REPERES - IREM . N° 24 - juillet 1996

MASQUES

Nous ne voyons pas seulement des formes, mais des significations (1)

Luc TROUCHE
Irem de Montpellier

L'introduction, puis la généralisation, des calculatrices dans les classes, ont suscité des interrogations, ou des inquiétudes, parmi les professeurs de mathématiques : n'y allait-il pas y avoir concurrence entre leur enseignement, et les informations issues des "étranges lucarnes" ?

Pour ceux qui, pédagogues ou didacticiens, réfléchissent aux conditions d'enseignement dans la classe, les questions n'étaient pas tout à fait les mêmes : la généralisation d'outils de calcul puissants allait-elle permettre de se concentrer sur les tâches de conceptualisation, en allégeant les tâches, répétitives, de calcul ? Qu'allait-il advenir de l'apprentissage même de ces mécanismes de calcul ?

Une question plus précise sera ici étudiée : au delà de la modification du contrat dans la classe qui lie le maître et l'élève, au delà d'une modification possible de l'enseignement lui même, y a-t-il modification des notions mathématiques apprises par l'élève ?

Autrement dit, y a-t-il modification non pas seulement des conditions de l'apprentissage, mais des résultats mêmes de celui-ci ?

Question qui d'ailleurs peut se subdiviser en deux :

– l'élève apprend-il la même chose

(1) Wittgenstein, cité par Bouveresse, 1995, *Langage, perception, et réalité*, Edition Jacqueline Chambon.

quand il travaille avec, ou sans, sa calculatrice ?
– dans le cas où les connaissances construites ne sont pas les mêmes, comment sont-elles combinées dans le cadre de la résolution d'un problème ?

C'est à ces questions que l'on va tenter de répondre, en observant plus précisément l'apprentissage de la notion de limite de fonction (2).

Il s'agira de montrer en quoi la calculatrice fait écran entre cette notion mathématique et l'élève, et d'indiquer quelques pistes, non pas pour faire tomber les masques, ce qui est impossible, mais pour révéler à l'élève - et au maître- la présence et la fonction des masques sous lesquels la calculatrice présente les objets mathématiques.

LES LIMITES D'UNE CALCULATRICE

Les calculatrices... Quelles calculatrices ?

Les calculatrices dont il sera fait état ici sont des calculatrices graphiques, sans calcul formel. Parce que ce sont elles qui, pour le moment, sont à disposition des élèves dans les classes (tous les élèves en Terminale scientifique, une bonne majorité des élèves en 1re S).

On pourrait se poser deux questions à ce sujet :

– dans les résultats observés chez les élèves, qu'est-ce qui relève du graphisme, et qu'est-ce qui relève du calcul approché fait par la machine, et lu sur l'écran ?
– les conclusions de cet article seront-elles transférables aux travaux réalisés avec la nouvelle génération de calculatrices (type TI-92), comportant un logiciel de calcul formel (c'est à dire pouvant, entre autres capacités, manipuler dans des calculs des "valeurs exactes" comme par exemple π) ?

Disons, pour contourner ces questions, que ce qui suit s'applique aux calculatrices faisant *des graphiques, des calculs approchés*, qui sont *portables*, et *propriété personnelle* des élèves, sans qu'il soit question ici de distinguer ce qui est cause des effets constatés.

On indiquera, quant aux calculatrices "formelles", quelques hypothèses de travail, issues d'une expérience menée cette année dans une classe de TS dotée de TI 92 (3).

Pourquoi la notion de limite de fonction ?

Pour cerner le plus précisément possible l'effet des calculatrices, il fallait choisir une notion mathématique particulière.

Les critères de choix de cette notion étaient de trois ordres :

– un ordre d'utilisation : il fallait que l'abord de cette notion soit l'occasion d'une mobilisation "naturelle" de la calculatrice

(2) Il s'agit de travaux effectués dans le cadre d'une thèse, préparée sous la direction de D. Guin, Université de Montpellier II.

(3) Un bilan de cette expérience sera publiée dans un document CRDP / IREM de Montpellier en Septembre 1996. NB: les graphiques de cet article sont réalisés à partir de copies d'écran de TI 92.

par les élèves, tant sur le plan graphique que sur le plan des calculs approchés ; c'est bien le cas des limites de fonction, ainsi qu'en témoigne l'enquête qu'on évoquera plus loin ;

– un ordre "technico-mathématique" : il fallait qu'il y ait un écart assez grand entre l'objet mathématique et l'image qu'en donne une calculatrice ; c'est le cas de la limite d'une fonction : une machine ne donne accès ni à l'infiniment grand, ni à l'infiniment petit ;

– un ordre d'économie didactique : il fallait une notion mathématique pour laquelle des études didactiques avaient déjà repéré les obstacles rencontrés par les élèves, les différentes conceptions, les procédures mises en oeuvre dans la résolution de problèmes ; la notion de limite, sujet de nombreux travaux (4), convenait encore sur ce point.

Limites, *quid* ?

Dans ce qui suit, il sera plus particulièrement question des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ quand la variable, x, tend vers $+\infty$. Cela impose d'abord que la fonction soit définie (au moins) sur un intervalle du type $[a, +\infty[$, comme la fonction représentée figure 1.

Dire que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie alors que : quel que soit le nombre B que l'on se donne, il est possible de déterminer A tel que, si x est plus grand que A, alors f(x) est plus grand que B. On verra une illustration sommaire de cette situation dans la figure 2 ci-dessous.

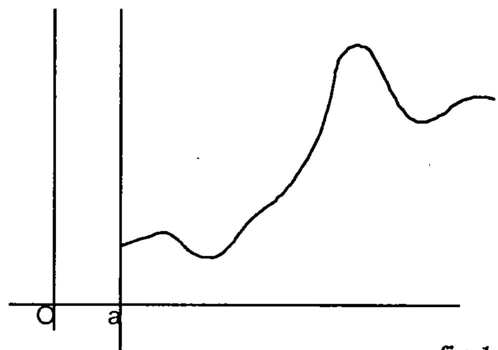


fig. 1

Le respect de la définition suppose que, à partir de A, f(x) reste supérieur à B, c'est à dire que "la courbe de f ne passe plus dans la zone hachurée".

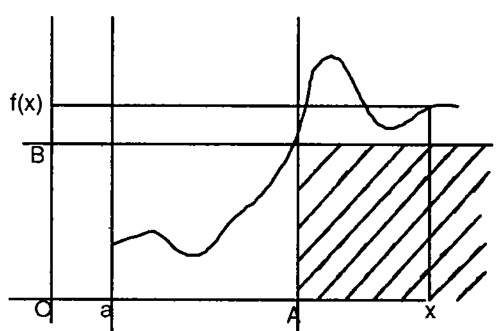


fig. 2

Cette définition est, comme on le voit, assez délicate :

– on constate que, pour un B donné, A n'est pas unique (tout A' supérieur à un

(4) En particulier :
– Sierpinska A., 1985, *Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite*, RDM, 6.1 ;
– Cornu B., 1983, *Apprentissage de la notion de limite, conception et obstacles*, Thèse de Doctorat, Grenoble ;
– Robert A., 1982, *Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Thèse de Doctorat, Paris VII.

