VIVENT LES DÉTERMINANTS !

Frédéric PHAM
Département de Mathématiques
Université de Nice-Sophia-Antipolis

Les présent article est la traduction française d'un article en anglais (1) soumis à la revue *American Mathematical Monthly* (2), et dont le titre faisait écho à un article de Sheldon Axler intitulé "Down with determinants" (A bas les déterminants) paru dans cette même revue.

Mon article se place à un niveau beaucoup moins technique que celui d'Axler : consacré à la question de "comment enseigner la réduction des endomorphismes", ce dernier consiste essentiellement en variations sur le thème du "polynôme minimal", organisées de façon à éviter tout recours au polynôme caractéristique et à la notion de déterminant ; là où les choses se gâtent, à mon avis, c'est quand il se met à parler de *mesures de volumes* (là aussi sans utiliser les déterminants). J'ai trouvé amusant de répondre à son anathème sur les déterminants par un anathème sur toute définition de volume utilisant la structure euclidienne de l'espace !

J'ai lu avec grand intérêt l'article provocateur "Down with determinants" de Sheldon Axler, publié dans votre numéro de février 1955. J'aimé beaucoup de ses idées mais suis en désaccord profond avec d'autres. Cela m'a amusé de voir cet article paraître au moment même où je prenais

(1) "Determinants are beautiful !" Je remercie Rudolf Bkouche de s'être aimablement chargé de cette traduction.

(2) Extrait de la lettre de refus de l'éditeur de la revue : *"While your paper contains many interesting comments about mathematics and philosophy, we do not believe it is quite right for the Monthly. The style is a bit too discursive and (in places) vague."*

goût aux déterminants, me disant

enfin, je comprends les déterminants !

Qu'il m'ait fallu tant d'années pour en arriver là corrobore certainement l'affirmation d'Axler que

"les déterminants sont difficiles, non intuitifs, etc."

Aussi n'essaierai-je pas de discuter le problème pédagogique de savoir s'il faut ou non enseigner les déterminants aux débutants. Je veux seulement essayer de communiquer l'enthousiasme d'un néophyte qui, après avoir enseigné vingt-cinq ans à l'université, découvre soudain que :

"les déterminants sont beaux et amusants à enseigner"

Une énigme sur "la mesure des volumes"

Comme chacun sait, les déterminants d'ordre 2 peuvent s'interpréter en termes d'aires, les déterminants d'ordre 3 en termes de volumes, etc. Il semble ainsi que la notion de déterminant soit une notion *métrique : comment peut-on mesurer les aires, les volumes, etc, si l'on ne sait pas mesurer les longueurs ?*

D'autre part, nous, mathématiciens professionnels, savons que que le volume n-dimensionnel dans un espace de dimension n n'est pas une notion métrique. Mais si l'on nous demande d'expliquer pourquoi, nombre d'entre nous (et moi, il y a encore peu) nous lancerons dans des explications quelque peu sophistiquées, du genre :

i) la notion de *forme volume* peut être définie dans un espace de dimension n comme la valeur absolue d'une n-forme alternée, et point n'est besoin de supposer que cet espace soit pourvu d'un produit scalaire euclidien ;
ii) puisque le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants, deux matrices semblables ont le même déterminant.
etc.

De telles explications techniques m'ont toujours laissé insatisfait, avec le vague sentiment que leur technicité dissimulait quelque vérité simple que je ne comprenais pas. Voici donc mon énigme :

comment comprenez-vous, de façon *vraiment* élémentaire, qu'on puisse *mesurer les volumes sans savoir mesurer des longueurs ?*

"Géométrie" sans mètre

Des lecteurs objecteront peut-être qu'une telle question *ne peut pas être* élémentaire : les notions géométriques d'aires, de volumes, etc, se rapportent d'abord à l'espace où nous vivons, espace qui *est* pourvu d'une métrique euclidienne ; concevoir une géométrie *sans* cette métrique, c'est déjà faire des mathématiques abstraites et il n'y a donc pas lieu de s'étonner que l'on ne puisse répondre à une question portant sur une telle géométrie par de simples considérations intuitives.

Même si je reconnais qu'une telle géométrie relève des mathématiques abstraites, je n'accepte pas la conclusion qu'on ne puisse l'expliquer dans les premières années de l'université. Comment peut-on motiver l'usage du terme "vectoriel" dans l'expression "espace vectoriel" si ce n'est par les vecteurs de l'espace usuel, représentés par des segments orientés ? Et une fois cela expliqué, peut-on s'abstenir d'interpréter géométriquement les axiomes des espaces vectoriels, par exemple d'interpréter la distributivité de la multiplication par les scalaires comme exprimant le théorème de Thalès ? Mais, une fois reliés les axiomes des espaces vectoriels à la "géométrie usuelle", n'est-il pas essentiel de préciser la part de la géométrie usuelle qui manque dans les axiomes ainsi énoncés ?

