REPERES - IREM . N° 25 - octobre 1996

UNE APPROCHE HEURISTIQUE DE L'ANALYSE

C. HAUCHART,
M. SCHNEIDER
Groupe AHA (1)

Cet article décrit un projet d'enseignement de l'analyse mathématique destiné à des élèves ou à des autodidactes, néophytes en la matière. En Belgique, cet enseignement concerne principalement les élèves des deux dernières années du cycle secondaire, âgés d'environ 16-17 ans.

Ce projet constitue une Approche Heuristisque de l'Analyse (d'où le sigle AHA) qui part de sources intuitives et débouche à terme sur des concepts formalisés pour pouvoir fonctionner dans des preuves. L'adjectif heuristique est emprunté à I. Lakatos (1970) : nous y reviendrons dans la conclusion. Par ailleurs, le sigle AHA rappelle le HAHA par lequel M. Gardner (1979) désigne l'éclair de compréhension mathématique.

Le projet AHA a été conçu dans le but d'améliorer l'enseignement de l'analyse tel qu'il est habituellement pratiqué dans notre pays.

La section 1 de cet article développe les motivations de ce projet et la section II en présente les lignes directrices.

(1) Ce groupe est composé actuellement de Pierre BOLLY, Anne CHEVALIER, Micheline CITTA, Marysa GRAND'HENRY, Christiane HAUCHART, Dany LEGRAND, Nicolas ROUCHE, Maggy SCHNEIDER. Son travail s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre le Groupe d'Enseignement Mathématique de Louvain-la-Neuve et les Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur (Belgique).

1. MOTIVATIONS DU PROJET : AMÉLIORER LES PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Plusieurs recherches ont mis en évidence que l'apprentissage de l'analyse bute sur des obstacles épistémologiques liés aux représentations *a priori* des élèves (*cf.* e.a. D.O. Tall *et al.* (1981), A. Robert (1982), C. Hauchart (1985), A. Sierpinska (1985), M. Schneider (1988)). Ces obstacles sont observés à travers les difficultés éprouvées tant par les élèves débutants que par les initiés. Ils sont également patents dans l'histoire des mathématiques.

1.1. Quelques intuitions qui constituent des objets mentaux

A défaut de pouvoir utiliser des concepts mathématiques formels (qu'ils n'ont pas encore acquis), les élèves qui débutent en analyse s'appuient sur des *objets mentaux*, notions empruntées au quotidien et qui leur servent vaille que vaille à organiser et interpréter les *phénomènes* relatifs à l'infini et à ébaucher leurs premiers raisonnements (sur les notions d'objet mental et de phénomène mathématique, *cf.* H. Freudenthal, (1983)). C. Hauchart (1985) a étudié, chez des élèves du secondaire, les objets mentaux associés aux concepts de suite et de série. M. Schneider (1988) a principalement exploré les objets mentaux correspondant aux concepts d'aire et de volume et plus secondairement ceux associés aux notions de débit, de vitesse et de tangente. Voici quelques exemples tirés de leurs observations et proposés ici à titre d'hypothèses.

Exemple 1 : une suite positive décroissante devrait tendre vers zéro

Considérons une suite positive strictement décroissante. Elle est construite à partir d'une première grandeur à laquelle on en soustrait toujours de nouvelles. L'expérience commune indiquerait qu'on ne peut pas indéfiniment soustraire des parties d'un tout borné : "à la fin", "finalement", on n'a plus rien, le zéro marque la limite des soustractions possibles. Cette expérience serait liée à l'intuition atomiste selon laquelle il existe une grandeur non nulle plus petite que toutes les autres, ce qui rend impossible de diviser indéfiniment une grandeur physique. Alors de deux choses l'une : ou bien on pense que zéro est atteint en un nombre fini de pas ; ou bien la coexistence contradictoire de l'intuition atomiste et de la conviction que la suite est infinie induit l'idée que la suite tend vers zéro (pour plus de détails, cf. C. Hauchart, 1985).

Exemple 2 : une difficulté à associer la pente d'une tangente à la limite de la fonction "taux d'accroissement"

La notion de tangente en un point d'une courbe semble d'emblée liée, dans le chef des apprenants, à l'idée d'une droite qui ne rencontre globalement la courbe qu'en un seul point et qui ne peut la traverser (2). Elle le resterait longtemps, malgré les contre-exemples qui s'opposent à cette image.

La conception d'une tangente comme "position limite" de sécantes qui tournent autour d'un point leur serait étrangère. Et quand le professeur parle de lui-même de la limite des pentes de sécantes, la filiation entre celles-ci et la pente de la tangente n'est pas facilement perçue, le mot limite du langage mathématique étant proba-

(2) Cette représentation est sans doute liée au fait qu'ils n'ont rencontré jusqu'alors que la tangente au cercle.

blement compris par les élèves comme "position limite" de droites, au sens d'une topologie – implicite et confuse bien entendu – sur l'ensemble des droites (pour plus de détails, *cf.* M. Schneider, 1991a).

Exemple 3 : la vitesse et le débit instantanés pâtissent d'un a priori *négatif*

Les concepts de vitesse et de débit instantanés pâtiraient d'un a priori négatif auprès d'un certain nombre d'élèves. Ceux-ci invoquent la nécessité d'avoir un volume minimal pour avoir un débit : *"Pour avoir un débit, il faut qu'il reste un petit volume"*, ou celle d'avoir un espace non nul pour pouvoir déterminer une vitesse : *"Si le temps est nul, le mobile ne bouge plus"*. Ils soulignent le fait que toute mesure requiert un minimum de temps : *"ça n'existe pas, il n'y a pas moyen de le mesurer, car le temps de regarder sa montre et du temps s'est déjà écoulé"*. S'attendant inconsciemment à ce que les mathématiques prolongent leur perception première d'un "monde sensible" illusoire (c'est-à-dire d'un monde qu'ils croient pouvoir appréhender par leurs sens), ces élèves dénieraient aux concepts mathématiques la possibilité de circonscrire avec précision quelque chose qui leur semble échapper jusqu'à un certain point aux sens et aux mesures (pour plus de détails, *cf.* M. Schneider, 1992).

Exemple 4 : des rectangles qui se réduisent en segments peuvent-ils conduire à une aire curviligne

L'aire sous $y = x^3$ *entre les bornes 0 et 1 (définie en un sens intuitif) vaut-elle 1/4 exactement*, à savoir la limite commune, pour n tendant vers l'infini, des expressions

$$(1 + 2/n + 1/n^2) / 4 \text{ et } (1 - 2/n + 1/n^2) / 4,$$

qui représentent respectivement la somme des aires de n rectangles représentés sur les Fig. 1 et 2 ? Plusieurs élèves prétendent qu'il s'agit là d'un résultat approximatif seulement, sensibles qu'ils sont à l'alternative suivante :

– tant que les rectangles ont une certaine épaisseur, ils ne remplissent pas tout à fait la surface considérée ou bien ils la dépassent : il reste des petits "triangles" à combler ou à enlever;
– et lorsqu'ils se réduisent à des segments, on voit mal comment obtenir une aire non nulle et non infinie, en sommant leurs aires nulles ou leurs longueurs.

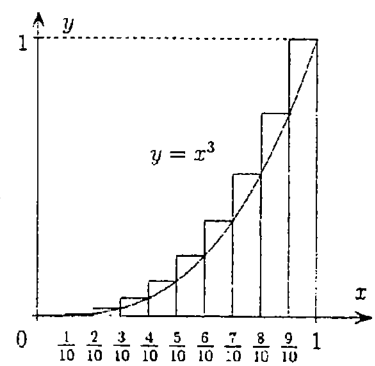


Figure 1

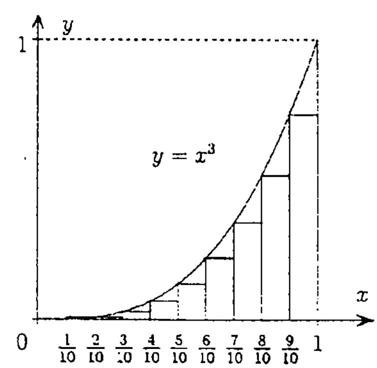


Figure 2

Cette alternative, une fois formulée, enferme dans une impasse l'imagination de leurs camarades et parfois celle de leur professeurs.

Cette réaction peut s'interpréter de la manière suivante : tout se passe comme si les élèves effectuaient le "passage à la limite" au niveau de leur imagination visuelle des grandeurs où les rectangles se rétrécissent jusqu'à devenir effectivement des segments, au lieu de considérer la limite, au sens numérique, de la suite en jeu. Après quoi, ils reviendraient dans le domaine numérique pour tenter d'interpréter 1/4 comme la somme des mesures des segments-résidus. Leur imagination serait donc enfermée dans un cul-de-sac pour avoir dévié indûment des nombres aux grandeurs (pour plus de détails, *cf.* M. Schneider, 1991b et 1991c).

Exemple 5 : un découpage trompeur de solides de révolution en sections radiales

Un même glissement mental entre le monde des grandeurs et celui de leurs nombres-mesures explique pourquoi plusieurs élèves s'attendent à ce que les volumes de deux solides de révolution soient entre eux comme les aires des surfaces qui les engendrent. Ainsi le volume d'un cône droit, engendré par la rotation d'un triangle rectangle, devrait valoir (Fig. 3) la moitié de celui du cylindre circonscrit, engendré par un rectangle d'aire double (de tels glissements sont sources d'un obstacle épistémologique, *l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions*, identifié par M. Schneider, 1991b).

