REPERES - IREM. N° 27 - avril 1997

SUR LES RELATIONS ENTRE ÉPISTEMOLOGIE, HISTOIRE ET DIDACTIQUE

Evelyne BARBIN
IREM Paris 7

Car l'événement est différence et l'on sait bien quel est l'effort caractéristique du métier d'historien et ce qui lui vaut sa saveur : s'étonner de ce qui va de soi.

Paul VEYNE, *Comment on écrit l'histoire*, p. 18.

Ce texte reprend un article paru en 1993 dans les Actes de l'université d'automne organisée par Jean Rosmorduc autour d'une "réflexion sur la création d'un D.E.A.. de didactique plurisdisciplinaire". Cette étude sur les relations entre histoire, épistémologie et didactique avait pour origine la question suivante, posée lors de l'université d'automne : quelle épistémologie dans un D.E.A. de didactique des mathématiques ? [19]. Précisons d'emblée deux points. D'une part, il est question ici surtout d'une épistémologie historique, prenant appui sur l'étude historique des savoirs mathématiques. Il est possible également de développer une analyse épistémologique non historique, comme nous aurons l'occasion de le voir plus loin. D'autre part, ce qui sera dit ici à propos des mathématiques peut peut-être s'étendre à d'autres disciplines : physique, sciences naturelles ou français.

Des recherches épistémologiques et didactiques concernant les mathématiques se sont développées en France dans les mêmes lieux, dans les IREM, et à partir de la même époque, dans les années 1970. Elles avaient toutes comme contexte, le problème posé par la réforme des "mathématiques modernes". Cette circonstance historique a laissé des traces dans les conceptions des unes et des autres. Pour étudier les relations entre ces recherches, il serait intéressant de se pencher aujourd'hui sur leur archéologies. Je n'aborde pas cette étude par ce biais, renvoyant pour cela à un article de Rudolf Bkouche [7]. Pour analyser les modes de relations entre épistémologie et didactique, je prends d'abord pour matériel certains travaux qui s'inscrivent dans les deux champs disciplinaires. J'examine leurs intentions, mais aussi, et tout autant, leurs résultats.

Mon analyse a été beaucoup soutenue par la réflexion de Paul Veyne sur le métier d'historien dans son ouvrage *Comment on écrit l'histoire. Essai d'épistémologie.* Paul Veyne y étudie, en particulier, les relations entre l'histoire, la philosophie et les sciences humaines. Il montre que l'histoire ne peut pas se fabriquer à partir de théories, de types ou de cadres tout faits, et il explique toute la difficulté que l'historien rencontre dans l'usage des concepts. La rencontre entre l'épistémologie historique et la didactique s'inscrit nécessairement dans cette problématique.

Dans les travaux qui m'ont servi de point de départ, je dégage deux grandes conceptions que je formule ainsi :

1. l'épistémologie comme outil de l'analyse didactique
2. la didactique comme cadre de l'analyse épistémologique.

J'essaierai de montrer que cette dernière conception pose des problèmes insupportables à l'épistémologue historien, car le travail de l'historien, contrairement à ce qu'écrit Yves Chevallard, est un travail "à mains nues" [11]. Puis j'analyserai l'intervention de l'épistémologie dans la didactique à partir de trois articles didactiques, avant de m'intéresser au débat entre épistémologues historiens et didacticiens.

1. L'épistémologie comme outil de l'analyse didactique

Cette conception s'est développée parmi les didacticiens à propos des recherches sur les obstacles épistémologiques. Le concept d'obstacle épistémologique a été introduit par Gaston Bachelard dans *La formation de l'esprit scientifique*, et il a été incorporé dans le champ didactique par Guy Brousseau [voir 2, p. 249]. Les recherches sur les obstacles épistémologiques ont provoqué un réel intérêt des didacticiens pour l'histoire et l'épistémologie des mathématiques. L'histoire des mathématiques apparaît comme un outil pour le chercheur en didactique, puisque, selon Guy Brousseau, le travail de celui-ci consiste à :