Bien sûr, il s'agit là d'un mode de pensée abstrait. Plus précisément, c'est une "abstraction" de notions mathématiques à partir de notre expérience concrète. Mais si "l'abstraction" est comprise dans ce sens, c'est-à-dire non comme une abstraction "toute faite" mais comme un *processus d'abstraction*, n'est-il pas vrai que la maîtrise de l'abstraction doive être le principal objectif de tout enseignement des mathématiques ? (3)

Revenant au problème spécifique de la compréhension de la géométrie dont les premiers concepts sont abstraits d'expériences concrètes utilisant règles, équerres,compas, etc, il est naturel de se demander quelle part de cette expérience est décrite par le concept d'*espace affine*, avant toute métrique euclidienne.

Pour répondre à cela, j'ai trouvé amusant de broder sur le thème central d'un roman de science-fiction *Le Nuage Noir* de Fred Hoyle, que j'ai lu il y a bien longtemps : il raconte l'arrivée effrayante, près de la Terre, d'un énorme nuage noir venu de l'espace intersidéral, qui se révèle être un être vivant d'une intelligence supérieure (et somme toute amical). Puisque son corps est fluide, on peut l'imaginer incapable de manipuler ou même concevoir des objets solides (comme des équerres ou des compas). Mais je suppose que sa constitution électromagnétique lui permet d'émettre des rayons laser, et ainsi de concevoir ce qu'est une ligne droite. De plus, il a un sens très précis de ce que sont des droites parallèles (émettre deux rayons parallèles lui donne un sentiment d'harmonie, analogue à celui que nous ressentons lorsque nous écoutons deux sons musicaux à l'unisson).

On peut s'amuser à spéculer sur la sorte de géométrie que *Mel Nefel* (4) pourrait avoir inventé : très vraisemblablement, ce serait une version de notre géométrie affine (5). Je peux maintenant reformuler mon énigme sous la forme très concrète suivante :

comment Nefel peut-il mesurer les aires, les volumes, etc ? [cf. fig. 1]

(3) Je déteste l'idée que les "mathématiques abstraites nobles" (trop souvent du type "abstraction toute faite") soient enseignées aux seuls étudiants qui se proposent de devenir des mathématiciens professionnels , tandis que ceux des étudiants qui s'intéressent aux seules applications pratiques doivent se contenter d'exécuter aveuglément des algorithmes (genre de tâche que les ordinateurs peuvent faire mieux que les hommes).

(4) C'est ainsi que j'appelle le nuage noir (après avoir consulté un dictionnaire de Grec ancien).

(5) La question de savoir s'il s'agirait de géométrie affine sur **Q** ou **R** est laissée au lecteur. Je ne pense pas qu'on puisse la trancher par des arguments purement mathématiques : il faudrait discuter de "l'histoire des idées dans la Galaxie".

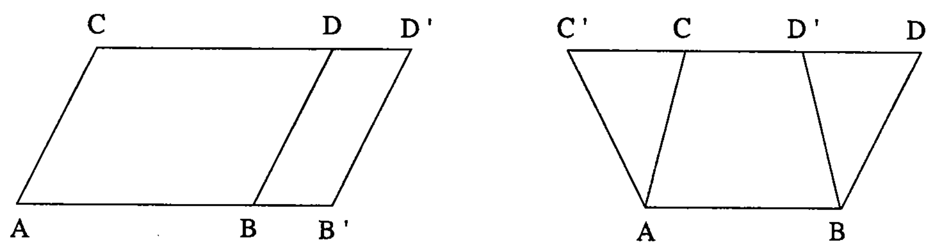

Fig. 1a

Fig. 1b

Figure 1

Solution de l'énigme

Mesurer une quantité physique suppose que l'on ait choisi une unité de mesure, de sorte que le mesurage consiste à comparer la quantité que l'on mesure avec celle que l'on a choisie pour unité.

Considérons par exemple le problème du mesurage des aires planes. Même à l'école maternelle les enfants peuvent apprendre à comparer des aires de polygones en papier par découpage et recomposition. La différence entre Nefel et un élève de l'école maternelle est que ce dernier utilise librement les déplacements euclidiens [6], tandis que Nefel ne connaît que les déplacements parallèles. Maintenant, tout ce que je veux dire, c'est que

les déplacements parallèles suffisent à comparer les aires de deux parallélogrammes non dégénérés.