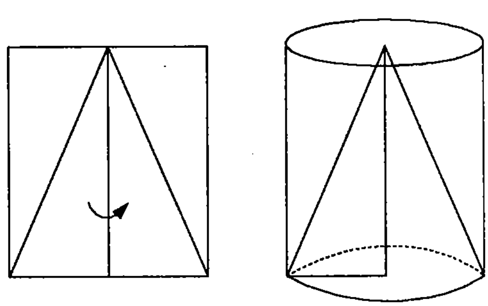


Figure 3

Exemple 6 : les décimaux illimités périodiques souffrent d'une crise d'identité

Les nombres "à représentation illimitée", qu'ils soient ou non périodiques, semblent avoir acquis droit de cité dans les classes où, de plus, l'usage des machines à calculer les ont banalisés en les limitant à quelques décimales utiles. Cependant, déjà les décimaux illimités périodiques font difficulté, dès qu'on les considère dans le contexte des suites et des séries. En effet, face à la question : *La suite*

0,3 0,39 0,393 0,3939 0,39393...

possède-t-elle une limite ? Si oui, cette limite peut-elle être écrite sous forme de fraction ?, plusieurs élèves hésitent sur le statut de 0,3939... : d'une part, 0,3939... est bien un nombre, il n'y a rien d'étonnant à ce qu'il soit une limite ; d'un autre point de vue, 0,3939..., vu les trois points, semble bien aussi tendre vers quelque chose sans y arriver jamais. Qui plus est, dans ce cas, la limite de la suite proposée devrait bien être la même que celle de 0,3939... Oui mais 0,3939... est un nombre ! Peut-on dire qu'il possède une limite, et quelle serait-elle ? Les élèves sont comme piégés par l'ambiguïté du décimal illimité périodique : ils vont et viennent entre ses deux facettes (la suite et la limite de la suite).

Quant au fait que 0,3939... puisse être regardé comme une série, à savoir

$$39/10^2 + 39/10^4 + 39/10^6 + \ldots ,$$

cela semble difficile à admettre. Les concepts de nombre et de série souffrent dans la classe d'une crise d'identité. Au début, c'était en ajoutant des nombres qu'on constituait une série. Les nombres étaient ainsi les constituants des séries. Puis voilà que 0,3939..., dont on sait que c'est un nombre (rien qu'à la façon de l'écrire), apparaît aussi comme une série. Le constituant s'identifie à la chose constituée, la brique à la maison. C'est un renversement : les nombres étaient conçus comme le matériau à partir duquel on construisait des mathématiques (et notamment des suites et des séries). Mais au moins, ce matériau était pur, premier (un peu comme si c'étaient des données, des mesures de grandeurs). On ne se posait pas de problèmes à son sujet. Or voici que ces objets primitifs peuvent être aussi des objets mathématiquement construits. Qui plus est, il arrive que des objets en un certain sens hors d'atteinte, inexistants, reçoivent une existence par le truchement d'une définition (pour plus de détails, *cf.* C. Hauchart, 1985).

1.2. Des difficultés qui persistent chez les initiés

Au terme de ces exemples, une observation importante pour notre propos s'impose : les difficultés que nous venons d'exhiber persistent bien souvent chez les élèves du secondaire qui ont déjà bénéficié d'un premier enseignement de l'analyse, et elles ne sont pas rares non plus, ni chez les étudiants de mathématiques de niveau universitaire, ni chez les professeurs de mathématique en fonction dans l'enseignement secondaire. Plusieurs interviews d'étudiants universitaires, des visites de stages d'apprentis-professeurs nous l'ont confirmé. On voit ainsi resurgir l'intuition qu'une suite positive décroissante converge vers 0 chez des étudiants ayant reçu un enseignement sur les suites et séries. Plusieurs élèves à qui on a enseigné le concept de tangente évoquent à son propos le mot "limite", en lui donnant une signification exclusivement géométrique : ils parlent de la tangente comme la position limite des sécantes sans avoir intégré la pente de tangente comme limite des pentes des sécantes (*cf.* exemple 2) ; ils ne peuvent interpréter ce qui se passe "à la fin", lorsque les deux points d'intersection de la sécante avec la courbe se sont rejoints. L'alternative décrite à l'exemple 4 laisse sur la touche plus d'un professeur. La décomposition de solides de révolution (exemple 5) reste un miroir aux alouettes pour certains étudiants universitaires.

D'où vient un tel état de choses ? Voici comment nous l'interprétons. Si une vitesse, un taux de variation instantané et une pente de tangente sont équivalents *d'un point de vue mathématique,* ils ne le sont pas *d'un point de vue épistémologique* : M. Schneider (1988) montre qu'il n'est pas indifférent pour l'apprenant que, dans le calcul d'une dérivée, la variable indépendante soit le temps ou non et que savoir interpréter la dérivée comme pente de tangente n'est pas savoir interpréter par exemple pourquoi la dérivée de l'aire du disque, par rapport à son rayon, donne son périmètre... De même, rendre Δx nul dans un calcul de dérivée n'impressionne pas de la même manière que supprimer des termes en $1/n$ et $1/n^2$ dans le calcul d'une aire curviligne, alors qu'il s'agit dans les deux cas d'un calcul de limite : en effet, $1/n$ et $1/n^2$ ne peuvent être nuls que si n "atteint" l'infini. En optant d'emblée pour le point de vue unificateur des mathématiques comme cela se fait d'habitude, c'est-à-dire en *commençant* par enseigner les concepts de limite et de continuité, on gomme ces différences sans laisser aux élèves le temps de les vivre et de prendre conscience de leur essence commune. Tôt ou tard resurgissent des questions, des difficultés spécifiques à chacun des contextes précités (si toutefois l'occasion s'en présente), mais il est parfois trop tard pour les prendre en considération.

1.3. Des obstacles épistémologiques attestés par l'histoire des mathématiques

Plusieurs des réactions qui viennent d'être décrites ont été celles des mathématiciens dans l'histoire. Ainsi, l'infinie divisibilité d'une grandeur a été longuement débattue par des philosophes et des physiciens tels que Aristote (1^{er} s. av. J.-C.) et Galilée (XVI-XVII^{e} s.) (*cf.* Aristote, trad. Carteron (1969) et au chap. IX, n°7, Galilée, trad. H. Crew *et al.* (1941)). De même, Cavalieri (XVII^{e} s.) commet l'erreur qui consiste à "comparer les solides de révolution en comparant les figures génératrices" : par exemple, en *"imaginant le cylindre comme composé [compactum] d'une infinité de parallélogrammes ; et le cône construit sur la même base et le même axe que le cylindre, comme composé d'une infinité de triangles passant par l'axe"* (cité par F. De Gandt, 1983). Quant aux réticences des élèves vis à vis des concepts de vitesse et de débit instantanés, elles rappellent celles exprimées par Berkeley (1734) à l'encontre du concept d'*ultima ratio* de Newton (XVII-XVIII^{e} s.) : "*Mais comment peut-on concevoir une vitesse au moyen de telles limites ? Une vitesse dépend du temps et de l'espace, et ne peut être conçue sans eux.* [...]". On retrouve une même négation de la vitesse instantanée au long des siècles, entre autres chez Aristote et Hobbes (XVII^{e} s.).

La présence quasi universelle de difficultés analogues chez les mathématiciens dans l'histoire, chez les élèves d'aujourd'hui et leur persistance font soupçonner qu'on est en présence d'*obstacles épistémologiques* au sens où l'entend G. Brousseau (1983) :

> "*Les obstacles d'origine épistémologique sont ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes* [...]".

Par ailleurs, les objets mentaux qui ont préfiguré, dans l'histoire, les concepts formalisés de l'analyse ont été féconds puisqu'ils ont été des points d'appui pour l'élaboration progressive de cette théorie. Quant aux erreurs et paradoxes, ils ont été plus sources de progrès qu'avatars stériles en montrant la portée de la théorie construite.

1.4. L'enseignement de l'analyse ne prend pas suffisamment en compte les objets mentaux qui la préfigurent

Tel qu'il est habituellement conçu en Belgique, l'enseignement de l'analyse ne comporte pas explicitement de phase préalable de caractère expérimental au cours de laquelle les objets mentaux seraient une référence explicite : à partir de 16 ans, les élèves doivent assimiler en même temps les phénomènes associés aux apparitions de l'infini et des limites, et les concepts, les théories formelles qui les expriment et les développent mathématiquement. Ceci distingue l'enseignement de l'analyse de celui de l'arithmétique et de la géométrie, d'abord appréhendées au niveau expérimental à l'école fondamentale et au début de l'école secondaire avant de conduire à des raisonnements d'où le point de vue empirique est en gros écarté.

Les objets mentaux sont-ils pris en considération au niveau des exercices faute de l'être dans l'élaboration de la théorie ? Cela ne semble pas être généralement le cas : on observe en effet trop souvent une insistance exagérée sur le calcul formel des dérivées et des primitives et sur les études systématiques des graphes de fonctions en dehors de tout contexte. Beaucoup d'enseignements de l'analyse semblent ainsi organisés lors de leur première année en fonction d'un objectif central : déterminer les caractéristiques graphiques de telle ou telle expression analytique (exercices dit "de variation de fonction"). Les limites et dérivées sont introduites presqu'exclusivement dans cette perspective.

A la lumière des difficultés d'apprentissage persistantes chez des initiés et en s'inspirant des leçons de l'histoire, nous proposons un projet d'enseignement qui prend en compte les intuitions suscitées par l'infini et qui donne l'occasion aux élèves d'exprimer leurs objets mentaux et de les affiner peu à peu pour surmonter les obstacles épistémologiques sous-jacents. Nous espérons ainsi améliorer l'enseignement actuel de l'analyse.

2. LES LIGNES DIRECTRICES DU PROJET : FAIRE ÉMERGER LES CONCEPTS À PARTIR DES OBJETS MENTAUX ET FAIRE JOUER DIFFÉRENTES FACETTES DES FONCTIONS

Les chapitres de notre projet sont structurés en fonction de deux lignes directrices qui s'enchevêtrent, mais que nous décrivons séparément pour plus de clarté. D'une part, faire émerger des concepts formalisés et unificateurs de l'analyse après les avoir fait fonctionner sous forme d'objets mentaux dans des contextes divers (section 2.1). D'autre part, étudier les fonctions tant comme outils de résolution de problèmes que comme objets d'étude en soi en privilégiant le point de vue le plus adapté à chaque problème ou à chaque classe de fonctions (section 2.2.).

Pour éviter d'être trop long, nous présentons ce projet de manière un peu monolithique, mais il va de soi qu'il doit être adapté en fonction du niveau des élèves. On peut concevoir de faire parcourir à certains élèves une partie seulement de ce projet ou d'édulcorer pour eux des chapitres de l'une ou l'autre question trop théorique.