> *a) trouver les erreurs récurrentes, montrer qu'elles se regroupent autour de conceptions,*
> *b) trouver des obstacles dans l'histoire des mathématiques,*
> *c) confronter les obstacles historiques aux obstacles d'apprentissage et établir leur caractère épistémologique [10].*

La conception de l'épistémologie comme outil de la didactique est explicitement développée dans les travaux d'Anna Sierpinska sur la notion d'obstacle épistémologique. Elle explique comment et pourquoi cette notion peut servir d'outil dans la recherche didactique en écrivant :

> *Etudes de l'histoire des concepts mathématiques et connaissance de cette histoire jouent un rôle important* [...]. *Une des principales hypothèses* [...] *est bien celle qui dit que la signification d'un concept n'est pas totalement déterminée par sa définition actuelle mais elle est une résultante de l'histoire du concept et de ses diverses applications aussi bien dans le passé que dans le présent. On doit donc étudier l'histoire d'un concept pour pouvoir déterminer les conditions de sa compréhension, i.e. pour en élaborer une analyse épistémologique. D'autre part, la connaissance de l'histoire des concepts est très utile dans les recherches diagnostiques sur les*

difficultés des élèves, plus particulièrement dans l'effort de comprendre leurs actions et verbalisations pendant les séances expérimentales. C'est parce que nous connaissons l'histoire que nous voyons plus, que nous comprenons plus de ce que les élèves font ou disent. En interprétant leurs solutions et prises de paroles nous faisons des analogies (pas nécessairement directes) avec les textes historiques. Le fameux "parallélisme" est une idée très simpliste qui ne peut pas être appliquée directement. En réalité, l'histoire nous aide à construire des modèles des conceptions des élèves sans toutefois nous apporter des modèles tout faits [21, pp. 85-86].

Anna Sierpinska donne une liste, non exhaustive, des buts que l'on peut attribuer à l'outil "obstacle épistémologique" dans la recherche didactique :

1. Diagnostic des difficultés des élèves vis-à-vis de l'apprentissage des mathématiques
2. Etudes épistémologiques des notions mathématiques
3. Evaluation des apprentissages, des enseignements et des matériels du point de vue de la construction des connaissances mathématiques
4. Elaboration de projets d'enseignements.

Elle propose ainsi une évaluation épistémologique d'une leçon de mathématiques concernant l'enseignement de la limite d'une suite. Cette leçon est jugée décevante à partir de la prise en compte des obstacles épistémologiques : *les élèves n'avaient aucune chance de commencer à comprendre la notion de limite d'une suite pendant la leçon* [21, p. 103]. Comme le note Anna Sierpinska, cette approche évaluatrice amène à se demander : que serait, d'un point de vue épistémologique, une "bonne leçon" sur les limites ? Pour répondre à cette question, la seule considération des obstacles épistémologiques est insuffisante. Nous reviendrons, dans notre dernière partie, sur cette affirmation.

Dans sa recherche sur l'enseignement de l'intégration, Maggy Schneider prend en compte les trois premiers buts proposés par Anna Sierpinska [17]. Elle adopte le point de vue de Guy Brousseau sur le concept d'obstacle épistémologique qui écrit en 1983 : *la notion d'obstacle épistémologique elle-même est en train de se constituer et de se diversifier : il n'est pas facile de dire des généralités pertinentes sur ce sujet, il vaut mieux des études cas par cas* [9].

Maggy Schneider part de problèmes inspirés de l'histoire en estimant que *quelles que soient les connaissances concernées, nous pensons que, pour ce qui est de la tranche concernée ici, le cheminement des élèves s'apparente dans les grandes lignes au cheminement historique* [17]. Elle adopte ainsi la position de Guy Brousseau qui écrit : *Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens* [8]. Des problèmes pseudo-historiques sont proposés par Maggy Schneider aux élèves. Elle leur propose également de lire et de commenter un texte de 1743, où Clairaut calcule le volume d'un prisme oblique par la méthode des indivisibles. A partir de leurs réactions, elle étudie les difficultés des élèves, et analyse ainsi différents obstacles épistémologiques : conception du nombre-mesure, hétérogénéité des dimensions, association de la pente de la tangente à une limite, fonction-courbe et fonction-aire. Ces obstacles ne font l'objet d'aucune étude historique *a priori*, bien que le choix des problèmes ait nécessairement été guidé par une réflexion de cet ordre. Elle les analyse a posteriori à partir des réactions des élèves, en utilisant cette fois l'histoire des mathématiques. Les problèmes pseudo-historiques jouent un rôle d'analyseur. L'épistémologue peut vérifier la pertinence de l'hypothèse du parallélisme entre cheminement des élèves et cheminement historique : il y a effectivement de nombreux points de coïncidence.