A convenable convient encore) ;
– aucune hypothèse n'est faite sur le sens de variation de la fonction, à aucun moment ;
– on choisit d'abord B dans l'ensemble d'arrivée, avant de déterminer A dans l'ensemble de départ, à l'inverse de la "démarche naturelle" d'étude des fonctions (le choix de x, puis le calcul de f(x)) ;

Cette définition a été jugée assez délicate par les concepteurs des programmes pour reporter son introduction précise en première année des études universitaires.

Avant le baccalauréat, les élèves ne découvrent, en Première et Terminale, que le "langage des limites" :

– on exhibe des fonctions dont on dit qu'elles admettent pour limite 0, ou $+\infty$;
– les instructions suggèrent (5) "d'interpréter graphiquement et numériquement les notions et les énoncés [...] afin d'éclairer leur signification" ;
– les fonctions de référence permettent ensuite, soit par comparaison (minoration, majoration, encadrement), soit par opération (addition, multiplication, composition), de traiter les exercices ou problèmes.

Dans ces conditions, l'idée qu'un élève se fait des limites au lycée est très marquée par les "éclairages" graphiques et numériques, pour lesquels les calculatrices graphiques jouent nécessairement un grand rôle.

(5) Programme de TS, BO n° 2 spécial du 2 Mai 1991.

Conceptions, obstacles, et hypothèses

Globalement, on peut distinguer quatre conceptions d'une limite :

– *Une conception "primitive" :* une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est une fonction qui prend de grandes valeurs pour les grandes valeurs de la variable. C'est ce que les élèves observent pour les fonctions puissances par exemple. Cette conception, très répandue en classe de seconde va se transformer assez vite en obstacle car elle ne permettra pas de comprendre pourquoi des fonctions "à croissance lente", comme la fonction logarithme par exemple, tendent aussi vers $+\infty$;

– *Une conception "monotone" :* une fonction qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ est une fonction croissante (ou croissante à partir d'une certaine valeur de la variable). L'idée s'installe en effet assez vite que, "pour devenir très grand, il faut grandir sans cesse". Cette idée trouve même un regain de vitalité à l'Université, avec la découverte de la définition formelle de la limite : on passe vite de "$x > A$ implique $f(x) > B$" à "$x > A$ implique $f(x) > f(B)$, ce qui ressemble d'assez près à la définition de la croissance d'une fonction... Cette conception, qui intègre bien les fonctions à "croissance lente" comme les logarithmes, va aussi se constituer en obstacle car elle ne permet pas de comprendre pourquoi des fonctions qui "oscillent " peuvent tendre vers $+\infty$, et pourquoi des fonctions strictement croissantes ne tendent pas forcément vers $+\infty$;

– *Une conception "non majorée" :* une fonction qui tend vers $+\infty$ est une fonction qui peut prendre des valeurs plus grandes que tout réel fixé. Cette conception, fréquente en première année universitaire, est liée à la confusion entre condition nécessaire et condition suffisante : une fonction qui tend vers +∞ "n'a pas de plafond", mais une fonction qui n'a pas de plafond ne tend pas nécessairement vers +∞... Ainsi la fonction qui à x associe x.sinx n'est pas majorée, mais n'admet pas pour limite +∞ ;

– *Enfin la conception de l'expert,* qui repose sur une compréhension de la définition mathématique.

Il est clair que ces "conceptions" sont des modélisations de comportements d'élèves en situation, et que certains comportements peuvent se rapporter à des conceptions "intermédiaires". Ainsi la rencontre du "théorème des fonctions croissantes non majorées" (6) peut induire une conception intermédiaire entre la conception "monotone" et la conception "non majorée", du type "une fonction qui tend vers +∞ est nécessairement une fonction croissante non majorée. On retrouve d'ailleurs là une confusion entre condition nécessaire et condition suffisante.

Cependant, cette classification des conceptions apparaît opérationnelle pour analyser les comportements des élèves, de la découverte du "langage des limites" à la maîtrise complète (ou presque) de cette notion, comme on le verra dans l'enquête présentée plus loin.

(6) Toute fonction croissante sur [a, +∞[, non majorée, admet pour limite +∞ quand x tend vers +∞.

Mon hypothèse est que la manipulation non maîtrisée de la calculatrice va tendre à renforcer les deux premières conceptions (7) :

– *la conception "primitive" :* il est tentant, et peu coûteux avec une machine, de rechercher de nombreuses valeurs de f(x) pour x est grand. Le calcul est immédiat. Et de "nombreux" résultats concordants inciteront à conclure que la fonction tend bien vers +∞ ; une fonction qui tend vers +∞ quand x tend vers +∞ est bien ainsi une fonction qui "prend de grandes valeurs pour x grand".

– *la conception "monotone" :* il y a un caractère producteur très fort de l'écran de la machine (8). Ce qui est à l'extérieur de l'écran est censé se comporter comme continuation de l'écran lui même. Ainsi l'étude de la fonction sur un intervalle "suffisamment" grand donnera, pour l'élève, une idée du comportement global de la fonction. L'allure générale de la courbe sera donc censée donner, ou induire, la limite "aux frontières" de l'épure. Dans ce mouvement, l'étude des limites d'une fonction se ramène à l'étude des variations de la fonction. Prouver qu'une fonction tend vers +∞ revient bien dans ce cadre à prouver que la fonction est croissante...

C'est ce que nous allons vérifier, en observant des productions d'élèves.

(7) Ce qui est lourd de conséquence, puisque ces deux conceptions se rencontrent surtout au lycée, au moment où la calculatrice est le plus sollicitée... On le voit, l'"éclairage numérique et graphique" dont parlent les commentaires du programme pourrait être ainsi assez aveuglant !

(8) Sur ce point, voit l'article "Anatomie d'une déréglementation", dans les *Dossiers de l'Ingénierie Educative*, nº 19 de Mars 1995.

Une remarque préalable : il est assez difficile de suivre de près le travail d'un élève avec une calculatrice. La petitesse de l'écran, du clavier, entraîne une certaine "intimité" de l'usager avec son outil. Un observateur extérieur ne peut suivre que l'activité d'un seul élève à la fois (et encore en étant très près, et en faisant un gros effort d'attention).

Voilà pourquoi il a été envisagé un double dispositif de repérage du comportement des élèves :

– une enquête sur une population assez importante d'élèves (une centaine en TS, une centaine en Deug A), où l'on repèrera ce que chaque élève dit lui même de sa propre activité ;
– l'observation de couples d'élèves travaillant ensemble, de telle façon que l'exigence de communication interne favorise l'explicitation des démarches.

QUESTIONNAIRE CROISÉ TS/DEUG A

Ce questionnaire (9) a été donné à trois classes de TS (73 élèves), et à un amphi de première année de Deug A (100 élèves), en Avril 1995. Le choix de ces deux niveaux était justifié par le fait que c'est en Deug que les élèves découvrent une définition formelle de la limite. Il était intéressant donc de voir l'impact de cette définition sur les conceptions repérées.

Le travail a été présenté comme n'entrant pas en compte pour la moyenne (en TS), ou pour le passage en classe supérieure (en Deug). Cependant, pour assurer un certain sérieux au travail des élèves, il a été précisé que les résultats seraient communiqués au professeur responsable, pour information. Il a été proposé à chaque groupe de choisir dans un premier temps entre deux modalités de composition (avec, ou sans, calculatrice).