(6) Un exemple bien connu est la démonstration du théorème de Pythagore.

Deux exemples de base sont donnés par la figure 1. Comment peut-on montrer que, sur la figure 1a), l'aire du parallélogramme *AB'D'C* est λ fois l'aire du parallélogramme *ABDC* (où λ est le rapport de proportionnalité entre *AB'* et *AB*), tandis que dans la figure 1b) les aires des parallélogrammes *ABDC* et *ABD'C'* sont égales ? Si l'on pose cette question à un élève de lycée de la planète Terre, il donnera probablement une réponse sophistiquée (trop sophistiquée pour le niveau de l'école maternelle), utilisant le fait que l'aire d'un parallélogramme est donnée par un produit de longueurs ("la base fois la hauteur"). Mais un élève de l'école maternelle de Nefel donnera une meilleure réponse, plus simple et plus conceptuelle, ne s'appuyant pas sur une formule "apprise par cœur" : dans le cas de la figure 1b), il remarquera simplement que les triangles ACC' et BDD' se déduisent l'un de l'autre par déplacement parallèle ; dans le cas de la figure 1a), il découpera le parallélogramme en bandes parallèles égales (puisque c'est un exercice de l'école maternelle, nous pouvons supposer que λ est un nombre rationnel ! [7]).

Le fait que le cas général puisse être déduit des deux cas particulier de la figure 1 est exactement la contrepartie géométrique du fait que *toute matrice d'ordre 2 peut être décomposée en produit de matrices élémentaires*. Nous voyons ainsi que la "méthode de l'école maternelle de Nefel" pour mesurer les aires ne fait que mimer de façon géométrique la méthode de *calcul des déterminants par transformations élémentaires* (dont on sait très bien que c'est la plus efficace des méthodes de calcul des déterminants en grandes dimensions). La solution de l'énigme est donc davantage qu'un simple amusement : *elle apporte un regard géométrique sur les propriétés profondes des déterminants*.

Conclusion

Comme je l'ai dit dans l'introduction, mon intention, en écrivant cet article, était simplement de suggérer qu'*enseigner les déterminants peut être amusant*. Je ne veux pas discuter ici la question du *comment* les enseigner [8], sur laquelle il y aurait beaucoup à dire. Par exemple, je n'ai pas abordé ici la question de l'*orientation*, laquelle pose à nouveau le délicat problème de discuter les connexions entre le formalisme mathématique (ici, la notion de parité d'une permutation) et l'expérience (la notion de droite et de gauche dans l'espace où nous vivons).

Mais j'espère en avoir assez dit pour suggérer une reformulation possible de l'assertion d'Axler : "les déterminants sont difficiles, non intuitifs, et enseignés le plus souvent sans motivation"

motiver les déterminants pour les rendre intuitifs et faciles est une tâche difficile pour l'enseignant, mais ça peut être très amusant.

(7) Comparer avec la note 5.

(8) Un essai d'une exposition systématique des déterminants dans l'esprit ci-dessus peut être trouvé dans mon livre *Découvrir l'Algèbre linéaire* (en collaboration avec Hervé Dillinger, à paraître chez Diderot Editeur).

APPENDICE

R^3 EST-IL UN BON MODÈLE POUR "L'ESPACE DANS LEQUEL NOUS VIVONS" ?

Les questions que nous venons de discuter n'ont guère de sens si l'on considère que

"l'espace où nous vivons est $\mathbf{R}^3$"

Je trouve étonnant d'entendre tant de mathématiciens décrire l'espace ainsi, comme si Dieu avait créé notre monde équipé d'un système de coordonnées.

Bien sûr, on peut trouver de bonnes raisons pour préférer l'assertion ci-dessus à la suivante, plus sophistiquée :

l'espace où nous vivons est un espace affine euclidien réel de dimension 3

Pour un débutant en mathématiques, comprendre ce que $\mathbf{R}^3$ signifie est plus facile que comprendre la définition formelle d'un "espace affine" et d'une "structure euclidienne" sur cet espace affine.

D'autre part, pour un géomètre expérimenté ces derniers concepts sont devenus si familiers qu'il ne fait plus la différence entre un discours où il les mentionnera *explicitement* et un raisonnement où il y fera appel implicitement (par exemple lorsqu'il trouvera commode de soumettre $\mathbf{R}^3$ à des transformations affines orthogonales).