Cette recherche permet de discerner des dysfonctionnements dans l'enseignement habituel de l'analyse. Maggy Schneider note, en particulier, que la modélisation du monde sensible par le calcul formel est un apprentissage souvent négligé. Ses conclusions sont reprises par le groupe AHA, qui propose un projet d'enseignement de l'analyse [1], dernier but exprimé par Anna Sierpinska. Le travail de Maggy Schneider semble exemplaire du point de vue proposé par Guy Brousseau, et il faut espérer que d'autres travaux d'une telle ampleur épistémologique soient entrepris par d'autres didacticiens.

2. La didactique comme cadre de l'analyse épistémologique

Cette conception est explicitée dans le début d'un article, consacré à l'origine de la démonstration, où Gilbert Arsac écrit :

L'histoire apporte difficilement une réponse à la question du comment de l'apparition de la démonstration, et encore plus difficilement à la question du pourquoi. Cependant l'importance du problème oblige à faire le point, à engager un dialogue entre l'historien et le didacticien, dans lequel ce dernier ne soit pas seulement un client. Nous espérons en effet montrer dans ce qui suit que certains des outils développés pour l'analyse didactique peuvent apporter un point de vue nouveau sur les problèmes historiques, préciser les questions, et même suggérer certaines réponses [2].

Il s'agit donc, cette fois, d'utiliser la didactique pour répondre à des questions historiques et épistémologiques. Ces questions sont les suivantes : Quand la démonstration est-elle apparue en mathématiques ? Entre les différentes hypothèses historiques, internaliste et externaliste, concernant l'origine de la démonstration laquelle choisir ? Avant d'examiner les réponses apportées, j'indiquerai le peu de pertinence historique ou épistémologique, à mon avis, de ces deux questions.

Nous trouvons aussi dans cet article des questions épistémologiques et historiques intéressantes, auxquelles ont été consacrées certains travaux d'historiens comme ceux de Maurice Caveing : Comment les Grecs ont-ils été amenés à se poser la question de l'incommensurabilité ? Comment le raisonnement par l'absurde a-t-il été inventé chez les Grecs ? Ici, Gilbert Arsac utilise des matériaux historiques et il conclut par un certain nombre de problèmes, en particulier concernant les relations entre la conception grecque de la démonstration et la conception idéale des objets de la géométrie. Dans cette analyse, la didactique, en particulier le concept de changement de cadres, lui sert d'heuristique. La didactique peut être une heuristique, mais elle ne peut pas, comme j'essaierai de le montrer plus loin, constituer un cadre à l'analyse épistémologique ou une théorie explicative.

Le problème du concept

Une des grandes difficultés pour l'historien des mathématiques est l'usage des concepts. L'historien a besoin de concepts pour penser, mais, comme le note Paul Veyne, *le concept est une pierre d'achoppement de la connaissance historique* [22, p. 171] car les concepts sont figés et la connaissance historique est devenir. Cette difficulté est particulièrement aigu' concernant l'histoire des mathématiques. Si nous prenons comme définition du concept de fonction celui d'aujourd'hui, nous serons tentés de "détecter" celui qui l'a explicité la première fois, et ceux qui "encore" utilisaient le concept de fonction d'Euler. Cette histoire téléologique, celle des attributions, a un intérêt épistémologique très faible. En définitive, elle nous permet de dire seulement que notre concept était celui de Dirichlet, et donc que c'est à Dirichlet qui faut attribuer le concept de Dirichlet. Pour que l'histoire devienne épistémologiquement intéressante, il faut se poser les questions de la portée et de la signification des concepts, leur donner une épaisseur historique en posant la question, non de leur attribution, mais des conditions de leur naissance et donc du changement.