Surprise pour chacun des groupes interrogés : une grosse majorité des élèves préfère composer sans calculatrice (même ceux qui sont familiers de son utilisation). L'origine de ce refus est assez simple : les élèves expliquent que la calculatrice n'est jamais prise en compte par le professeur. Donc son utilisation est de type privé (10). Et on ne peut pas réintroduire subrepticement la calculatrice au détour d'un contrôle. "C'est pas du jeu"...

Le rééquilibrage des groupes avec et sans calculatrice est fait d'autorité, pour bénéficier de groupes d'effectifs comparables.
Quelles leçons tirer du dépouillement du questionnaire ?
Sur plusieurs points :

Sur les conceptions auxquelles on peut rattacher les définitions données par les élèves

Après des questions relatives à l'utilisation des calculatrices ("Utilisez-vous votre calculatrice beaucoup, régulièrement, de temps en temps, rarement, pas du tout"), on posait les deux questions suivantes

(Q1) Que veut dire $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$?

(9) On pourra trouver des éléments plus complets sur ce questionnaire dans les Actes du Colloque Inter-Irem d'Analyse de Juin 1995 à Jussieu.

(10) Sur ce point, voir Trouche, 1992, *Calculatrice graphique, statut pour l'élève, statut pour le maître*, Mémoire de DEA de didactique, Montpellier II. Depuis 1992, il ne semble pas que les choses aient beaucoup évolué...

(Q2) Comment l'expliquer à un élève de seconde ?

La première question était délicate pour les élèves de TS, qui n'avaient pas de définition robuste à leur disposition. Ils se sont réfugiés dans des tautologies, du type "cela veut dire que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$"...

Pour les élèves de Deug, cette question apporte assez peu d'informations : la définition quantifiée exacte est connue par 29% d'entre eux, mais 35% donnent une définition quantifiée fausse, difficilement interprétable.

Pour rattacher les définitions données à des conceptions, il est plus simple d'utiliser les réponses à la question 2 : on peut faire l'hypothèse que l'effort explicatif fait pour un élève de seconde permet de mieux exprimer l'idée que l'on se fait de la chose en question.

On lira une classification de ces réponses dans le Tableau 1 ci-dessous.

	TS	**DEUG A**
Sans réponse	11	16
Tautologie	0	8
Conception primitive	30	29
Conception monotone	52	27
Conception non majorée	7	14
Conception de l'expert	0	6

Tableau 1 (en pourcentage des réponses)

La distinction des conceptions permet bien une classification des définitions données.

On observe une progression entre le niveau Terminale et le niveau Deug, mais une progression fragile. Ainsi certains étudiants, connaissant la définition formelle exacte, en donnent une traduction très frustre pour une élève de seconde, se rattachant à une conception primitive.

Cette classification a ses limites : il n'y a pas une stabilité, repérable dans le cadre de ce questionnaire, entre la définition donnée et le comportement de l'élève dans la résolution des exercices ultérieurs.

Par ailleurs, la réponse à cette question ne nécessitait pas l'utilisation d'une calculatrice. Cependant si on croise les réponses à cette question, et celles relatives à la familiarité avec l'outil, il apparaît quelques différences : il y a une proportion plus grande de réponses "primitives", et "monotones" parmi ceux qui utilisent beaucoup leur calculatrice, et aucune définition "experte". Mais la faiblesse des effectifs en cause, et la difficulté d'analyse de certaines réponses interdisent de tirer des leçons trop assurées de ces résultats.

Ce qui semble beaucoup plus intéressant, c'est l'observation des élèves en action, pour la résolution d'exercices où la calculatrice sera effectivement mobilisée.

Sur les résultats des exercices proposés

Il s'agissait ensuite de traiter l'exercice :

> Les fonctions suivantes admettent-elles pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$?
> Oui ❐ Non ❐ Je ne sais pas ❐
> Justifier à chaque fois théoriquement votre réponse.
> Illustrer cette réponse par un graphique adapté.

Suivaient une dizaine de fonctions "problématiques", dont par exemple lnx + 10sinx.

C'est la somme de deux fonctions qui sont des références pour les élèves. La première admet pour limite +∞, la deuxième est bornée, donc le résultat ne devrait pas poser de problèmes. Parmi les élèves *qui n'ont pas* de calculatrice, personne en effet (ni en TS, ni en Deug A) affirme que cette fonction n'admet pas pour limite +∞.

Mais parmi ceux qui ont une calculatrice, 25% en TS, 20% en Deug A, affirment que cette fonction n'admet pas pour limite +∞.

On comprend mieux cette erreur en observant la représentation graphique qu'offre l'écran d'une calculatrice pour cette fonction (*cf.* figure 3). L'élément qui semble emporter la conviction est le caractère oscillant du graphique. On observe les mêmes écarts dans les réponses aux autres questions.

On peut bien sûr estimer que ces écarts sont dus au caractère "pathologique" des fonctions données, et à la force persuasive des images renvoyées par l'écran. Cela rentre sûrement en jeu. Mais les procédures mobilisées par les élèves ont aussi leur importance.

Sur les procédures

Il faut distinguer les procédures générales annoncées avant l'exercice, les procédures déclarées dans la résolution, et les procédures effectivement mises en œuvre.

1. *Les procédures annoncées :* on demandait aux élèves d'annoncer, avant la résolution des exercices, quelles étaient les méthodes qu'ils connaissaient pour prouver qu'une fonction tend vers +∞ quand x tend vers +∞. Cette question fait directement référence au cours. Il n'y a pas de différence sensible entre les réponses des élèves familiers des calculatrices, et les autres. Il y a par contre des différences entre les élèves de TS et les étudiants de Deug A. Moins de procédures connues chez les premiers (2 par élève en moyenne) que chez les seconds (3 en moyenne). Et des différences notables pour certaines procédures : pas au niveau des opérations sur les limites, ou au niveau du recours aux fonctions de référence, qui ont à peu près le même

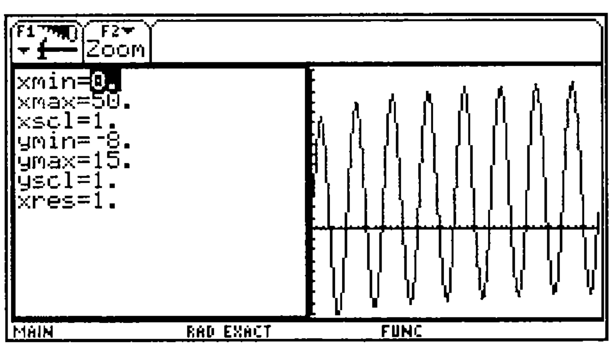


fig. 3

succès. Mais au niveau de l'étude des variations des fonctions (22% en TS contre 15% en Deug y ont recours pour obtenir les limites de f) et au niveau des théorèmes d'encadrement, ou de minoration (22% en TS contre 51% en Deug y ont recours).

Il semble bien que le progrès entre la classe de TS et le Deug réside dans la prise de conscience que l'étude des limites est une tâche spécifique, non obligatoirement liée à l'étude des variations de la fonction. Et dans la prise de conscience que, pour cette tâche spécifique, les théorèmes d'encadrement jouent un rôle important.