2.1. Une unité conceptuelle progressive au départ de contextes divers

2.1.1. Comportements asymptotiques de suites et de fonctions

Une première approche de l'expression "tendre vers" est réalisée à travers l'étude de comportements asymptotiques de suites et de fonctions.

En particulier, les suites conduisent naturellement à s'interroger sur un tel comportement : *Que devient "à la fin" le terme général ?*

Ces suites et fonctions modélisent souvent des contextes concrets, points d'ancrage grâce auxquels s'impriment dans l'imagination des élèves des réflexes, questions et intuitions qui assoient le calcul des limites. Voici trois exemples de questions traitées et la maturation que chacune provoque.

– *Intérêt simple et intérêt composé*

Est-il plus avantageux de placer un capital à intérêt simple au taux annuel de 10 % ou à intérêt composé au taux annuel de 5 % ?

Cette question annonce d'une certaine façon l'idée de minorer une suite géométrique (de raison supérieure à 1) par une suite arithmétique pour démontrer la divergence de la première.

– *Plier quelque fois une feuille de papier*

On plie une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite soixante fois. Serait-il possible d'atteindre ainsi une épaisseur qui dépasse 2 m, 20 m, 1 km, la distance terre-soleil ?

Cette recherche habitue peu à peu l'élève à la question clé que l'on se pose pour prouver qu'une suite possède une limite infinie : "la suite parvient-elle à dépasser n'importe quel réel à partir d'un certain rang ?".

– *Des polygones emboîtés*

On part d'un carré et on y inscrit un octogone régulier comme le montre la Fig. 4. Dans cet octogone, on construit un 16-gone régulier de manière analogue et ainsi de suite. Que deviennent, si on continue, les aires des polygones ainsi construits ?

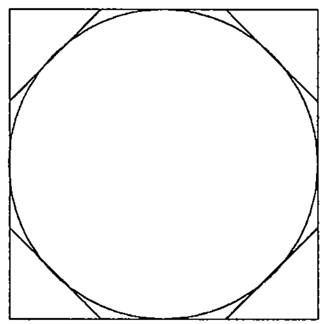


Figure 4

Cette réflexion invite l'élève à rectifier une intuition fausse dont nous avons souligné plus haut la persistance (exemple 1 de la section I.1) : une suite positive décroissante devrait tendre vers 0.

Plus généralement, C. Hauchart et N. Rouche (1985) ont montré comment le contexte d'un problème peut induire la connaissance de la limite d'une suite, ou, au contraire, conduire à une intuition trompeuse qui suscite la nécessité de formaliser davantage.

Cette première approche de comportements asymptotiques donne également aux élèves l'occasion de comparer des ordres de grandeurs dans certains voisinages de la variable : si x est suffisamment grand, $1/x$ peut être considéré comme négligeable et *a fortiori* $1/x^2$, $1/x^3$... Mais si x est proche de 0, x^2 peut être négligé par rapport à x...

2.1.2. Des tangentes et des vitesses au concept de dérivée

Dans notre projet, le concept de dérivée naît d'un rapprochement entre deux problématiques a priori différentes : d'une part, la détermination de tangentes et, d'autre part, le calcul de vitesses instantanées. Dans un premier temps, l'objet "tangente" est étudié pour lui-même en l'appuyant sur l'idée d'approximation affine plutôt que sur celle de quotient différentiel, le lien entre les deux aspects se faisant ultérieurement.

Tangentes et approximations affines

Un premier enjeu est de faire évoluer les représentations mentales que les élèves ont a priori de la tangente à une courbe (*cf.* exemple 2 de la section 1.1) : d'une part, les deux graphes ci-dessous (Fig. 5) montrent qu'une tangente à une courbe en un point n'est pas une droite qui rencontre globalement la courbe en ce seul point. D'autre part, l'exemple de la tangente en $x = 0$ à $y = x^3$ montre qu'une tangente peut traverser la courbe au point de tangence.

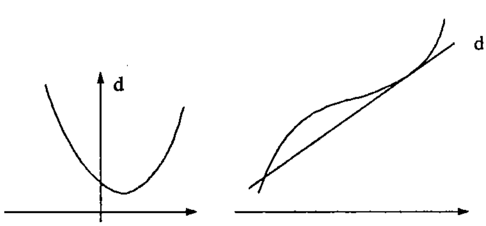


Figure 5

Ainsi, les élèves prennent peu à peu conscience que le concept de tangente ne peut se réduire à ces premières représentations si l'on veut qu'il modélise une droite qui "frôle la courbe au voisinage d'un point".

Une signification du "frôle" est précisée de la façon algébrique suivante *pour les fonctions polynomiales à l'origine* : la droite

$$y = a_0 + a_1 x$$

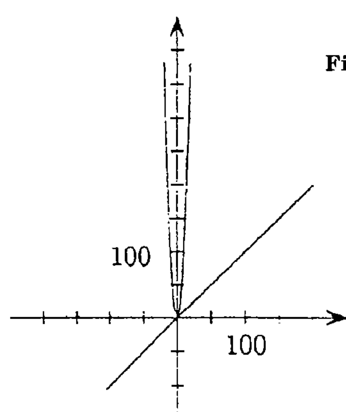
est la tangente en $x = 0$ à la courbe

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n ,$$

et on parle à son propos *d'approximation affine.* Cette définition est confortée par les observations que voici :

1. Les graphiques des Fig. 6, 7 et 8 montrent que *seule la droite $y = 0$ est candidate-tangente* à $y = x^2$ en $x = 0$: en effet, toutes les autres droites passant par (0,0) traversent franchement cette courbe au voisinage de 0. Certaines droites qui sembleraient convenir à première vue

Figure 6



(Fig. 6) s'avèrent inadéquates quand on les regarde avec un changement d'échelle (Fig. 7 et 8).

2. Le résultat (1) peut se *transférer* à toutes les courbes de la forme $y = k\,x^2$: en effet, le

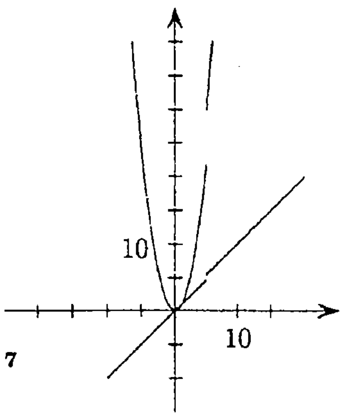


Figure 7

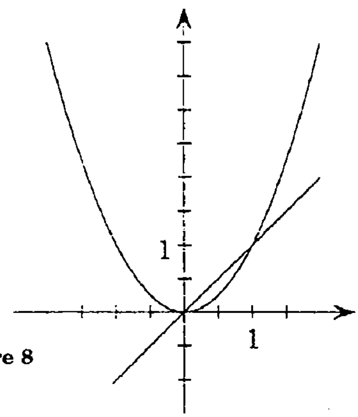


Figure 8

graphe de $y = k\,x^2$ peut être regardé comme celui de $y = x^2$ moyennant un *changement d'échelle.*

3. Par "*coinçage*" (Fig. 9), il en va de même pour toutes les courbes $y = x^n$ pour n > 2.

4. Le procédé de *sommation graphique* de deux fonctions (Fig. 10) suggère que si "l'axe des x frôle une courbe $y = f(x)$ près de $x = 0$ ", alors la droite $y = ax + b$ frôle la courbe-somme $y = ax + b + f(x)$ près de $x = 0$. Autrement dit, *le phénomène de*

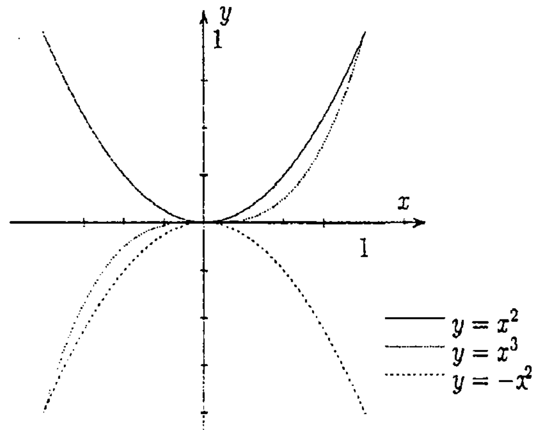


Figure 9

tangence à une fonction se transmet "par addition de celle-ci avec une droite".

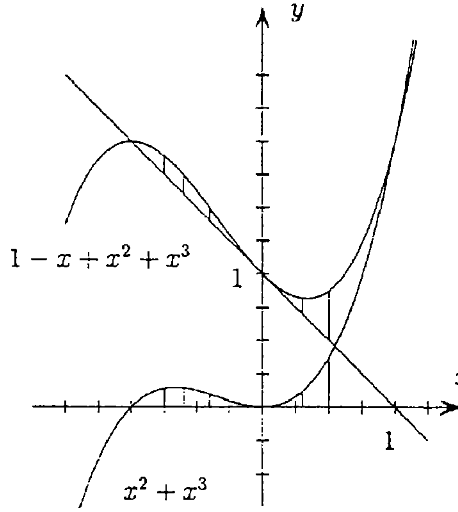


Figure 10

La tangente en un point d'abscisse quelconque $x = x_0$ à la courbe représentative d'une fonction polynomiale est obtenue par *translation* (Fig. 11).

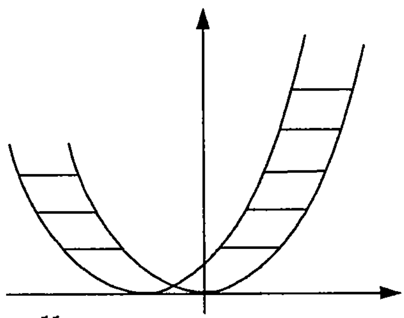


Figure 11

Cette progression et ses motivations sont détaillées dans M. Grand'Henry-Krysinska et C. Hauchart (1993).

Dans notre projet, les tangentes interviennent ensuite comme outils graphiques pour tracer des courbes représentant des fonctions polynomiales.