Comment aider les étudiants à atteindre une telle familiarité est un problème pédagogique difficile et je n'ai aucune doctrine rigide sur la façon de doser les approches implicites et les approches explicites au cours des diverses étapes de l'apprentissage. Mais, d'une façon ou d'une autre, je suis convaincu que *là se trouve l'essence même de la géométrie*, et que se familiariser avec les concepts intrinsèques sous-tendant ceux qui dépendent des coordonnées devrait être l'objectif principal de l'enseignement de la géométrie *à toutes les étapes*.

La difficulté quand on essaie d'enseigner de tels concepts de façon implicite vient de ce qu'une notion aussi fondamentale que celle de "système de coordonnées" ne peut être pleinement comprise sans sortir de $\mathbf{R}^n$ (sinon on ne peut distinguer cette notion de celle d'automorphisme de $\mathbf{R}^n$). Mais avant que la définition formelle d'un espace affine (ou d'un espace vectoriel, etc.) soit comprise, "sortir de $\mathbf{R}^3$" implique *sortir des mathématiques*, c'est-à-dire discuter les relations entre l'objet mathématique dénoté par $\mathbf{R}^3$ et une notion "prémathématique" que nous appelons "l'espace où nous vivons", dont les propriétés sont abstraites de notre expérience quotidienne concrète.

Il n'y a rien d'original dans l'idée qu'un professeur de mathématiques doive "sortir des mathématiques" : c'est évident pour qui enseigne "les quatre opérations" à l'école élémentaire ; à un niveau plus élevé, c'est évident pour qui enseigne les probabilités. *Alors, pourquoi n'est-ce pas évident pour qui enseigne la géométrie à l'université ?* En posant cette question, j'entends déjà beaucoup de mes collègues protester que je leur fais un faux procès : "quand j'enseigne la géométrie, je fais toujours des dessins" disent-ils. Mais demandent-ils souvent à leurs étudiants de résoudre des problèmes dans lesquels les données sont des figures (effectivement dessinées ou décrites par des mots) ? N'est-il pas fréquent que des "exercices de géométrie" commencent ainsi :

> *"Considérons dans $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$, ou $\mathbf{R}^n$) la courbe (ou la surface, ou) donnée par l'équation (les équations) suivante(s)"* ?

Les dessins ne sont-ils pas souvent présentés aux étudiants comme de simples *illustrations* d'un discours mathématique formel qui a sa propre cohérence *indépendante de toute illustration* ?

Que penseriez-vous d'un professeur qui enseignerait les probabilités en se cantonnant à la combinatoire abstraite et à la théorie de la mesure, et dirait, pour s'excuser :

> "Quand j'enseigne cela je montre toujours des dés à mes étudiants" ?

Revenant à la géométrie, je soupçonne que si la plupart des mathématiciens d'aujourd'hui aiment à penser que l'espace où nous vivons est $\mathbf{R}^3$, ce n'est pas tant pour des raisons pédagogiques que pour des raisons, plus profondément, *idéologiques*. Ils aiment voir la Mathématique comme une belle construction cohérente partant de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels, à partir duquel on construit $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, etc. Comme le disait Kronecker

> "Dieu nous a donné les entiers, et l'Homme a fait le reste".

Mais, peut-on raisonnablement croire que la géométrie se serait développée de la façon que nous connaissons si Dieu ne nous avait pas donné l'espace dans lequel nous vivons ? La façon dont notre science développe ses constructions logiques est guidée par des intuitions qui dépassent la simple logique. Si l'on tient cette intuition pour nulle, interprétant Kronecker dans le sens étroit que tout les objets mathématiques peuvent être logiquement construits à partir de **N**, on pourrait aussi bien se défaire de **N lui-même, puisque les axiomes de la théorie des ensembles nous permettent de le construire à partir de rien** (9).

Par respect pour Kronecker, je préfère interpréter son assertion dans un sens plus profond, comme exprimant l'idée que les mathématiques ne contiennent aucun mystère qui ne nous renvoie aux mystères "primordiaux" de l'arithmétique (et depuis Gödel on ne peut douter que de tels mystères existent).

(9) Comme l'écrit Bourbaki : "La théorie des ensembles est une théorie logique *sans constantes*". Ceci signifie que, d'un point de vue logique, il n'est pas nécessaire d'injecter dans les axiomes de la théorie un "ensemble donné par Dieu" (que ce soit "l'espace où nous vivons", ou même l'ensemble **N**).