2. *Les procédures déclarées dans la résolution des exercices :* il s'agit des procédures écrites par les élèves pour justifier leurs réponses aux exercices de détermination de limite. Il y a là une différence sensible, cette fois-ci entre ceux qui ont, et ceux qui n'ont pas, de calculatrice. Deux exemples ci-dessous (tableaux 2 et 3 ci-dessous), qui témoignent du même phénomène :

– en TS les élèves qui ont une calculatrice évoquent davantage les variations des fonctions en présence, avec des phrases très ambigües : "la fonction ln croit plus vite que la fonction sinus", "la croissance de la fonction ln va finir par absorber les oscillations de la fonction sinus" ;
– en TS comme en Deug, les élèves qui n'ont pas de calculatrice évoquent davantage des stratégies d'encadrement pour prouver le résultat annoncé.

Il apparaît bien que l'utilisation de la calculatrice tire les élèves vers des procédures en rapport avec des conceptions plus "frustres".

3. *Les procédures effectivement utilisées :* il ne s'agit pas ici de dire que les procédures

	TS		DEUG A	
	Avec calc	Sans calc	Avec calc	Sans calc
Variations	30	10	0	0
Encadrement	30	45	60	80

Tableau 2 (en pourcentage des réponses)
Procédures utilisées pour étudier la limite de lnx + 10sinx

	TS		DEUG A	
	Avec calc	Sans calc	Avec calc	Sans calc
Variations	15	5	10	5
Encadrement	35	50	65	80

Tableau 3 (en pourcentage des réponses)
Procédures utilisées pour étudier la limite de x^2 + sinx

déclarées par les élèves ne sont pas les procédures effectivement utilisées. Mais il s'agit plutôt de considérer *l'ordre* dans lequel les choses se font. Il ne reste sur le papier (en général) que la fin du parcours de l'élève. Il a une *idée* de la limite de la fonction, et il exhibe dans l'arsenal à sa disposition une procédure qu'il estime convenable pour le maître. Mais ces traces écrites ne nous renseignent pas sur ce qui lui a donné *l'idée* de cette limite, sur *les premiers gestes* accomplis devant l'exercice.

Et là les observations, forcément partielles (11), des travaux des élèves vont toutes dans le même sens :

– les élèves qui ont une calculatrice commencent par observer la représentation graphique que leur donne la machine. Ils procèdent à des zooms successifs, tel le photographe de *Blow up* (12), et tentent de tirer du comportement global de la fonction des informations sur le comportement à l'infini. On pense aux phrases de Bachelard (13) sur "l'obstacle de l'observation première" : "Cette observation première se présente avec un luxe d'images ; elle est pittoresque, concrète, naturelle, facile. Il n'y a qu'à la décrire et à s'émerveiller. On croit alors la comprendre [...]. De l'observation au système, on va ainsi des yeux ébahis aux yeux fermés." C'est ainsi que procèdent certains élèves pour la fonction $x^2 + \sin x$. L'observation indique qu'il s'agit d'une fonction croissante sur $\mathbb{R}+$. C'est donc ce qu'ils vont prouver, par dérivation, estimant qu'ainsi ils auront établi que la limite était bien $+\infty$...

– les élèves qui n'ont pas de calculatrice travaillent sur la forme algébrique, essaient de se ramener à des formes connues par factorisation, ou par encadrement. La référence est ici directement le cours.

On comprend mieux ainsi l'écart entre les procédures utilisées par les élèves avec, ou sans calculatrice. Sans calculatrice, les références sont davantage actuelles, insérées dans un contexte de cours, et de connaissances récemment acquises. Avec calculatrice, les références sont plus profondes, liées aux expériences personnelles de l'élève, aux images présentes depuis longtemps.

Sur la forme de la rédaction

Les remarques ci-dessus ne sont pas sans conséquence sur le langage utilisé par les élèves dans la rédaction de leurs réponses. Le travail avec une calculatrice, objet familier pour l'élève, favorise le langage de la familiarité, au détriment du langage fonctionnel :

> "L'amplitude de cette augmentation n'a pas tendance à diminuer quand x augmente"
>
> "A terme, l'évolution de lnx absorbe celle de sinx"

De telles formulations sont ainsi fréquentes parmi les utilisateurs de calculatrice. Elles témoignent d'un double phénomène :

(11) Puisqu'il n'y avait qu'un seul observateur, l'auteur de ces lignes... D'autres travaux sont engagés cette année, avec un dispositif d'observation plus serré.

(12) Dans le film d'Antonioni (1966), le photographe essaie, par des zooms successifs, de tirer d'un cliché l'information voulue. Il s'agit en fait d'une quête de la vérité dans un monde où tout n'est plus qu'apparences, illusions du réel. L'analogie est facile...

(13) Bachelard G., 1938, *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin.

– comme déjà relevé, il y a un caractère d'"intimité" du travail avec une calculatrice : l'élève communique avec lui même avant de communiquer avec un éventuel lecteur ;
– il y a une traduction naturellement imagée de la lecture d'images : on ne rédige pas de la même façon quand on récupère dans sa tête des résultats issus d'un contexte de cours, et quand on suit sur un écran la trajectoire d'un point clignotant...

On peut émettre l'hypothèse que ce langage vague peut prêter à de nombreuses confusions...

Sur l'"économie de la résolution" (14)

L'absence de calculatrice contraint les élèves, pour des raisons d'économie, à rechercher "la" preuve décisive de la réponse avancée. Par contre, la présence d'une calculatrice autorise une multiplicité de gestes :

– pour $\ln x + 10 \sin x$ par exemple, un élève recherche de multiples valeurs pour x "grand", observe les oscillations de la courbe dans de multiples fenêtres, tente des manoeuvres d'encadrement, et refuse de conclure ;

– pour $\frac{e^x}{x^{50}}$ un élève applique justement un théorème du cours qui affirme que la limite est bien $+\infty$, mais utilise ensuite sa machine pour rechercher de nombreuses valeurs de la fonction pour x grand, qui ne semblent pas confirmer le résultat (15). Il refuse alors de conclure ;

– pour $x - 1000\ln x$, un élève étudie les variations de la fonction, calcule des valeurs pour x grand, factorise enfin pour utiliser un théorème du cours. Comme toutes les approches vont dans le même sens, il peut s'autoriser à conclure.

Il s'agit là de démarches qui fonctionnent par "accumulation de preuves". On peut les analyser de deux points de vue :

– du point de vue du professeur en charge de la classe. Si ces exercices sont repris par lui en cours, l'hésitation de ces élèves dans l'action pourra certainement préparer l'approfondissement de cette notion : une fonction qui "oscille" peut ainsi tendre vers $+\infty$, de même qu'une fonction qui prend "très longtemps" des petites valeurs, comme $\frac{e^x}{x^{50}}$. Il y a là source de progrès possible : pour franchir un obstacle, il faut s'y être affronté (au moins) une fois...

Alors que les élèves qui n'ont jamais observé le comportement de telles fonctions sur une calculatrice, et qui répondent mécaniquement (de façon juste d'ailleurs) par l'application de théorèmes du cours, n'ont pas nécessairement une compréhension très profonde de la notion de limite.