– Mouvements et vitesses

Un deuxième enjeu est d'approcher le taux de variation instantané à partir de problèmes de vitesses liées. Tel le suivant :

> *Une pompe alimente un vase conique* (Fig. 12). *Elle est réglée de telle manière que le niveau de l'eau y monte régulièrement de 1 cm par minute. L'angle au sommet du cône vaut 90°. Jusqu'à quand le débit de la pompe sera-t-il inférieur à 100* cm^3/min *?*

Dans ce problème, comme dans d'autres, le fait qu'une grandeur (ici le niveau d'eau) varie à vitesse constante induit l'intuition que l'autre grandeur (ici le volume) ne peut varier à vitesse constante (puisque le vase est de plus en plus large). Dès lors, pour évaluer la vitesse de variation du volume, il faut procéder à un découpage du temps de plus en plus fin.

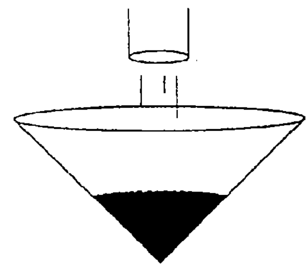


Figure 12

Le débit moyen de l'eau sur $[t\,, t + \Delta t]$ est de la forme

$$\frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t}$$

ou, dans le cas présent

$$\pi\, t^2 + \pi\, t\, \Delta t + \pi\, (\Delta t)^2 / 3. \qquad (1)$$

L'idée vient alors de réduire Δt au maximum, ce qui ici revient à supprimer de l'expression (1) les termes contenant une puissance de Δt. L'expression obtenue de la sorte, ici πt^2, est appelée *taux de variation instantané de V à l'instant t*, le passage à la limite signifiant donc en pratique "faire $\Delta t = 0$".

Aux hésitations des élèves face à l'audace de ce calcul et à leurs réticences vis-à-vis du concept de débit instantané (*cf.* exemple 3 de la section 1.1), on propose une expérience de pensée qui vise à les convaincre que la réponse obtenue ainsi est bien exacte. Il s'agit de poser un vase cylindrique de base 100 cm^2 à côté du vase conique (Fig. 13) et de les alimenter tous deux au moyen de pompes respectives de sorte que les niveaux d'eau montent régulièrement et simultanément de 1 cm / min. La pompe qui alimente le cylindre a évidemment un débit constant de 100 cm^3 / min. L'autre pompe devra verser moins vite que la première tant que le cône est plus étroit que le cylindre, et plus vite après. Les deux pompes auront donc un débit de 100 cm^3 / min. à l'instant précis où la superficie de l'eau dans le cône vaut 100 cm^2, ce qui revient à égaler à 100 le débit instantané πt^2.

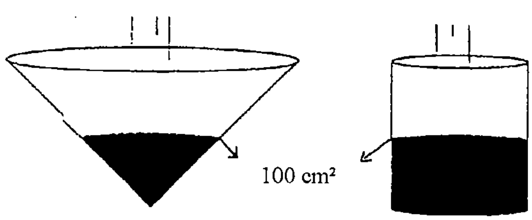


Figure 13

Les enjeux épistémologiques et didactiques de ce problème sont analysés dans Schneider (1992).

L'ensemble des problèmes de vitesses liées proposés à ce stade du projet amène l'élève à "dériver" de la sorte quelques fonctions de base telles que

$$V(t) = \pi t^3 / 3 \,,\; h(t) = 80t / (9 + 50t)\,,$$
$$d(t) = 0.5 \sqrt{144 - t^2}\,,\; r(t) = k \sqrt{t}\,,$$
$$h(t) = gt^2 / 2.$$

– *Vers la limite du quotient différentiel*

En analyse, les pentes de tangentes et les vitesses instantanées relèvent d'un même calcul : celui de taux de variation instantanés, c'est-à-dire de limites de quotients différentiels $\Delta y / \Delta x$. Le moment est venu d'en faire prendre conscience aux élèves. A cette fin, on leur propose de rapprocher deux problèmes issus de contextes différents et qui mobilisent la même fonction : la détermination de la tangente en un point quelconque à

$$y = x^2 \text{ (respectivement } y = x^3\text{, etc.)}$$

et le calcul de la vitesse instantanée d'un mobile dont la position e sur une trajectoire rectiligne est donnée par la loi

$$e(t) = t^2 \text{ (respectivement } e(t) = t^3\text{, etc.).}$$

La similitude formelle des résultats pousse l'élève à interpréter le taux de variation moyen d'une fonction comme pente de sécante et le taux de variation instantané comme pente de tangente : la vitesse instantanée et la pente de tangente, différenciées au départ, apparaissent désormais comme deux facettes d'un même concept.

Le calcul de taux de variation instantané sert ensuite à déterminer des pentes de tangentes à des courbes de fonctions non polynomiales ($y = 1/x$, $y = \sqrt{x}$) *sans recourir cette fois à l'approximation affine.*

– *La fonction dérivée*

La *fonction* dérivée elle aussi apparaît comme un outil de résolution commun de deux problèmes formellement proches, mais issus de contextes différents. D'une part, il s'agit de raccorder deux tuyaux par une courbe du troisième degré (Fig. 14) sans qu'il n'y ait de brusque changement de pente. D'autre part, il s'agit de modéliser le mouvement d'un monte-charge sur la vitesse et l'accélération duquel on impose des conditions (pas trop de brusque variation). La fonction du troisième degré qui répond à ces deux questions est la même. Et pour déterminer ses coefficients, il a fallu exprimer les conditions imposées au moyen de la fonction dérivée représentant des pentes d'un côté et des vitesses de l'autre.

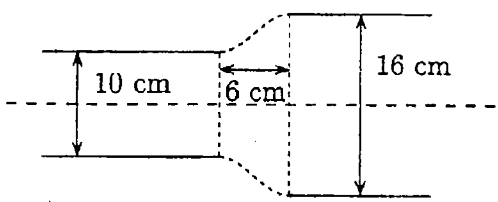


Figure 14

Une fois mis en évidence le concept de fonction dérivée, on développe les règles du calcul de dérivation.

2.1.3. Des aires et volumes aux limites de sommes

L'apprentissage d'intégrale définie est négocié dans le contexte des aires et des volumes. Il s'appuie essentiellement, d'une part sur l'idée de remplissage et, d'autre part sur la comparaison de deux aires ou de deux volumes, section par section. On s'approche du concept de limite pour prouver qu'un "remplissage infini" fournit un résultat exact d'une aire ou d'un volume curviligne. Cet apprentissage fait également réaliser que des problèmes d'aires et de volumes, à première vue très différents, sont parents, en ce sens qu'ils se ramènent au calcul de l'aire sous le graphe d'une même fonction.

– Des remplissages au moyen d'aires rectilignes permettent d'obtenir des aires curvilignes

a) *L'aire d'un segment de parabole.* Ici, le remplissage est inspiré par la forme du segment de parabole : d'abord le plus grand triangle possible auquel on accole, de proche en proche, deux triangles, quatre triangles, huit triangles... qui remplissent de mieux en mieux les places restées vides. Ce remplissage conduit à des résultats de plus en plus proches des 4/3 de l'aire du premier triangle.

b) *L'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1.* On remplit l'aire sous $y = x^3$ entre les bornes 0 et 1 au moyen d'un procédé plus abstrait : au lieu d'y caser la plus grande surface rectiligne possible et ensuite de remplir étape par étape les places restées vides, on considère un ensemble de rectangles, puis un autre ensemble de rectangles plus nombreux et plus fins qui remplace les précédents, et ainsi de suite (sur la difficulté de passer d'un découpage inspiré de la forme de la figure à un découpage en rectangles, *cf.* M. Schneider, 1991c).

Pour rappel, la somme des aires des n rectangles de la Fig. 15 donne le terme général d'une suite :

$$(1 - 2/n + 1/n^2)/4.$$

Si l'on procède par excès (Fig. 16), on obtient le terme général :

$$(1 + 2/n + 1/n^2)/4.$$

Ces deux suites ont une pour limite commune 1/4. Mais, comme on l'a vu plus haut (exemple 4 de la section 1.1), tous les élèves ne sont pas persuadés, loin s'en faut, que cette limite est l'aire exacte recherchée. D'où l'intérêt d'en proposer une preuve à travers laquelle se forge quelque chose du concept formalisé de limite.

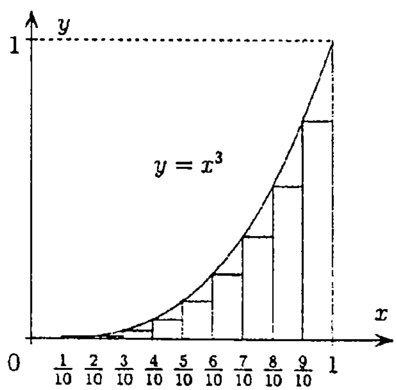


Figure 15

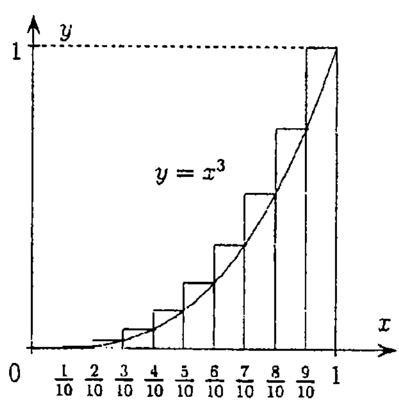


Figure 16

– De la preuve d'un calcul d'aire au concept de limite

Pour convaincre les élèves que l'aire sous $y = x^3$ vaut 1/4 exactement, nous formulons une preuve par l'absurde, s'inspirant de la méthode d'exhaustion et s'appuyant sur des évidences intuitives : d'une part, cette aire est encadrée par les sommes des aires des rectangles représentés respectivement aux Fig. 15 et 16, d'autre part, à chaque aire considérée correspond un nombre réel. L'aire sous $y = x^3$ ne peut valoir $1/4 + \varepsilon$, aussi petit que soit ε, car en subdivisant l'intervalle en un nombre suffisant de segments, on peut intercaler entre 1/4 et $1/4 + \varepsilon$, la somme correspondante de rectangles circonscrits (Fig. 17). D'où la contradiction : l'aire cherchée est supérieure à une de ses approximations par excès. De façon analogue, on montre que cette aire ne peut valoir $1/4 - \varepsilon$.

