes, mais "aucune méthode d'introduction des nombres complexes n'est imposée". Bien que ce ne soit pas dans la lettre des programmes, une pratique assez courante à ce moment de l'apprentissage est de reprendre les ensembles de nombres depuis N en montrant leur insuffisance en ce qui concerne la résolution de certaines équations, et l'extension progressive de ces ensembles en d'autres qui conservent les propriétés opératoires des premiers, pour parvenir à C. Mais il s'agit alors d'un choix de l'enseignant, et non de contenus de programmes.

Globalement, on peut observer que les nombres sont travaillés dans un cadre algébrique, mais que l'aspect topologique est délaissé au moins dans le libellé des programmes, et vraisemblablement dans les usages d'enseignement.

On voit avec ce résumé rapide que pour des élèves de Première comme ceux qui ont été observés dans l'expérimentation présentée, on ne pouvait pas s'attendre à une familiarité avec les divers types de nombres rencontrés, et moins encore à une expérience même sommaire de la proximité des rationnels et des décimaux et de l'imbrication de ces deux structures du point de vue de l'ordre, qui est en question dans ce problème.

5. QUELQUES RÉFLEXIONS SUGGÉRÉES PAR CE TRAVAIL À PROPOS DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Ces observations confirment des résultats déjà connus dans le domaine de la didactique des mathématiques, et les hypothèses constructivistes sur lesquelles elle s'appuie.

Elles nous interrogent par ailleurs sur l'enseignement de l'analyse tel qu'il est actuellement défini par les programmes et pratiqué en général.

– Ce travail, que les élèves ont conduit sur plusieurs mois, nous est apparu essentiellement comme un travail de mûrissement des concepts, rendu possible grâce au long temps sur lequel il s'est déroulé.

Les décryptages étudiés fournissent des exemples de l'évolution des représentations et des conceptions des élèves, essentiellement à propos des nombres et des fonctions : plusieurs conceptions contradictoires peuvent cohabiter chez le même élève, l'évolution ne se fait pas de façon linéaire, il y a des retours en arrière, des remises en cause,bientôt à leur tour contestées.

Les mêmes obstacles reviennent de façon récurrente, et il faut un temps long pour mesurer l'avancée des élèves. A l'échelle d'une séance, on a souvent l'impression qu'ils tournent en rond, alors que sur le long terme, on mesure bien les progrès réalisés. Le facteur temps apparait comme fondamental dans ce travail.

– Il arrive qu'une démonstration, même produite par les élèves, ne fasse pas preuve pour tous, quand son résultat entre en conflit avec les représentations qu'ils véhiculent.

Par exemple, la démonstration de la propriété "il n'y a pas de plus petit décimal" a été faite par les élèves, et ils semblent convaincus de ce résultat. Le modèle des décimaux "consécutifs", avec un écart fixe de l'un à l'autre, qui est décalqué de celui des naturels, a été repéré comme contradictoire avec cette propriété, et cependant il subsiste pendant deux séances au moins, est abandonné, puis émerge à nouveau plus tard.

Il faut reconnaître que le saut entre ces deux propriétés est très important : on a d'une part un résultat local, établi au voisinage de zéro, d'autre part une conception globale de l'ensemble des décimaux, qui s'ancre sur le modèle antérieur des naturels

Devant cette contradiction, tout se passe comme si la démonstration était un discours qui, bien que produit et construit, aurait du mal à entamer "l'intime conviction" des individus.

La validité du raisonnement ne suffit pas, il faut encore que le sujet puisse comprendre le sens de la propriété produite en le reliant de façon cohérente à ses autres connaissances.

– La résolution de problèmes est un cadre

pertinent pour ce travail de mûrissement des concepts

Le problème qui est présenté ici s'est révélé à l'usage particulièrement intéressant de ce point de vue. Certains obstacles forts, constitutifs des concepts en jeu, avaient été prévus au départ, mais d'autres supplémentaires sont apparus en cours de recherche.

On peut après coup essayer de relever quelques caractéristiques relatives à la pertinence d'un problème par rapport à ce type de travail :

– Les concepts, ici ceux de fonction, de nombres, ne sont pas travaillés pour eux mêmes, ils apparaissent comme des outils finalisés indispensables à la résolution du problème.

– Les élèves connaissent les objets mathématiques en jeu, ceux-ci leur sont suffisamment familiers pour qu'ils puissent rentrer rapidement dans le problème et aborder la résolution sans crainte. Mais la définition qu'ils ont de ces objets n'est pas toujours opératoire pour la résolution.

Cet écart entre le niveau des connaissances disponibles et celui des connaissances nécessaires, est un indicateur de pertinence du problème.