– du point de vue de l'observateur (neutre). Il est clair que les élèves qui ont une calculatrice abordent en général la

(14) Terme emprunté à Artigue M., *EIAO*, Eyrolles, Paris, 1995.

(15) La fonction a été choisie pour que la limitation de la machine (qui ne "connaît" pas les nombres au delà de 10^{99}) ne donne que de "petites" valeurs à f(x), aussi loin que l'on aille...

recherche d'une limite infinie dans le cadre simultanément des deux premières conceptions (la conception "primitive" : la fonction doit prendre de "grandes valeurs", et la conception "monotone" : la fonction doit être croissante, certains disent même "de plus en plus croissante"). Si cela n'est pas pris en compte par le professeur, on peut penser que les exercices précédents auront une fonction d'enracinement dans les dites conceptions...

OBSERVATIONS DE TRAVAUX DE BINÔMES D'ÉLÈVES

Que se passe-t-il quand l'élève est confronté à des résultats, qu'il estime contradictoires, issus de sa machine, et de ses connaissances antérieures ? C'est ce que l'activité qui suit permet d'observer. Il s'agit d'un travail donné à un groupe faible de 12 élèves de TS, en activité de "soutien". Les élèves sont regroupés par deux, et disposent tous d'une calculatrice. Les regroupements ont été faits de telle sorte que les élèves d'un même binôme disposent de la même machine, pour éviter que l'hétérogénéité des matériels ne constitue un obstacle à la confrontation des observations et des idées. L'énoncé est le suivant :

> Soit P le polynôme égal à :
>
> $$P(x) = -121011 - 14290.1989\,x + 5601.73023\,x^2 - 300.56003\,x^3 + 0.03\,x^4$$
>
> 1. Etudiez les limites de P en $+\infty$ et $-\infty$.
>
> 2. On veut résoudre maintenant l'équation $P(x) = 0$.
>
> *Pour cela, vous utiliserez votre calculatrice graphique, les résultats de la première question, et vos connaissances générales sur ce type de fonctions...*
>
> Vous reproduirez précisément sur feuille les graphiques apparus sur l'écran de votre machine et qui ont été utilisés dans la résolution (préciser à chaque fois la fenêtre d'affichage)
>
> – Combien de solutions semble avoir cette équation ?
> – Donnez un encadrement de chacune d'entre elles.
> – Utilisez tous les résultats obtenus pour tracer l'allure générale de la courbe de P.

L'énoncé de l'exercice, volontairement vague (combien de solutions *semble* avoir cette équation ?), invitait les élèves à tenir compte des apparences : la représentation graphique que donne la machine pour la fonction. La dernière question imposait de trouver une cohérence entre les résultats théoriques (en particulier ceux de la première question), et les apparences.

La fonction avait été (bien sûr) choisie pour une de ses particularité : la proximité de trois de ses racines (dont deux très proches), et l'éloignement de la quatrième (autour de 10000).

De sorte que, sur une fenêtre "standard", on voit ceci (*cf.* figure 4).

Ainsi, les élèves, qui ont tous affirmé que cette fonction (de référence) avait pour limite celle de son terme de plus haut degré ($0{,}03x^4$), donc $+\infty$, quand x tend vers

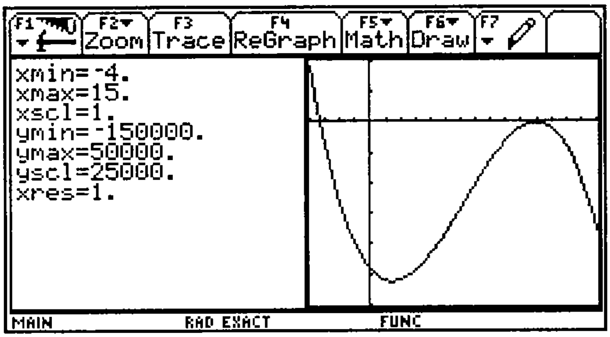


fig. 4

+∞ ou −∞, se trouvent devant une apparente contradiction quand ils considèrent l'image que leur renvoie l'écran de leur calculatrice : il y a une "descente" apparemment inexorable de la fonction pour x grand.

Dans un premier temps, la contradiction n'apparaît pas : les élèves ont eu beaucoup de mal à faire apparaître une courbe convenable (du fait du x^4, il faut choisir une fenêtre avec une amplitude sur les y beaucoup plus grande que sur les x). Cela se traduit par des discussions très animées dans les 6 binômes, certains (peu) estimant que la longueur de l'expression de la fonction, les coefficients bizarres, en faisaient un objet trop pathologique pour les capacités de la machine, d'autres, la majorité, changeant la fenêtre soit uniquement pour les x (jusqu'à des intervalles du type $[-10^{80} ; 10^{80}]$), soit en changeant simultanément, de façon homogène, les x et les y (par exemple $-1000 < x < 1000$, et $-1000 < y < 1000$), ce qui ne permettait pas de faire apparaître autre chose que des bouts de courbe, en fait des segments verticaux.

Il y a là une idée très résistante chez les élèves pour le fenêtrage : ce qui bouge, c'est la variable, et le reste est censé suivre automatiquement (16).

Pour débloquer la situation, le professeur doit signaler que ce qui domine, c'est sans doute à partir d'un certain moment le x^4. Ce qui donne quelques contraintes pour le choix de la fenêtre...

Dans un deuxième temps, les élèves concentrent leurs efforts pour obtenir la séparation éventuelle des deux racines au voisinage de 11 (*cf.* figure 5).

Les élèves vont faire des zooms plus ou moins efficaces, pour avoir la "plus grande précision possible" sur les racines. Dans cette démarche, ils perdent le point de vue général, qu'ils doivent cependant retrouver pour récapituler leurs résultats, et tracer un graphique acceptable pour P .

Ils ont alors à gérer une contradiction : la fonction tend vers +∞ en +∞, alors que la calculatrice affiche imperturbablement une courbe du type de la figure 4.

(16) Cela pose évidemment un problème pour la notion de limite, qui impose de choisir d'abord un voisinage dans l'ensemble "d'arrivée" de la fonction. Mais ceci est une autre histoire.

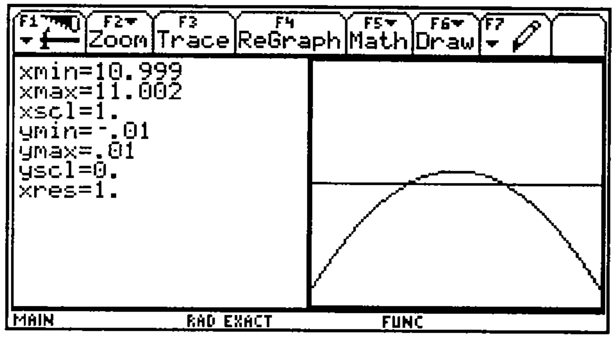


fig. 5

C'est là que les démarches divergent. On retrouve trois types d'attitude.

Les attitudes "étanches" : 2 binômes

Ils reproduisent un graphique du type de la Figure 4, annoncent 2 solutions pour l'équation, et ne repèrent pas la contradiction avec la limite annoncée en $+\infty$.