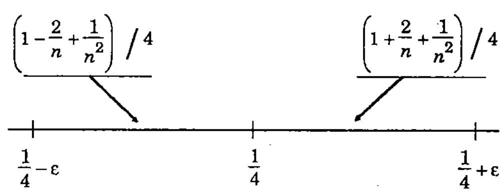


Figure 17

Comme analysé par M. Schneider (1988), cette preuve amorce le concept de limite d'une suite, défini en (ε, N). En effet, elle renverse l'ordre d'énonciation du comportement asymptotique utilisé spontanément par les élèves : au lieu d'écrire, comme eux, d'abord le comportement de l'indice n et ensuite le comportement subséquent du terme a_n de la suite, on s'intéresse de prime abord aux termes de la suite et puis à ses indices. Qui plus est, le choix de ces derniers y est subordonné au choix des a_n : on souhaite avoir $(1 + 1/2n + 1/n^2) / 4$ inférieur à $1/4 + \varepsilon$, pour un ε donné, on cherche la ou les valeurs de n pour lesquelles cette condition sera remplie. En outre, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ et leur agencement classique : $\forall$... $\exists$... transparaissent en filigrane de cette preuve. Effectivement, d'une part il s'agit de vérifier les inégalités

$$(1 + 2/n + 1/n^2) / 4 < 1/4 + \varepsilon$$

et

$$(1 - 2/n + 1/n^2) / 4 > 1/4 - \varepsilon$$

quelle que soit la valeur de ε. D'autre part, la contradiction qui ponctue cette preuve découle déjà de *l'existence* d'une valeur de n qui remplit une condition déterminée.

Bien sûr, si le concept de limite est mobilisé ici, c'est de manière implicite et à l'état d'ébauche seulement. On est loin encore de sa formulation symbolique. Mais ce qui nous paraît important dans cette preuve par l'absurde, c'est qu'elle fait pressentir ce qui débouchera sur la formulation technique précise du concept de limite et que ce dernier joue un rôle instrumental dans son établissement. Cette preuve repose en effet sur la possibilité de rendre à la fois

$$(1 + 2/n + 1/n^2) / 4$$

et

$$(1 - 2/n + 1/n^2) / 4$$

aussi proches qu'on veut de 1/4 qu'on le souhaite à partir d'un certain rang.

– Comparer des solides (respectivement des surfaces) section par section en utilisant le principe de Cavalieri

Les principes de Cavalieri (Fig. 18 et 19) affirment que si les sections de deux solides (respectivement de deux surfaces) par des plans parallèles (respectivement par des droites parallèles) sont toujours égales ou dans un même rapport, ainsi en est-il des volumes des solides (respectivement des aires des surfaces). Il font écho à l'intuition que partagent plusieurs élèves lorsqu'ils disent que le volume d'un parallélépipède vaut le produit de la base par la hauteur parce que "un volume est une superposition de surfaces" ou est engendré par "le coulissement de la base le long de la hauteur".

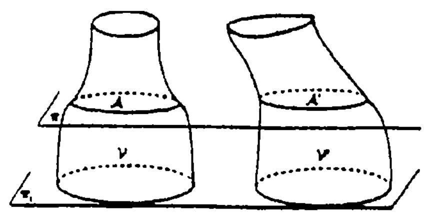


Figure 18

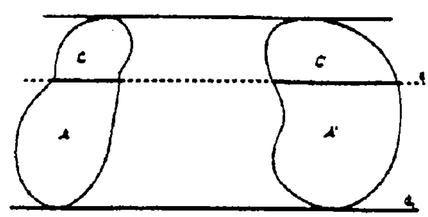


Figure 19

Dans ce projet, ces principes permettent de calculer :

– le volume d'un prisme oblique à partir de celui d'un prisme droit ;
– le volume d'une pyramide particulière : celle qui se construit dans un cube comme indiqué à la Fig. 20 ;
– l'aire délimitée par une ellipse à partir de celle du disque.

Les principes de Cavalieri constituent une sorte de garde-fou en énonçant des conditions dans lesquelles on peut comparer sans risque les solides ou surfaces section par section. Ainsi, le découpage radial décrit plus haut (*cf.* exemple 5 de la section 1.1) échappe au cadre restreint de ces principes.

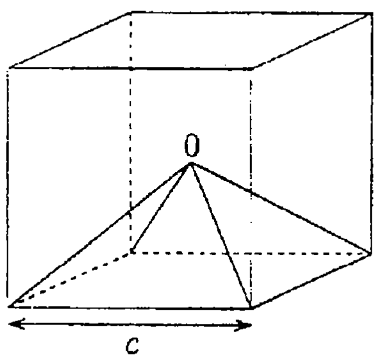


Figure 20

*– **Les aires sous une courbe sont des modèles***

Comparer des surfaces ou des volumes section par section permet de prendre conscience que des aires et des volumes a priori divers peuvent se ramener au calcul de l'aire sous une courbe du même type (droite, parabole, cubique...). Voyons selon quel processus. Par exemple, le volume d'un paraboloïde se ramène à l'aire d'un triangle. En effet, comme le suggère la Fig. 21, les disques découpés dans le paraboloïde et le cylindre inscrits sont entre eux, pour une même abscisse, comme les segments homologues dans le triangle et le rectangle circonscrit, et ce, quelle que soit l'abscisse.

Ainsi,

$$\frac{\text{volume paraboloïde}}{\text{volume cylindre}} = \frac{\text{aire triangle}}{\text{aire rectangle}} = \frac{1}{2}.$$

Or, le volume du cylindre et l'aire du rectangle sont un seul et même nombre mesure, soit 9 π (dans les unités appropriées). De là, on tire que le paraboloïde et le triangle ont également une même mesure.

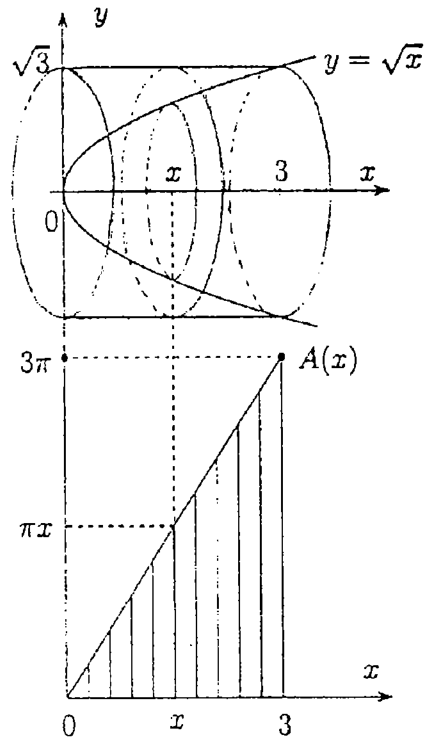


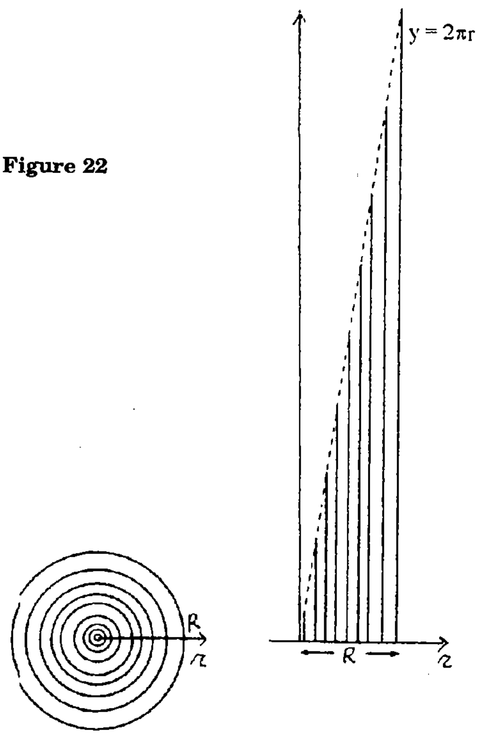
Figure 21

De même, l'aire d'un disque se ramène à celle d'un triangle comme le suggère la Fig. 22.

Dans les deux cas, le triangle apparaît

comme l'aire sous le graphe d'une fonction linéaire.

Figure 22



De manière analogue, l'aire sous le graphe d'une fonction du deuxième degré "standardise" à la fois le volume d'une pyramide (ou d'un cône), celui d'une sphère ou l'aire d'un segment de parabole.

De la sorte, on peut ramener les calculs d'aires et de volumes aux calculs des seules aires sous une courbe : il suffit de prendre pour courbe celle qui donne en chaque abscisse la mesure de la section correspondante. Une unité se fait ainsi au sein des problèmes d'aires et de volumes grâce au concept de fonction.

2.1.4. Réciprocité des deux problématiques d'intégration et de dérivation

Après avoir été conjecturé dans un contexte cinématique, le théorème fondamental du calcul intégral ramène le calcul d'aire à celui d'une primitive en faisant intervenir la fonction-aire. Les calculs de certaines primitives font apparaître la nécessité de distinguer les aires algébriques des aires géométriques.