– Le rapport au temps des divers acteurs, très inhabituel, influence la nature du travail qui se déroule

Les élèves ne s'impatientent pas de ne pas aboutir rapidement, il semble au contraire que cette liberté dûe au temps ouvert et à la complexité du problème permette un changement des enjeux : il ne s'agit plus pour eux de réussir à répondre vite, mais bien plutôt de comprendre.

Voici ce que disent les élèves dans un interview qui a lieu à la fin de l'année scolaire, dans la réponse à la question "Pourriez vous décrire votre recherche ?"

Je pense en fait que dans un premier temps, d'abord, il a fallu qu'on comprenne bien notre sujet, donc bien comprendre ce qui nous était demandé, ça nous a pris... ce n'était pas évident dès le début
– ça nous a pris quatre mois [rires]
– Mais après, on est... ça nous a aidé... ça nous a quand même bien clarifié ce qu'on avait à faire.
– Après là, une fois qu'on avait trouvé, on s'est posé d'autres questions

Le rapport au savoir qui s'installe est profondément modifié.

Pour ce qui est des enseignants engagés dans ce travail (l'un directement en charge de l'atelier, d'autres qui observent), nous avons constaté que quitter le contexte d'enseignement n'allait pas de soi. Cela nous a imposé un effort de tolérance et de réflexion par rapport à l'obligation de rentabilité à laquelle nous nous contraignons habituellement.

EN GUISE DE CONCLUSION

L'approche des concepts de l'Analyse qui a pu avoir lieu dans le cadre décrit nous renvoie bien évidemment à l'impossibilité de reproduire, dans le contexte d'enseignement, un dispositif semblable.

Ce travail souterrain, incompressible dans le temps, de mûrissement des concepts, semble pourtant indispensable pour une compréhension de ce qu'est l'Analyse.

Le fait de prendre le temps de laisser s'exprimer les conceptions des élèves, de laisser travailler leur intuition première, leur permet de constater en actes qu'une construction est nécessaire pour dépasser les contradictions que cette intuition immédiate produit.

Citons Dedekind, qui écrit, à propos de sa construction des nombres réels :

> "Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps"
> (*Histoire d'infini*)

Divers travaux en didactique des mathématiques qui explorent des pistes concernant l'apprentissage des ensembles de nombres ont été conduits (*cf.* Brousseau, Douady).

Ils ouvrent des perspectives intéressantes pour une genèse plus précoce de ces apprentissages, en lien le plus souvent avec la problématique de la mesure, et concernent surtout l'école ou le collège.

Un objectif raisonnable au lycée pourrait être, à propos des nombres réels, de donner aux élèves l'occasion de mettre en œuvre leurs conceptions des nombres.

Car il nous semble que si une construction axiomatique complète n'est pas du tout à viser, en revanche la construction d'une intuition correcte des réels qui ne fasse pas obstacle pour la suite des apprentissages à l'université, est possible, et souhaitable.

Des recommandations actuelles des programmes, données dans la première partie de leur texte (*cf.* 4), incitent les enseignants à travailler les notions inscrites dans les contenus en utilisant la résolution de problèmes et l'étude de situations variées. Il nous semble possible, conformément à ces instructions, de trouver des situations suffisamment riches pour permettre aux élèves d'acquérir une perception des réels qui soit correcte, même si elle reste incomplète. Des questions telles que "J'ai un décimal, je te mets au défi d'en trouver un autre plus petit" ou "Peut-on trouver un rationnel non décimal, un irrationnel, entre deux décimaux ? " peuvent être l'objet de débats féconds.

Mais nous constatons qu'actuellement, la prise en charge de situations favorisant ce point de vue est laissée au choix de l'enseignant, et ne fait pas partie des savoirs directement exigibles, inscrits dans les contenus des programmes. Ces choix d'enseignement sont évidemment déterminés par des facteurs internes à la personnalité de l'enseignant, comme son épistémologie propre, son rapport à l'institution, mais ils sont aussi influencés par d'autres facteurs, comme l'évolution des conditions du métier d'enseignant (réduction des horaires d'enseignement, demande sociale pour intégrer et faire réussir des élèves en difficulté, hétérogénéité du public au sein d'une même classe...).

Il serait souhaitable qu'une incitation claire à faire travailler les élèves sur l'imbrication entre entiers, décimaux, rationnels, et réels du point de vue de l'ordre, soit inscrite dans le contenu des programmes, appuyée d'exemples d'activités à proposer à divers niveaux.

La question est alors de savoir si l'institution peut reconnaitre un statut à cette forme de connaissance non stabilisée, difficile à préciser, et si le coût à payer en temps lui paraît acceptable.