La discussion, dans ces deux binômes, ne porte que sur le nombre de racines : alors que l'on a un polynôme du quatrième degré, est-il normal de n'avoir que deux racines ? La tâche est en fait centrée sur l'aspect "résolution d'équation", et pas du tout sur l'aspect "étude de fonction". C'est donc sans état d'âme que la courbe est reproduite.

Les attitudes "conciliatrices" : 3 élèves (un binôme et demi...)

Ceux-ci repèrent la contradiction. Leur réaction apparaîtrait alors tout à fait extraordinaire pour quelqu'un n'imaginant pas le pouvoir persuasif de l'écran : après un temps de réflexion, ces élèves rendent le résultat théorique et le résultat machine compatible... en changeant le résultat théorique : ils modifient la réponse à la première question. Le polynôme P tend désormais vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$...

Les attitudes "légitimistes" : 5 élèves (deux binômes et demi)

Ces élèves repèrent la contradiction,

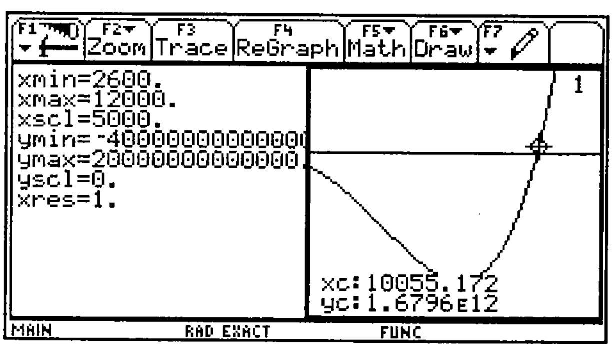


fig. 6

mais pour eux, c'est le cours qui prime. Ils vont donc tenter de modifier la fenêtre pour voir ce qui est attendu. Un binôme y parvient (figure 6).

Le deuxième binôme n'arrive pas à "capter" la remontée de la courbe, et met cet échec sur le dos des capacités de la machine : les nombres sont trop grands. Mais cela ne remet pas en cause la limite égale à $+\infty$. Et ils reproduisent sur papier un graphique acceptable.

Ce qui est interessant, comme toujours, c'est la discussion quand il y a un désaccord : comme on l'a vu, un binôme n'a pas pu arriver à un consensus. L'un des élèves pensait qu'il fallait remettre en cause la limite en $+\infty$, l'autre pensait qu'il fallait remettre en cause le graphique machine. Le désaccord a contraint les deux protagonistes à émettre des arguments si possible convaincants...

– pour le premier, le théorème sur les limites des polynômes ne s'applique pas ici : en effet, le coefficient de x^4 est 0,03 ; il affaiblit ainsi le terme de plus haut degré, qui ne peut pas imposer sa loi face aux coefficients négatifs, très forts. Ce qui explique que la fonction prenne des valeurs "basses", pour x grand. La fonction tend donc vers $-\infty$. Ce comportement se rattache à la conception "primitive" d'une limite infinie ;

– pour le deuxième, un théorème s'applique toujours. La fonction tendant vers $+\infty$, elle est nécessairement croissante à partir d'un certain moment. Il ajoute d'ailleurs qu'on ne peut pas se fier à un graphique, et que celui-ci se trompe "des deux côtés" : en $-\infty$, la fonction tend vers $-\infty$, la courbe doit donc remonter "à gauche" aussi, ce qui donne au passage quatre solutions à l'équation.

Je retiens de cette discussion trois éléments :

– la conception primitive d'une limite, appuyée sur l'observation des résultats donnés par la calculatrice, est très résistante : elle peut entraîner la réinterprétation de théorèmes du cours, pour récupérer une cohérence "théorie" / machine ;

– le vocabulaire rattaché à une conception "monotone" d'une limite s'adapte bien à la description des phénomènes graphiques (même s'il s'agit d'en critiquer les résultats) : une fonction qui tend vers $+\infty$ doit "remonter" à partir d'un certain moment. Il y a d'ailleurs un glissement logique assez intéressant à noter : on passe de l'idée (juste) "une fonction qui tend vers $+\infty$ ne peut pas toujours être décroissante" à l'idée (fausse) "elle est donc nécessairement croissante – et elle le reste- à partir d'un certain moment"...

– l'utilisation de la calculatrice n'induit pas naturellement une logique de "débat scientifique". Sans intervention du maître pour relancer le débat, l'affaire est vite réglée : soit aucune contradiction n'apparaît (ce sont les attitudes "étanches"), soit la calculatrice impose sa loi (l'autorité de la "chose jugée") au détriment des résultats du cours, soit les théorèmes du cours s'appliquent avec leur autorité "naturelle" (et les résultats de l'observation sont décrétés non pertinents, sans interprétation de cet état de fait).

Le travail avec la calculatrice, sans intégration par le maître, n'est en rien une aide pour l'élève. Pire, il rend habituel pour l'élève des comportements qui se rattachent à des conceptions des limites assez éloignées d'une conception "experte".

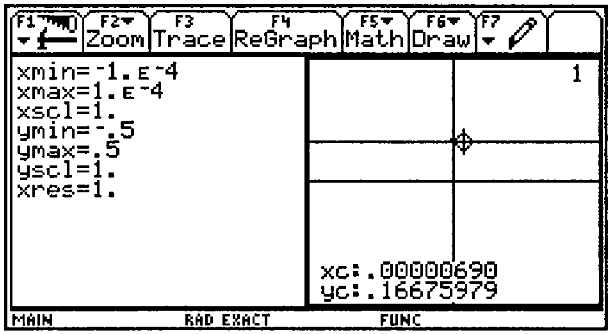


Figure 7. Observation du graphique pour x élément de $[-10^{-4}, 10^{-4}]$

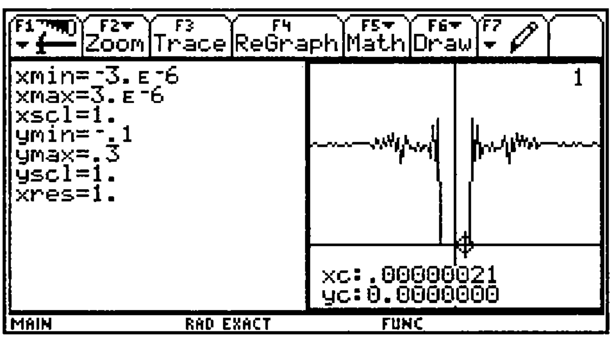


Figure 8 Observation du graphique pour x élément de $[-3.10^{-6}, 3.10^{-6}]$

QUELQUES CONDITIONS POUR UNE INTÉGRATION

Les résultats des diverses études dont nous pouvons avoir connaissance nous interdisent aujourd'hui de parler de conditions *suffisantes* pour que l'outil calculatrice soit intégré dans la classe, avec des résultats favorables pour l'apprentissage. Tout juste peut-on parler de conditions nécessaires. On peut en distinguer quatre :

– pas de technique sans technologie

A l'inverse d'illusions tenaces sur le caractère immédiat de l'utilisation des écrans, aussi bien chez les élèves que chez les maîtres (17), l'utilisation de ces machines nécessite un réel apprentissage. Cet apprentissage est encore plus indispensable quand on travaille "au bord" de leurs capacités. C'est bien le cas de l'étude des limites d'une fonction.