Gilbert Arsac écrit : *Nous verrons, au §1, en quoi l'analyse citée de Nicolas Balacheff permet d'attribuer réellement aux Grecs l'invention de la démonstration, sans pour autant dénier à leurs prédécesseurs toute forme de preuve au sens que nous aurons à préciser* [2]. Cette affirmation pourra être jugée naïve par les historiens. Elle correspond à l'idée, dénoncée par Paul Veyne, qu'il y aurait des théories explicatives de l'histoire qui permettraient de se passer du travail obscur, érudit et difficile des historiens qui travaillent depuis des décennies sur les textes difficilement interprétables des Anciens. La didactique serait-elle l'une de ses théories ? Gilbert Arsac rappelle la définition de la démonstration de Nicolas Balacheff en la distinguant de celles d'explication, de preuve et de raisonnement : c'est *une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini.* Il explique que cette définition correspond aux conceptions de Platon et qu'on ne la trouve ni en Egypte, ni en Inde et ni en Chine. Ainsi, le concept de la démonstration de Nicolas Balacheff, qui est celui des Grecs, apparaît bien chez les Grecs.

Le problème de la causalité

Les causes de l'apparition de la démonstration sont-elles internes ou externes aux mathématiques ? Cette question suppose que l'historien parvienne un jour à des causes premières, mais comme l'écrit Paul Veyne, *tant qu'il y aura des historiens, leurs explications seront incomplètes, car elles ne pourront jamais être une régression à l'infini* [22, p. 122]. Plutôt qu'une chaîne de causalité, l'historien veut constituer un tissu historique qui, en les reliant, permette de comprendre ensemble différents événements historiques. L'histoire peut-être interne si les événements que l'historien veut relier sont tous d'ordre mathématique : il s'agit alors d'une histoire axiologique. Mais l'histoire peut aussi être externe, si certains événements mis en rapport entre eux sont externes.

Malgré l'affirmation du début de l'article, aucune analyse didactique ne semble présider au choix de Gilbert Arsac entre explication interne ou externe. Il recherche les étapes de la connaissance établies par Imre Lakatos, lui-même inspirateur de Nicolas Balacheff. L'usage d'un questionnaire préétabli dans le champ historique entraîne bien des difficultés. Gilbert Arsac écrit : *Naturellement les Grecs, n'ayant pas lu Lakatos, ne nous ont pas laissé une description de cette phase, mais fort heureusement, différents indices historiques, que nous allons énumérer ci-dessous, permettent de se faire une idée de certaines de ces étapes*. Paul Veyne remarque de manière générale : *L'histoire est connaissance mutilée aussi n'y a-t-il pas de questionnaire préétabli* [22, p. 24]. Gilbert Arsac se rapporte alors aux travaux historiques de Maurice Caveing et de Arpad Szabo, et il conclut, très justement, ni sur des causes internes, ni sur des causes externes, les unes et les autres étant trop liées.

Le problème de l'historien est *moins de trouver des réponses que de poser des questions* [22, p. 267]. Pour poser des questions, il faut percevoir dans la conception grecque de la démonstration un élément différentiel, au lieu de penser trouver quelque chose de bien connu. Paul Veyne note que *si l'histoire est lutte pour la vérité, elle est également une lutte contre notre tendance à considérer que tout va de soi* [22, p. 266]. La connaissance d'autres époques est pour l'historien un point d'appui important dans l'établissement de son questionnaire. Ainsi, la connaissance des mathématiques chinoises ou des mathématiques du XVII^e siècle, où d'autres significations de la démonstration ont pu être mises en avant, peut poser la question de celle de la signification grecque de la démonstration.

Dans un document consacré aux nombres complexes, Michèle Artigue rapproche épistémologie et didactique en donnant, pour chaque épisode de l'histoire des nombres complexes, une présentation des mathématiques en jeu dans les textes historiques, des commentaires épistémologiques, puis des commentaires didactiques [4]. Concernant ces derniers commentaires, il est précisé : *on y développera quelques points remarquables touchant à des conceptions ou à des outils didactiques dont la valeur explicative est aujourd'hui reconnue*. Quels modes de relations sont ici envisagés entre épistémologie et didactique ? S'agit-il d'expliquer ou de commenter l'histoire à la lumière des concepts de la didactique ?