Quelques problèmes invitent d'abord l'élève à conjecturer ce théorème dans un contexte particulier : par exemple, il s'agit de déterminer l'espace parcouru par un mobile à partir du graphe de sa vitesse en fonction du temps. Une fois réalisé que l'espace est l'aire sous ce graphe et en se souvenant que dériver l'espace (plus précisément la position) donne la vitesse, on soupçonne que la recherche d'une aire sous une courbe et le calcul d'une dérivée sont des processus réciproques :

$$\begin{array}{ccc} \text{vitesse} & & \text{vitesse = courbe} \\ \uparrow \ \text{dérivée} & & \downarrow \ \text{antidérivation} \\ \text{espace} & & \text{espace = aire} \end{array}$$

Réaliser ceci n'est pas encore saisir le ressort du théorème fondamental qui consiste à introduire dans un calcul d'aire (ou de volume) une idée de variation qui en est absente *a priori*. Au lieu de s'attacher au calcul de l'aire (ou de volume), on s'intéresse à son taux de variation, ce qui n'est pas naturel (cette difficulté est analysée dans M. Schneider, 1991d). Pour calculer une aire, il faut envisager le nombre cherché comme une des valeurs de la *fonction-aire* et, en plus, il faut prendre conscience qu'on ne connaît cette fonction que par des informations sur sa dérivée. Cette prise de conscience est favorisée chez l'élève si l'on injecte dans l'ambiance des aires et des volumes, l'idée de remplissage et de vitesse de remplissage. En posant, par exemple la question suivante : *à quelle vitesse se remplit l'aire sous $y = f(x)$ si cette courbe est engendrée par le déplacement d'un segment parallèle à Oy qui progresse régulièrement le long de l'axe des x?* (Fig. 23). Cette expérience de pensée revient à assimiler la variable x à la variable temps.

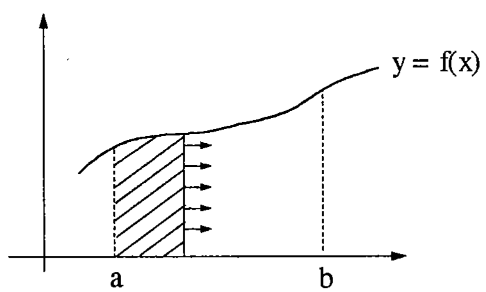


Figure 23

En changeant d'échelle *($x = kt$)*, on réalise que dériver par rapport à t n'est pas dériver par rapport à x et qu'il faut bien dériver l'aire par rapport à x, et non par rapport à t , pour obtenir la fonction courbe.

Le calcul des aires et des volumes est source de surprise : si la fonction est négative, sa primitive est décroissante, ce qui peut engendrer des aires ou volumes négatifs : on distingue alors ce qu'on convient d'appeler les aires algébriques et les aires géométriques.

2.1.5. Mise au point simultanée des concepts de limite et de nombre

La notion de limite a été rencontrée à plusieurs reprises dans des contextes différents : suites, asymptotes, tangentes, vitesses, aires et volumes. Le moment est venu de dégager ce concept qui unifie les diverses situations rencontrées et de mettre au point son écriture formelle. La confection de preuves de calculs de limites non évidentes en fournit l'occasion. Ces preuves, à leur tour, amèneront certains axiomes des réels.

– *Preuves de limites non évidentes*

Par exemple, que la suite a^n $(a < 1)$ possède une limite nulle est une évidence intuitive lorsque a est compris entre 0 et 1/2, ce n'est plus le cas lorsque a est proche de 1. On n'entreprend donc *a priori* de démontrer cette limite que pour des valeurs de a inférieures à 1 et supérieures à 1/2.

Il faut *prouver* que a^n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, si a est plus petit que 1, même extrêmement proche de 1. Comment prouver ? L'idée intuitive de limite est inutilisable. Autre idée : cherchons à montrer que, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, la suite a^n passera en dessous de ε. Pour quels n a-t-on

$$a^n < \varepsilon\ ?$$

Cette inégalité s'écrit aussi

$$(1/a)^n > 1/\varepsilon\ .$$

Or $1/a = 1 + d$ pour un certain d positif, puisque $1/a$ 1. Donc, l'inégalité s'écrit

$$(1 + d)^n > 1/\varepsilon\ .$$

Mais $(1 + d)^n > 1 + nd$, et $1 + nd$ tend vers l'infini avec n en vertu d'une évidence à laquelle on donnera le statut d'axiome lorsqu'on aura étudié plusieurs raisonnements qui y aboutissent (*cf.* section suivante). D'où la preuve.

On voit clairement sur cet exemple que l'idée intuitive de limite ne donne pas toujours prise au raisonnement. La pensée discursive de la preuve ne peut s'appuyer que sur une définition elle-même discursive : les quantificateurs et inégalités se prêtent à la démonstration. Bien sûr, il suffit ici de trouver un n qui satisfait l'inégalité, puisqu'on a affaire à une suite monotone : il faudra traiter ultérieurement des suites non monotones pour créer la nécessité d'affiner le concept de limite.

De plus, on réalise, lors de la mise en ordre de la preuve, que celle-ci est valable pour toutes les valeurs de a comprises entre 0 et 1. Ce qui pousse à généraliser l'énoncé du théorème que l'on démontre : la preuve et l'énoncé se mettent ainsi au point l'un par l'autre et l'un pour l'autre.

– Algèbre des limites et axiome d'Archimède

Le concept formalisé de limite est à nouveau mobilisé pour prouver des théorèmes généraux relatifs à l'algèbre des limites de suites (limite d'une somme...) et qui ont déjà été implicitement exploités auparavant ($\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, la somme d'une série arithmétique de raison positive est infinie, $\Sigma (a_n + b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n$).

A plusieurs reprises se dégage une propriété incontournable à laquelle on donne le statut d'axiome : il s'agit de l'*axiome d'Archimède* (déjà rencontré dans la preuve précédente) qui peut prendre des formes diverses telles que :

– *Toute suite arithmétique de raison $a > 0$ tend vers l'infini.*
– *La suite $1/n$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.*
– *La suite $1/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*
...

– Nombres assimilés à une série et axiome des intervalles emboîtés

Un autre axiome des réels incontournable en analyse est l'*axiome des intervalles emboîtés*. Dans notre projet, il permet, avec l'axiome d'Archimède, de donner le statut de nombre à plusieurs types de séries. Par exemple, on convient d'identifier la série

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + ...$$

au nombre 1. Cette identification s'appuie sur le fait qu'on ne peut intercaler aucun nombre entre 1 et la limite de cette série, puisque 1 est le seul nombre qui appartienne à tous les intervalles emboîtés dont la longueur tend vers 0 : les intervalles $[1 - 1/2^n, 1]$.

Le même genre d'argument amène à écrire sous forme de fractions les nombres décimaux illimités périodiques qui souffrent d'une crise d'identité, comme nous l'avons dit plus haut (*cf.* exemple 6 de la section 1.1).

Et l'axiome des intervalles emboîtés permet aussi de donner le statut de nombre à des décimaux illimités non périodiques. Par exemple, celui qui est engendré par la série harmonique alternée

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ...$$

Une fois l'ensemble des réels identifié comme celui des nombres décimaux illimités (y compris des nombres tels que 1 = 0,99999...), on montre comment manipuler ces nombres et leurs opérations au moyen d'encadrements.

– Sur quels nombres fonder l'analyse sans recourir à des intuitions géométriques et cinématiques ?

Le projet se termine par cette question cruciale. Quelques démonstrations et contre-exemples bien choisis montrent que les principaux résultats d'analyse ne tiennent que si les fonctions sont définies sur des intervalles de réels. Par exemple, le professeur exhibe une fonction définie sur les rationnels d'un intervalle, qui n'y est pas croissante bien que sa dérivée y soit positive. Et de fait, une démonstration du lien entre la croissance d'une fonction sur un intervalle et la positivité de sa dérivée repose sur l'axiome des intervalles emboîtés, non satisfait pour l'ensemble des rationnels.

Ce contre-exemple montre aussi le danger qu'il y a à établir des résultats d'analyse en se basant sur des intuitions géométriques ou physiques.

La démonstration rigoureuse de tels théorèmes pourrait faire apparaître pour certains élèves la nécessité d'hypothèses comme la continuité et la dérivabilité des fonctions.

2.1.6. Une reformulation du concept d'intégrale définie

Si on veut que le concept de limite puisse être efficace pour établir une théorie de l'intégration, il faut adapter la définition de l'intégrale en l'élargissant comme indiqué ci-dessous.

A la section 2.1.3., des aires sous une courbe ont été obtenues grâce à des sommes de Riemann particulières : la subdivision de l'intervalle d'intégration était régulière et les hauteurs des rectangles étaient les images soit des origines, soit des extrémités des intervalles de la subdivision.

De telles limitations sont efficaces à des fins de calculs. Elles deviennent encombrantes dès qu'il s'agit de démontrer des propriétés de l'intégrale définie qui font écho aux propriétés intuitives de l'aire. Considérons par exemple le théorème d'additivité de l'intégrale par rapport aux intervalles. En effet, supposons que $a = 1$, $b = 2$ et $c = 2 + \sqrt{2}$. Il est impossible d'exprimer les trois intégrales de l'énoncé au moyen de subdivisions régulières. En effet, les intervalles $[1,2]$ et $[2, 2 + \sqrt{2}]$ n'ont pas de commune mesure.

2.2. Les fonctions apparaissent de façon significative dans notre projet, et ce de trois façons

Dans notre projet, les fonctions sont mobilisées sous différentes facettes. Tout d'abord, le concept de fonction lui-même émerge progressivement de problèmes divers. Ensuite les fonctions apparaissent comme outils de modélisation. Enfin, elles sont étudiées pour elles-mêmes, par classes.

2.2.1. Le concept de fonction

Dans le cheminement décrit à la section 2.1, le concept de limite de fonction apparaît peu à peu comme concept unificateur des différents problèmes traités. Parallèlement, le concept même de fonction émerge de manière récurrente dans ce projet. Voici quelques moments clefs.

1. Considérées *a priori* par les élèves comme des kyrielles d'objets (*cf.* C. Hauchart, 1985), les suites apparaissent comme fonction de n dès qu'on en étudie le comportement asymptotique : "*l'objet primitif* que constituait auparavant le $n^{\text{ième}}$ terme de la kyrielle a dû se dissocier en deux morceaux distincts : n et son image". En effet, on est amené à préciser à partir de quel rang tous les termes sont à une proximité donnée de sa limite.

2. L'étude de mouvements à vitesse variable fait apparaître les vitesses comme fonctions du temps; de manière analogue, le tracé des graphes de fonctions polynomiales via les pentes de tangentes conduit à considérer la "fonction pente".

3. Comme développé à la section 2.1.3, les aires sous le graphe de certaines fonctions standardisent des calculs divers d'aires et de volumes.