Un exemple : on veut rechercher la limite en zéro de la fonction $\frac{x - \sin x}{x^3}$ (18). Un élève veut en avoir une idée en observant la

(17) *Cf.* le mémoire *Calculatrices graphiques, statut pour l'élève, statut pour le maître*, déjà cité.

(18) Voir sur cet exemple l'article de *Repères*, revue des IREM, nº 14 de janvier 1994 : "Calculatrices graphiques, la grande illusion".

représentation graphique qu'en donne la machine, aux abords de zéro. On verra dans les figures 7 et 8 ce que donne une calculatrice.

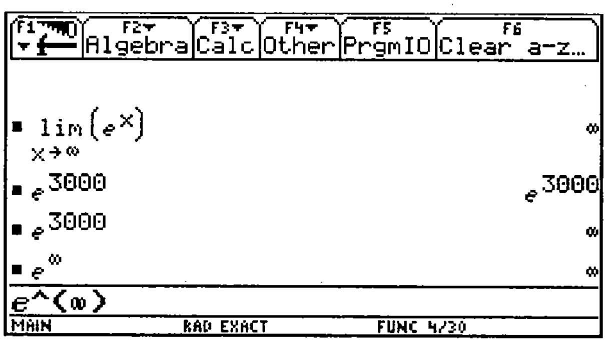
Un expert constaterait que la machine donne une idée du bon résultat (c'est à dire $\frac{1}{6}$) quand on ne se "rapproche pas trop de zéro" (figure 7), et qu'ensuite les procédures de calcul approché donnent les errements frénétiques de la figure 8.

Mais qu'en retiendra un élève non informé, sinon une impression de grande confusion de la notion de limite ? Voilà une phrase d'élève de 1^{re}S à qui l'activité a été proposée (recherche "expérimentale", puis recherche théorique à l'aide d'une stratégie d'encadrement) :

"la limite de la fonction en zéro est $\frac{1}{6}$, c'est à dire que quand x se rapproche de 0 aussi près que possible (*c'est à dire en gardant une marge de sécurité suffisante)*, f(x) se rapproche de $\frac{1}{6}$" : l'observation du comportement de la courbe sur l'écran donne ainsi une drôle d'idée de voisinage d'un point, dont on peut penser qu'il ne favorisera pas la construction de la notion de limite de fonction...

Permettre aux élèves d'analyser correctement de telles situations nécessite plus que les avertissements habituels ("la calculatrice donne des résultats approchés, l'écran est discontinu"...) : il faut donner des problèmes dont la résolution nécessite de s'affronter aux illusions de l'écran (19).

Croire que la sophistication des outils résout le problème de leur intégration est évidemment un leurre. Ainsi, pour la TI 92 :



– la calculatrice donne justement la limite de la fonction exponentielle en $+\infty$;
– en calcul exact, elle répond que e^{3000} est égal à e^{3000} ;

(19) On trouvera de tels problèmes dans les productions du groupe *Analyse* de l'IREM de Montpellier, 1994 : *Activités mathématiques pour les sections scientifiques de lycée* ; 1995 : *Des fonctions et des graphes* ; 1995 : *Arithmétique, le retour.*

– en calcul approché, elle répond que e^{3000} est égal à ... $+\infty$;
– et d'ailleurs, si on demande directement à quoi est égal e^{∞}, elle répond $+\infty$!

On comprend que cela ne résout pas les problèmes posés dans cet article : cela peut même contribuer à renforcer l'idée que l'infini est un grand nombre (on retrouve les modèles primitifs), et à escamoter finalement le "passage à la limite".

Le travail expérimental réalisé cette année avec une classe équipée de TI92 semble ainsi indiquer qu'il y a une sorte de banalisation de l'infini (c'est une touche sur le clavier numérique) : des élèves indiquent par exemple que deux courbes, qui ont une asymptote commune d'équation $x = 2$, se rencontrent au point $(2, +\infty)$.

La nécessité d'une "technologie", d'un discours sur la technique, apparaît là aussi clairement...

– pas de conscience sans mise à distance

Plus généralement, c'est bien de "mise à distance" qu'il s'agit : loin d'être une "réalité virtuelle", loin d'être une présentation des objets mathématiques, l'image que donne à voir l'écran n'en est qu'une *représentation.* Une représentation précisément au sens du *spectacle.* Comprendre que, concernant les limites de fonction, ce qui est est ce qui ne se voit pas, nécessite un patient travail de prise de champ.

L'exercice suivant, donné à des élèves avec, et des élèves sans calculatrices est tout à fait instructif : "combien l'équation $\ln x = 250 \sin x$ a-t-elle de solutions ?". le nombre d'élèves répondant "une infinité" est beaucoup plus important chez les élèves avec, que chez les élèves sans, calculatrice.

Une raison de cet écart est simple : aussi loin que les élèves aillent sur leurs écrans, la courbe de la fonction logarithme coupe le courbe de la fonction 250 sinx. Si c'est toujours vrai sur l'écran, ce doit être toujours vrai "en vrai". Et le regard des élèves, collé à l'écran, est incapable d'aller chercher du côté de l'allure générale des courbes des *fonctions de référence,* qui donnaient pourtant la réponse : il y a un nombre fini de solutions... On peut même penser que, plus un outil est performant, plus la prise de distance est nécessaire...

Descartes disait : "l'aveugle est le mieux placé pour faire de la géométrie". Sans aller jusque là, disons que "le voyant distant est le mieux placé pour voir sa calculatrice"...

– pas d'"activité" sans système d'exploitation didactique

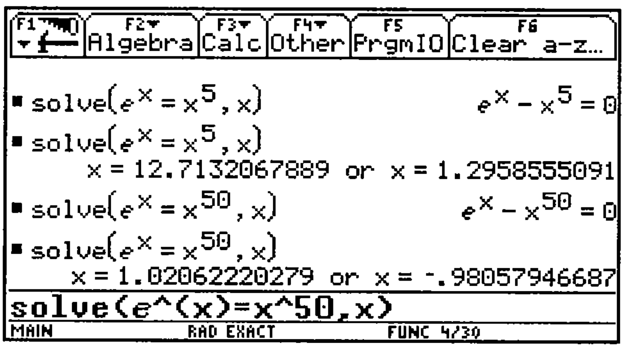
Il suffit de feuilleter les ouvrages de classe de Première pour voir que cette exigence n'a pas vraiment été intégrée... Que voit-on, comme utilisation de la calculatrice, pour introduire la notion de limite ? Invariablement (ou quasi...), la démarche suivante :

– on établit un tableau de valeurs où x

Un autre exemple pris sur la TI 92.

On veut résoudre l'équation $e^x = x^5$, puis $e^x = x^{50}$.

En calcul exact, la calculatrice renvoie simplement l'équation. En calcul approché, elle donne deux solutions pour la première équation, ce qui est bien légitime. Par contre, pour la deuxième équation, deux solutions aussi : la "grande" solution positive a disparu...



Conprendre ce qui se passe nécessite d'avoir recours aux limites des fonctions de référence, de prendre de la distance par rapport aux réponses de la machine...

prend des valeurs de plus en plus proches de x_0 ;

– on constate que f(x) se *rapproche* de la limite supposée ;

– on donne un coup d'œil sur le graphique / machine ;

– éventuellement on évoque les fonctions de référence.