Une histoire vue à travers d'une grille

Dans le premier épisode, consacré à "l'apparition des quantités imaginaires sur la scène mathématique", la conclusion des commentaires épistémologiques constate *la préséance de l'opération sur les objets, de la fonction sur l'organe, de la transformation sur les éléments transformés. On verra que cette préséance est un fait quasi-universel : dans une perspective historique, au jeu de la dialectique outil / objet, c'est l'outil qui joue toujours le premier.* Les commentaires didactiques indiquent :

> *Pour le didacticien, cette première phase de l'histoire des nombres complexes, telle qu'elle a été décrite et analysée ici, est en un certain sens rassurante, en particulier parce qu'elle met en évidence la pertinence épistémologique de certains outils ou appuis didactiques. Nous insisterons ici sur trois points :*
> *– le rôle moteur des déséquilibres cognitifs,*
> *– la distinction entre les pôles outil et objet d'un concept mathématique,*
> *– les différences entre la logique de l'enseignement et celle de l'histoire.*

L'histoire serait un mode de questionnement sur les concepts de la didactique. En effet, dans le second épisode, il est noté que le didacticien *se trouvera une fois de plus rassuré* car il retrouve *le principe de permanence comme principe producteur et comme obstacle*, bien que *la recherche didactique, à son développement actuel, ne fournit pas de réponse complètement satisfaisante* à certaines questions. Ce point de vue peut satisfaire le didacticien, mais il choque l'historien et l'épistémologue historien. Car quelle histoire serait cette histoire chargée de retrouver et de valider des cadres préalables ? Une histoire vue à travers une grille.

Le travail de l'historien ne consiste pas à retrouver des théories. Son but n'est pas d'être rassuré. Au contraire, il doit toujours lutter contre l'impression que tout va de soi, afin de percevoir les différences qu'il a sous les yeux sans les voir. Paul Veyne dénonce cette tentation de *retrouver* [...] *des données de la compréhension que nous ne rechercherions même pas si nous ne les comprenions déjà* [22, p. 133], de *détacher des espèces de cadres qui expliqueraient le devenir historique, qui le commanderaient en dernier ressort ou même qui le causeraient sans être causés en retour* [22, p. 140]. Pourquoi l'historien ne peut-il pas travailler à partir de cadres préalables ? avec une grille de lecture ? Parce que l'historien doit travailler avec les mains nues : des mains trop pleines l'empêcheraient de manier, comme il le doit, la matière faite des événements historiques.

3. L'histoire à mains pleines et à mains nues : les nombres complexes

Afin de préciser cette posture épistémologique qui me semble essentielle, je me propose de comparer l'histoire de "l'apparition des nombres complexes" vue à travers la grille didactique avec celle qu'écrit l'historien. L'historien qui cherche, non à tester des concepts, mais à établir des processus d'intelligibilité entre différents événements historiques, l'historien qui veut poser des questions avant d'y répondre. J'utiliserai pour cela des recherches historiques, celles menées en particulier à l'IREM de Toulouse et à l'IREM de Strasbourg.

L'histoire à mains pleines

Dans la période intitulée "L'apparition des nombres complexes sur la scène mathématique", Michèle Artigue explique que Bombelli, en cherchant la solution d'une équation du troisième degré, est amené à résoudre une équation du second degré, ce qui nécessite de prendre la racine carré d'un négatif. Elle écrit :