4. On ne peut réaliser le lien de réciprocité entre les calculs d'aires et le processus de dérivation qu'en injectant une idée de variation dans ces calculs, c'est-à-dire en considérant la "fonction aire".

2.2.2. Les fonctions comme outil de modélisation

Dans les premiers chapitres de ce projet l'élève est invité à dégager de lui-même les fonctions (éventuellement sous forme de suites) qui modélisent des problèmes issus de contextes divers (géométriques, numériques, cinématiques) : mouvements d'un train donné par un graphique espace-temps, dilatation de l'eau, impôt des personnes physiques, etc. Pour résoudre ces problèmes, il est amené à traiter des fonctions sous des aspects divers (tableaux, graphiques, formules, description verbale) et à passer de l'un à l'autre.

En bref, une compétence importante travaillée à travers ces problèmes est la formulation analytique des fonctions sous-jacentes. Un enseignement qui hypertrophie les exercices de variations de fonctions néglige généralement cette compétence pourtant capitale dès qu'on exploite les mathématiques dans d'autres disciplines.

Dans la suite du projet, cette compétence est à nouveau entraînée à l'occasion de problèmes de vitesses liées, de problèmes d'optimisation, d'études de mouvements périodiques modélisés par les fonctions trigonométriques et de formulation de fonctions-intégrands adéquates pour des calculs d'aires et de volumes.

Dans certains cas, l'élève est amené à donner (ou redonner) du sens à certaines expressions analytiques. Ceci est typiquement le cas pour la fonction exponentielle $y = a^x$, expression dont le sens varie selon la nature de x : produit si x est un naturel, inverse si x est un entier négatif... L'élève prend conscience que ces diverses significations expriment la volonté *a priori* de satisfaire certaines régularités de croissance telles que celles impliquées dans la situation suivante.

Si l'on suppose qu'une population de bactéries double d'heure en heure, cela signifie que les rapports

$$\frac{P(t+1)}{P(t)}$$

sont constants et égaux à 2 (si t est le temps mesuré en heures). En étendant une telle hypothèse à des intervalles de temps plus petits tout en respectant le doublement d'heure en heure, on arrive de proche en proche aux résultats suivants

$$\frac{P\,(t+\frac{1}{2})}{P(t)} = \sqrt{2}$$

$$\frac{P\,(t+\frac{1}{4})}{P(t)} = \sqrt[4]{2}$$

$$\frac{P\,(t+n)}{P(t)} = \frac{1}{2^n}$$

Si l'on appelle P_0 la population en $t = 0$, ces conditions conduisent par exemple à

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\,.\,P_0\ ,$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = (\sqrt{2})^3\,.\,P_0\ ,$$

$$P(-4) = \frac{1}{2^4}\,.\,P_0\ ,$$

$$P\left(\frac{-5}{2}\right) = \frac{1}{(\sqrt{2})^5}\,.\,P_0\,.$$

Par souci de simplicité et de cohérence, une seule notation est souhaitée qui fasse apparaître clairement la valeur du temps considéré : on convient d'écrire

$$P(t) = 2^t\,.\,P_0$$

pour n'importe quel t rationnel, ce qui suppose de *définir* par exemple

$2^{1/2}$ comme étant $\sqrt{2}$, 2^{-4} comme étant $\frac{1}{2^4}$, et 2-5/2 comme étant $\frac{1}{(\sqrt{2})^5}$.

Ensuite le souhait d'obtenir une fonction continue pour exprimer la croissance de la population amène à préciser le sens de 2^t pour des valeurs irrationnelles de t, par encadrements au moyen de valeurs 2^q où q est rationnel. L'axiome des intervalles emboîtés assurera au terme de ce projet l'existence d'un tel prolongement.

2.2.3. Les fonctions comme objet d'étude

Au cours de ce projet d'enseignement se constitue progressivement un "atlas" de fonctions. L'intention est d'associer des graphes aux expressions analytiques données tout comme dans les exercices classiques de variation de fonctions. Mais la façon de procéder est significativement différente : il ne s'agit plus d'étudier les fonctions, une par une, en décomposant l'étude en étapes ponctuelles (recherche du domaine de définition, des points adhérents, des asymptotes, des dérivées...), chacun de ces points faisant l'objet d'un apprentissage isolé à part entière (par exemple, se cantonner pendant un certain temps à des recherches de domaines de définition et rien que cela, ce qui oblige souvent le professeur à compliquer à outrance les difficultés techniques). Il s'agit plutôt d'une détermination plus globale des graphes et cela de deux points de vue :

1. Les fonctions sont étudiées classe par classe (ce qui n'empêche pas de commencer par des exemples) : les fonctions $y = x^n$, $y = x^{-n}$, $y = x^n + x^{-m}$, les polynômes, les fractions rationnelles, quelques fonctions irrationnelles (comme $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$), les fonctions trigonométriques, les fonctions exponentielles et logarithmes.

2. Pour chaque classe, des outils d'investigation les plus pertinents sont sélectionnés de façon à obtenir d'emblée tout le

graphe avec ses caractéristiques les plus saillantes.

Par exemple, dans l'étude graphique des fractions rationnelles, l'outil asymptote est déterminant. On peut chercher les extrémés ou les points d'inflexion si les informations relatives aux asymptotes font pressentir leur existence (comme pour $y = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$). Mais dans certains cas, c'est tout à fait superflu. Ainsi, les graphes des fonctions homographiques ($y = \frac{ax+b}{cx+d}$) s'obtiennent en appliquant des translations et des affinités particulières au graphe de $y = 1/x$.

Par contre, l'allure du graphe d'une fonction polynomiale ne peut généralement être déterminée sans passer par la recherche des extrémés, des points d'inflexions et le tracé de quelques tangentes bien choisies. D'où l'intérêt d'étudier ces fonctions dans la foulée des pentes de tangentes.

Les calculs classiques de limites peuvent être complétés (voire précédés ou remplaçés) par d'autres moyens d'investigation graphiques, algébriques ou numériques. Par exemple, on peut obtenir le graphe de la fonction

$$y = x^2 + 1/x$$

à partir de ceux des fonctions $y = x^2$ et $y = 1/x$ en procédant par "sommation d'ordonnées" (c'est-à-dire report de segments). On réalise ainsi qu' $x^2 + 1/x$ se comporte comme $1/x$ au voisinage de $x = 0$, et, qu'aux infinis, cette fonction se comporte comme x^2. Cet exemple montre également que, parmi plusieurs expressions algébriques équivalentes d'une même fonction, il faut choisir "la bonne forme" (*cf.* M. Wertheimer (1945)), ici $x^2 + 1/x$ au lieu de $(x^3 + 1)/x$. De même, écrire la classe de fonctions

$$y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$$

sous la forme

$$y = mx + p + \frac{q}{dx+e}$$

fait apparaître l'asymptote $y = mx + p$.

On peut réinvestir ce réflexe de la recherche de la bonne forme pour étudier la classe des fonctions

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

Par exemple,

$$f(x) = \sqrt{25^2+8x+1}$$

peut s'écrire

$$f(x) = \sqrt{(5x-\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}$$

qui se comporte aux infinis comme les droites $y = \pm(5x - \frac{4}{5})$, ses asymptotes.

Quant à la recherche d'une éventuelle périodicité, elle prend son sens pour les fonctions trigonométriques.

Cette approche globale aiguise le regard critique des élèves et leur intuition des graphiques, pour autant que son apprentissage soit organisé dans la durée. Elle permet d'étudier la plupart des fonctions utilisées dans les autres disciplines (qui sont des composées de fonctions de base

($1/x$, $\sqrt{x}$, $\sin x$, a^x... avec des fonctions du premier ou du second degré).

L'étude de fonctions plus particulières telles que $y = (x^2 (x-1))^{\frac{1}{3}}$, $y = x \sin 1/x$ ... et de leurs particularités graphiques permettrait à certains élèves d'approfondir leur perception des fonctions : point de rebroussement, infinité d'oscillations sur un intervalle fermé borné, etc.

3. EN GUISE DE CONCLUSION : UNE APPROCHE HEURISTIQUE QUI S'INSPIRE GLOBALEMENT DE L'HISTOIRE

Notre projet d'enseignement s'éclaire d'un jour intéressant si on le situe par rapport, d'une part au développement historique de l'analyse et, d'autre part à la thèse d'I. Lakatos. Développons ces deux aspects.

3.1. Un parallèle avec l'histoire

L'histoire de l'analyse a comporté en gros trois étapes.

Depuis Eudoxe jusque vers le milieu du XVII^e siècle, les problèmes de quadrature (et de cubature) n'avaient pas de rapport avec la recherche des tangentes, non plus qu'avec celle des maxima ou l'étude des vitesses. Il s'agissait là de secteurs distincts des mathématiques. Qui plus est, à l'intérieur de chaque secteur, chaque problème recevait une solution particulière même si certains principes de raisonnement tels que l'exhaustion ou la méthode de Cavalieri revenaient éventuellement d'un problème à l'autre. Il s'est ainsi constitué au fil des siècles un stock de résultats situés dans des contextes divers.

Avec la découverte du théorème fondamental par Newton et Leibniz dans la deuxième moitié du XVII^e siècle, on réalise la parenté profonde quoiqu'insoupçonnée jusque-là des résultats antérieurs. Ils sont dorénavant justiciables d'une méthode unique et routinière qui éclipse l'exhaustion et la méthode de Cavalieri. Mais cette méthode nouvelle mobilise – en un certain sens – plutôt des objets mentaux que des concepts : le rapport ultime, l'approximation linéaire, les aires qu'on ne définit pas mais qu'on calcule à l'aide de primitives, etc. Pendant un siècle et demi, les résultats s'accumulent tandis que s'approfondit le malaise sur les fondements du nouveau calcul.

Une troisième phase du développement de l'analyse débute avec Bolzano et Cauchy. Les *concepts* de fondement apparaissent : la limite au sens de Cauchy qui sera formalisée par Weierstrass, la continuité techniquement définie et qui va être discernée de la continuité uniforme, l'intégrale qui se constitue de Cauchy à Riemann et fournit la définition de l'aire. La mise au point de ces concepts et la démonstration de leurs propriétés font apparaître certains axiomes incontournables des nombres réels.