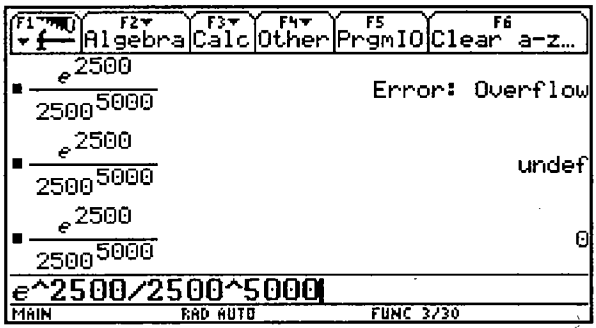
On le voit, il s'agit là d'une méthode faisant référence à la fois à une conception "primitive" de la notion de limite, et à une conception monotone. Avec de plus un problème logique (le choix préalable du voisinage de la variable). On peut penser que cette introduction "expérimentale" ne facilitera pas précisément l'introduction de la notion visée...

Imaginer que des scénarios aussi réducteurs assureront l'intégration des outils de calcul dans la classe est assez naïf... Comme l'indique Chevallard [20], il faut "des scénarios d'exploitation didactique clairement définis fixant le statut épistémologique et didactique des objets informatiques introduits". Cela suppose de combiner l'utilisation de la machine, et les exigences de rigueur, de combiner les étapes de conjectures, de preuves, de réfutations.

Cette tâche reste à accomplir.

(20) Chevallard Y., 1992, "Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques", *in L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, PUF.

Un dernier exemple issu de la TI 92



Trois résultats différents pour une même expression :

– en mode exact : "dépassement de capacité" ;
– en mode approché : "non défini" ;
– en mode automatique : "0".

On peut se demander quelle conciliation un élève peut faire entre ces résultats, et le fait que la fonction $\frac{e^x}{x^n}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$... Une des façons de concilier tout cela est d'installer une certaine confusion entre infini, indéfini, et dépassement des capacités de la machine.

En tout cas, il est certain que l'annonce d'un résultat exact pour une limite, utilisant une "calculatrice formelle", ne sera pas la garantie d'une compréhension de ce qui se passe...

Bref, on serait tenté de dire que, plus un outil est "performant", plus l'exigence d'un système d'exploitation didactique est impérieuse.

– pas de programmes sans réflexion "écologique"

Le dernier problème que je vois relève directement de la responsabilité des concepteurs de programme. On ne peut pas élaborer des programmes indépendamment du milieu dans lesquels ils vont vivre. Et cette réflexion "écologique" doit nécessairement prendre en compte les outils à disposition des élèves, les calculatrices pour ce qui nous concerne ici...

Tall et Vinner (21) appellent "concept image" la structure cognitive qui inclut

(21) Tall et Vinner, 1981, "Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular reference to Limits and Continuity", *Educational Studies in Mathematics*, Vol 12, pp. 151-169.

aussi bien les images mentales que les propriétés associées au concept, qui se construit à travers les expériences des élèves. Ils contestent l'enseignement des limites qui consiste à donner des exemples, puis, quelques années après, à donner une définition formelle. Ils montrent qu'il se forme ainsi un "concept image" fort, en contradiction souvent avec la définition mathématique. Dans ces conditions la gestion des conflits cognitifs par le maître n'est pas des plus simples...

Tout ce qui précède laisse penser que l'utilisation généralisée des calculatrices contribuera, à sa façon, à ce développement d'un "concept image" erroné.

Il faut donc redéfinir les modalités d'introduction de cette notion dans les classes de lycée. La chose n'est pas simple : comment présenter à la fois simplement et rigoureusement une notion complexe ?

Quelques pistes :

– ne pas se contenter d'une introduction du *"langage des limites"* en lycée ; c'est bien la *notion de limite* qu'il s'agit d'introduire;

– développer une introduction numérique "expérimentale" correcte : bref, donner du sens à ce qui sera plus tard la définition formelle ("f(x) peut être aussi proche que l'on veut de la limite λ...") ;

– être extrêmement vigilant sur le vocabulaire utilisé : distinguer nettement les notions de variation des fonctions, et les notions de limite (ne plus dire "f(x) se *rapproche* de l"...) ;

– traiter des problèmes dans lesquels la notion de limite prend son sens ("combien l'équation $e^x = x^n$ a-t-elle de solutions ?")

– utiliser les calculatrices pour exhiber des exemples non triviaux de limite, pour enrichir la notion ;

– montrer dans l'action ce qu'une calculatrice peut montrer, et ce que, par nature, elle ne peut pas montrer...

A ceux qui penseraient que tout ceci n'est pas simple, deux réponses :

– *il est impossible de davantage différer la prise en compte des nouveaux outils de calcul :* l'"informatique" a longtemps été contenue dans des salles à part, pour une utilisation des enseignants extrêmement limitée. C'est finalement par les élèves eux mêmes que ces outils arrivent dans la salle de classe, sur toutes les tables. Il vaut mieux réfléchir à l'intégration de ces outils que les refuser, le dos au mur.

– *la simplicité, en matière d'enseignement, n'est souvent que pure illusion.*

On trouve, dans l'éditorial d'une revue de promotion des calculatrices (22) les phrases suivantes :

> "Aujourd'hui, nous avons les moyens de faire une bonne répartition des tâches *(entre l'esprit et la machine, NDLR)* qui soit sans équivoque :
>
> – *la calculatrice*, dont c'est la vocation, se voit confier l'approche "spontanée" discontinue. Les résultats numériques qu'elle donnera ne seront jamais que des informations ;
>
> – *l'esprit* s'appuie sur ces informations

(22) 3,33, *Casio Spécial Lycée* nº 16, Mai 1995, page 1.

pour forcer l'"intuition" et accéder au concept. La formalisation restant une manipulation de langages symboliques, définis par leur alphabet et leurs règles d'articulation.

Les rapports entre le professeur et la calculatrice sont ainsi définis (23)."

Cette vision est particulièrement simpliste. Considérer que le discontinu, la spontanéité, le numérique sont le domaine réservé de la machine, le continu, la rigueur, et les manipulations symboliques, le domaine réservé de l'esprit ne résiste pas à l'analyse.

Les rapports entre "la machine" et l'"esprit" sont mouvants : ils dépendent d'abord des matériels (certaines machines font des manipulations symboliques). Mais surtout la machine ne délivre pas des informations "neutres" qui permettraient d'"accéder au concept". On l'a vu sur la question des limites.

Les rapports entre le professeur et la calculatrice ne sont donc jamais définis une fois pour toutes. Ils dépendent de la notion enseignée, du scénario d'exploitation didactique choisi...

A l'inverse de ces illusions, il s'agit bien de rompre "avec une stratégie de formation qui, pour mieux convaincre que les EIAO doivent être intégrés à l'enseignement, minimise les adaptations à prévoir, les connaissances à acquérir" (24)

Définir une autre stratégie, c'est à dire distinguer les adaptations nécessaires, les connaissances à acquérir, mettre au point une ingénierie didactique appropriée... il reste beaucoup à faire...

(23) Mis en italiques par l'auteur.

(24) Artigue M., 1995, *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur*, Eyrolles, Paris.