> *En fait, lorsqu'on cherche à détecter la présence de nombres complexes dans les textes historiques, il est bien connu qu'on ne les trouve pas là où pourrait les attendre le lecteur qui se bornerait aux programmes de nos lycées : ce n'est pas en effet à l'occasion de problèmes du second degré que sont apparus ces nombres : Au XVI^e siècle, on n'avait en effet "rien à faire" des solutions imaginaires de $ax^2 + bx + c = 0$, car, à partir des travaux d'Al Hawarizmi (IX^e siècle) et de ses successeurs, Aboul Wafa (940-998) et Al Kahri (vers 1020), relayés par Léonard de Pise (1180-1250), on savait parfaitement résoudre tous les cas pouvant se présenter et on savait distinguer les équations ayant deux solutions, une solution ou aucune* [...].
> *Par contre en ce début du XVI^e siècle, on cherchait à calculer les solutions bien réelles des équations du 3^e degré, dont Scipione del Ferro connaissait, dès 1500,*

une technique de résolution. Connue ou redécouverte par plusieurs mathématiciens italiens, c'est Cardan qui la rendra publique comme méthode générale dans son "Ars Magna" en 1547. Bombelli, quelques dix ans plus tard, en rédigera un exposé algébrique avec les notations opérationnelles que nous allons examiner.

La première remarque épistémologique concernant cette citation est celle de la problématique générale, celle de "l'apparition", qui se borne à "détecter" la présence d'un objet dont la transparence semble immédiate, le nombre complexe. Nous reviendrons plus loin sur cette transparence, et considérons d'abord l'événement historique, lui-même, en tant qu'événement différentiel. Si nous nous intéressons à la construction des objets mathématiques, ce n'est pas en terme d'apparition, mais en terme de naissance que nous voulons interroger l'histoire. Nous allons nous demander : quelles circonstances épistémologiques et historiques font qu'une nouvelle conception soit introduite par les mathématiciens ? Nous allons interroger l'événement, c'est à dire le texte qui contient cette nouveauté, mais nous allons nous intéresser tout autant à d'autres événements historiques, antérieurs et contemporains. Antérieurs : ceux où le traitement du même problème n'a pas conduit à la nouveauté, nous demander : pourquoi ? Contemporains : ceux où de nouvelles questions ou de nouvelles conceptions ont pu conduire à la nouveauté, nous demander : comment ? Nous allons essayer de relier dans un processus d'intelligibilité un certain nombre événements historiques, c'est à dire, pour reprendre l'expression de Paul Veyne : construire et comprendre une intrigue.

L'histoire à mains nues

Je me propose de donner ici quelques idées de ce que serait cette intrigue. La nouveauté apparaît dans le contexte de la résolution d'équations. Non pas dans celui des équations du troisième degré, d'ailleurs, mais dans celui des équations du second degré. Dans son *Ars Magna*, publié en 1545, Cardan pose le problème suivant : *Il faut diviser 10 en deux parties de manière à ce que le produit des deux parties fasse 40.* Cardan envisage ce problème numérique dans le même contexte qu'Euclide dans le Livre VI des *Eléments*, c'est à dire dans un contexte géométrique [16].

Nous arrivons ici à un nœud essentiel de notre intrigue : le contexte géométrique de la résolution des équations hérité des Anciens. Il s'agit du contexte du problème autant que celui de sa résolution. Pour examiner plus facilement la proposition XXVIII du Livre VI d'Euclide, nous allons nous placer dans le cas particulier où les figures demandées sont des rectangles et des carrés (fig. 1). L'énoncé d'Euclide devient alors le suivant : "Sur un segment AB donné, construire un point E et un rectangle ABCD tel que EBCF soit un carré et tel que le rectangle AEFD ait une aire égale à l'aire K d'une figure rectiligne donnée : il faut que l'aire du carré construit sur la moitié du segment AB soit plus grande que K". La deuxième partie de l'énoncé est essentielle : le cas impossible a été envisagé par Euclide et il l'indique dans son énoncé. Possible signifie ici : que l'on puisse effectuer la construction proposée (*cf.* fig. 1).

Euclide demande de construire le milieu G de AB et le carré BGIM, puis de construire, en appliquant la proposition XXV, un carré HFIJ dont l'aire est la différence entre l'aire de BGIM et K. L'aire du gnomon BGHFJMB est égale à K et les

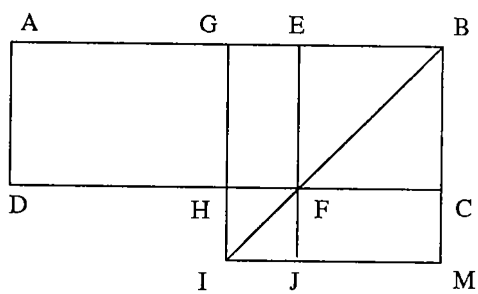

Fig. 1

aires des rectangles GEHF et FCMJ sont égales, donc l'aire du rectangle AEFD est égale à K et EBFC est bien un carré.