Notre projet d'enseignement s'inspire de cette progression. En effet, quelque chose du concept de limite est mobilisé d'emblée dans des problèmes issus de contextes variés *a priori* non connectés les uns aux autres : suites, asymptotes, tangentes, vitesses, aires et volumes. Des liens apparaissent peu à peu : les pentes de tangentes et les vitesses sont deux facettes du concept de dérivée ; certains calculs d'aire et de volume se ramènent à des calculs de limites de suites; ils apparaissent ensuite comme réciproques des calculs de dérivées pour autant qu'on y introduise l'idée de variation ; l'expression "tendre vers" apparaît de manière récurrente. En définitive, l'unité globale des problèmes se réalise autour du concept de limite d'une fonction. En étudiant les propriétés de ce concept, on est amené à préciser la nature des nombres sur lesquels on travaille.

En fait, cette progression va en sens inverse d'un cursus classique d'enseignement de l'analyse qui débute par l'axiomatique des réels et qui étudie le concept fondateur de limite avant ceux de dérivée et d'intégrale et leurs applications. Un tel cursus constitue une inversion didactique au sens donné par H. Freudenthal (1973), c'est-à-dire un exposé qui va à contre-courant de l'histoire. En ce sens, notre projet restaure donc l'ordre historique.

La manière dont les fonctions apparaissent dans notre projet échappe à ce parallèle avec l'histoire. En effet, elles y sont massivement présentes dès le début, les élèves en étant déjà familiers au moment où ils abordent l'analyse. Alors que, lors du développement de l'analyse dans l'histoire, l'idée même de fonction émerge plus progressivement, son importance et sa portée dans cette discipline ne devenant explicites qu'avec Euler au XVIII^{e} s.

3.2. Une approche heuristique

Comme annoncé dans l'introduction, le projet AHA illustre ce que I. Lakatos (1976) appelle une approche heuristique. I. Lakatos a mis en évidence que l'activité mathématique relève d'une dialectique preuve-réfutation : l'énoncé d'un théorème, sa preuve, ses "limites de validité" révélées par des contre-exemples et les concepts qu'il mobilise se mettent au point de manière concomitante, l'un par l'autre, l'un pour l'autre. Un des concepts majeurs d'une telle perspective est celui de *proof-generated concept,* c'est-à-dire un concept mathématiquement formé pour les besoins d'une démonstration et que l'auteur évoque en ces termes :

> *"Proof-generated concepts are neither "specifications" nor "generalisations" of naïve concepts. The impact of proof and refutations on naïve concepts is much more revolutionary than that : they erase the crucial naïve concepts completely and replace them by proof-generated concepts."*

Avant lui, G. Polya (e.a. 1967) avait illustré cette démarche du chercheur. Plus globalement, les travaux de Lakatos, tout comme ceux de Polya, ont souligné l'importance de l'heuristique dans l'apprentissage des mathématiques. Avant d'être peaufinés pour fonctionner dans des preuves, les concepts sont progressivement construits pour résoudre des problèmes : d'abord des notions à caractère instrumental qui donnent lieu plus tard à des concepts de fondement et à des théories plus formelles.

Cette perspective que nous évoquons pour les mathématiques s'inscrit dans une vision constructiviste des sciences (*cf.* e.a. G. Fourez, 1988).

Comme nous l'avons illustré, notre projet d'enseignement tâche de respecter cette dynamique propre à l'activité mathématique. En voici quelques exemples :

1. Dans ce projet, la limite d'une fonction est d'abord envisagée comme une méthode de calcul qui permet de *déterminer* des pentes de tangente ou des vitesses instantanées. On met à l'épreuve cette méthode en contrôlant par ailleurs les résultats qu'elle fournit (par exemple, on contrôle la tangente à une courbe polynomiale via l'approximation affine et le débit instantané dans le problème du vase conique via une expérience de pensée).

Une fois confortée par des exemples, cette méthode fournit un moyen de *définir* le concept de tangente par le biais de sa pente et celui de vitesse instantanée.

A terme dans le projet, le concept de limite est formalisé au moyen de quantificateurs pour pouvoir fonctionner dans des preuves, par exemple, des preuves de théorèmes relatifs à l'algèbre des limites.

2. Au début de ce projet, les aires et les volumes sont considérés comme des objets mentaux qui jouissent de propriétés intuitives telle l'additivité. On ne doute pas *a priori* de leur existence même s'il s'agit d'aires et de volumes curvilignes : on cherche seulement à les *déterminer*. Dans ce contexte aussi, la limite apparaît d'abord comme un moyen de calcul. Mais déjà, pour prouver que l'aire sous $y = x^3$ vaut 1/4 exactement, on utilise un double raisonnement par l'absurde qui mobilise quelque chose du concept de limite formalisé.

Ensuite, les sommes de Riemann générales sont définies de manière à prouver facilement les propriétés de l'intégrale définie (additivité par rapport aux intervalles...).

Cette approche prépare les élèves à concevoir dans la suite de leur formation qu'une aire puisse être *définie* par la limite de telles sommes.

3. Pendant une bonne partie de ce projet, les nombres sont présents sous une forme naïve :

"*Toute mesure de grandeur implique une notion confuse de nombre réel* [...] *qui n'est guère différente de celle qu'on retrouve aujourd'hui dans l'enseignement élémentaire ou chez les physiciens et ingénieurs; cette notion ne se laisse pas définir avec exactitude, mais on peut l'exprimer en disant qu'un nombre est considéré comme défini par la possibilité d'en obtenir des valeurs approchées et d'introduire celle-ci dans le calcul* [...]" (Bourbaki, 1960)

A ce stade, les nombres sont considérés comme ayant une existence *a priori* : il s'agit seulement de les *déterminer*.

Ensuite, les preuves de certaines propriétés des limites font apparaître des propriétés incontournables des nombres réels auxquels on donne le statut d'axiome, tel l'axiome d'Archimède. En se basant sur certaines raisons liées à l'axiome des intervalles emboîtés, on convient alors de *définir* les nombres réels comme des séries, leur existence étant ainsi assurée par le truchement d'une définition.

Enfin, on suggérera sur un exemple (lien entre la croissance d'une fonction et la positivité de sa dérivée) que les principaux résultats de l'analyse ne sont vérifiés que pour des fonctions définies sur des ensembles de réels.

4. L'approche constructiviste de notre projet apparaît également dans l'étude de

certaines classes de fonctions. Ainsi, les fonctions trigonométriques sont construites pour modéliser des phénomènes périodiques et les fonctions exponentielles pour traduire certains phénomènes de croissance.

Le principe organisateur de notre projet peut se résumer ainsi : *ne théoriser que si nécessaire et amener progressivement les élèves à une théorie formalisée, par le biais d'une suite de questions s'enchaînant d'un créneau plus familier vers des préoccupations plus abstraites.*

Selon toute vraisemblance, tous les élèves ne peuvent être conduits aussi loin. Certains s'arrêteront en cours de route. L'important, à nos yeux, est que ceux-ci disposent d'un bagage, moins formalisé sans doute, mais significatif pour eux et faisant écho aux questions qu'ils se sont posées et aux difficultés qu'ils ont rencontrées.

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE (1969) *Physique* (V-VIII), traduit par H. Carteron, Les Belles Lettres, Paris, 1969.

BERKELEY (1734) "The Analyst", *in The works of G. Berkeley,* Vol. 4, Nelson, Londres, 1951.

BOURBAKI, N. (1960) : *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris.

BROUSSEAU, G. (1983) "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 4.2., 165-198.

DE GANDT, F. (1983 environ), Les indivisibles de Torriceli, *Cahier n°17, Torricelli-II, du Séminaire d'Epistémologie et d'Histoire des Sciences,* Université de Nice, sans date.

FOUREZ, G. (1988) : *La construction des Sciences,* De Boeck-Wesmael, S.A., Bruxelles.

FREUDENTHAL, H. (1973) : *Mathematics as an educational task*, D. Reidel, Dordrecht.

FREUDENTHAL, H. (1983) : *Didactical phenomenology of mathematical structures,* D. Reidel, Dordrecht.

GALILEI, Galileo (1914) : *Dialogues concerning two new sciences*, traduit en anglais par H. Crew et A. de Salvio, Dover, New York.

GARNER, M. (1979) : *Haha*, Belni, Paris.

GRAND'HENRY-KRYSINSKA, M. et HAUCHART, C. (1993) : "Réflexions épistémologiques à propos du concept de tangente à une courbe", *in Actes de la première Université d'Eté Européenne Histoire et Epistémol.ogie dans l'Education Mathématique*, Montpellier, pp. 431-442.

HAUCHART, C. (1985) : *Sur l'appropriation des concepts de suite et de limite de suite*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.

HAUCHART, C. et ROUCHE, N. (1985) : *Les suites et les séries géométriques : essai d'analyse contextuelle*, bulletin de l'A.P.M.E.P., n° 348, pp. 271-290.

LAKATOS, I. (1976), *Proofs and refutations, the logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press.

POLYA, G. (1967) : *La découverte des mathématiques*, Dunod, Paris.

SCHNEIDER, M. (1988) : *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, thèse de doctorat, Louvain-la-Neuve.

SCHNEIDER, M. (1991a) : "Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente", *Repères IREM* n° 5, pp. 65-81.

SCHNEIDER, M. (1991b) : "Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol.11 n° 2.3, pp. 241-294.

SCHNEIDER, M. (1991c) : "Un fossé entre le concept d'intégrale définie et une première perception des aires et des volumes", *Mathématique et Pédagogie* n° 81, pp. 85-104.

SCHNEIDER, M. (1991d) : "D'une première perception des aires et des volumes au calcul des primitives", *Mathématique et Pédagogie* n°82, pp. 29-50.

SCHNEIDER, M. (1992) : "A propos de l'apprentissage du taux de variation instantané", *Educational Studies in Mathematics* 23, pp. 317-350.

WERTHEIMER, M. (1945) : *Productive thinking* , Harper & Brothers, New York.