La proposition d'Euclide permet donc, étant donné un segment AB, de le partager en un point E de sorte que l'aire du rectangle de côtés AE et EB soit égale à K. Le problème de Cardan est donc bien de la forme de celui d'Euclide, bien qu'il soit posé sous forme numérique. Il faudrait, dans l'optique euclidienne, ôter du carré BGIM d'aire 25 un carré d'aire 40. Cardan écrit alors :

> *Même si le reste devient négatif, on peut s'imaginer Rm*15 [$\sqrt{-15}$] *comme différence entre AD et quatre fois AB* [...]. *Malgré nos difficultés d'imagination nous pouvons multiplier 5 p Rm15 [5 +* $\sqrt{-15}$*] et 5 m Rm*15 [5 – $\sqrt{-15}$*] et nous arrivons à 25mm15 ce qui est égal à p40, ainsi le produit fait 40. Malgré tout cela, AD est essentiellement distinct de 40 et aussi de AB. Cette grandeur est vraiment très sophistiquée.*

Pour apprécier la nouveauté de l'événement, il faut resituer celui-ci dans tout le travail algébrique qui s'est accompli entre Euclide et Cardan. Pour le comprendre, il faut le replacer dans le contexte de son époque. Parler de "l'intrépidité des calculateurs du XVI^{e} siècle" est insuffisant. Donnons rapidement quelques pistes [voir 18].

Une ébauche d'intrigue

Des problèmes de construction géométrique qui correspondent à des équations du troisième degré sont posés dans l'Antiquité : le problème de la duplication du cube et le fameux problème d'Archimède du traité *De la sphère et du cylindre* (partager une sphère donnée de sorte que les segments obtenus soient dans un rapport donné). Les solutions apportées, au premier problème par Ménechme, et au second par Eutocius, Dionysidore ou Dioclès, consistent toutes à utiliser des sections de coniques. Les mathématiciens arabes poursuivent les travaux grecs, mais l'introduction de l'algèbre va introduire un changement de conception : il s'agit, maintenant, de résoudre des équations du troisième degré. Cette conception permet à Omar Khayyam de procéder à une classification de ces équations. Cependant, le travail des mathématiciens arabes reste dans l'esprit géométrique des Grecs : les résolutions sont géométriques et la classification d'Omar Khayyam s'opère à partir du type de solution géométrique obtenue. Le travail d'Omar Khayyam est important parce qu'on passe de la résolution d'équations particulières à une première approche de la résolution générale des équations.

Cardan résout des équations du troisième degré, et il justifie lui aussi ses solutions géométriquement. Ainsi, pour résoudre le problème, “le cube de GH et six fois le côté de GH égal à 20”, Cardan donne une longue démonstration à la manière d'Euclide avec des volumes : la résolution est une construction géométrique et la solution est un segment. Mais l'introduction du symbolisme algébrique va lui permettre de donner aux solutions la forme d'une expression. Nous sommes ici à un second nud de l'intrigue. Ainsi, pour le problème précédent, la solution est une expression de la forme

R v :cu R 108p10 m R v :cu R 108m10 c'est-à-dire

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10} - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Ceci permet à Cardan de donner, sous forme de règle, une solution algorithmique pour toutes les équations du type $x^3 + c = d$. Un autre pas vers une résolution générale des équations est franchi.

L'introduction du symbolisme a joué un rôle important dans la pratique des mathématiciens et dans leurs conceptions des nombres. Ainsi, Jacques Peletier du Mans dans son *Algèbre* de 1554 considère que les racines sourdes des rationnels, c'est-à-dire les irrationnels, sont des nombres parce que leur maniement sous forme symbolique lui permet d'affirmer que les irrationnels *ont leur algorithme, leur ordre et règles infaillibles, tout ainsi que les rationnels*. Le mathématicien s'adonne à quelque chose de nouveau : le maniement des symboles.

Que fait donc Cardan en imaginant qu'il multiplie 5 p Rm15 par 5 m Rm15 ? Il généralise la forme symbolique des solutions du second degré à d'autres formes d'expressions. Bombelli fait de même pour les équations du troisième degré, et il donne de plus l'algorithme de calcul sur ces imaginaires. Evénement historique : dans les années 1560, Bombelli a l'occasion de lire à Rome le manuscrit des *Arithmétiques* de Diophante, mathématicien grec du 3e siècle de notre ère, qui ont été retrouvés près d'un siècle auparavant. Cet ouvrage s'inscrit dans une tradition arithmétique calculatoire et contient une forme syncopée de symbolisme. Bombelli, frappé par sa lecture, écrit à la suite son *Algèbre*, dans laquelle les problèmes sont pris dans un contexte numérique détaché de considérations pratiques. Ceci nous conduit à une nouvelle piste : quelles conceptions Bombelli voulait-il présenter à son lecteur du XVIe siècle ? Quelles conceptions des mathématiques voulait-il défendre ? Nous devons nous demander alors : à qui s'adressait son ouvrage ? et celui de Cardan ? et ceux de leurs prédécesseurs ? Nous devons lutter contre l'impression que le mathématicien du passé s'adresse à nous. Il faut situer l'histoire des mathématiques dans la culture d'une époque, ou encore dans l'histoire sociale des savoirs.

Les imaginaires permettent à Girard et à Descartes de donner des énoncés généraux dans ce qui devient une théorie des équations. Dans son *Invention nouvelle en algèbre* de 1629, Girard considère les fonctions symétriques des racines d'une équation et remarque que leurs relations avec les coefficients de l'équation restent vraies si on considère les solutions imaginaires qu'il appelle solutions impossibles. Aussi, conseille-t-il : *Il faut se souvenir d'observer toujours cela : on pourrait dire à quoi servent ces solutions qui sont impossibles, je réponds pour trois choses, pour la certitude de la règle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité.*

Dans *La géométrie* de 1635, Descartes renverse les rôles de l'algèbre et de la géométrie : Cardan utilise la géométrie pour résoudre des équations algébriques, Descartes utilise l'algèbre pour résoudre des problèmes géométriques. Le livre III est consacré à la théorie des équations. Descartes y montre comment modifier une équation pour ne plus avoir de racines sourdes ou rompues, c'est-à-dire fractionnaires. Mais pour énoncer qu'une équation de degré n a n racines, il faut bien considérer ces solutions qu'on ne peut qu'imaginer sans pouvoir les rendre entières. Descartes écrit : *Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelque fois seulement imaginaires ; c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation ; mais qu'il n'y a quelque fois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine* [...] *: quoiqu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.* La position de Descartes est intéressante. Il veut résoudre des problèmes géométriques, donc il recherche des solutions d'équations qui soient des grandeurs. Mais, dans le cadre de la théorie des équations, il s'intéresse aussi à celles qui n'en sont pas : les imaginaires.

La transparence des objets

Comme le montrent bien Jean Pierre Friedelmeyer et Klaus Volkert, il s'agit pendant fort longtemps d'imaginaires et non de nombres complexes. Ils écrivent que, jusqu'au XVIII^e siècle, *les grandeurs imaginaires forment ainsi un grand sac dans lequel on jette tout ce qu'on ne connaît pas suffisamment, de sorte que le grand problème pour les mathématiciens du XVIII^e siècle était devenu le suivant : est-il toujours possible de réduire toute racine imaginaire ou impossible à la forme* $a + b\sqrt{-1}$ [16]. Dans un mémoire de 1702, Leibniz conjecture que la réponse est négative : il donne l'exemple de l'équation $x^4 + c^4 = 0$ et il ne pense pas à écrire $\sqrt{\sqrt{-1}}$ sous la forme $a + b\sqrt{-1}$. La question posée est la suivante : les imaginaires sont-ils toujours des complexes ? La réponse sera le théorème de d'Alembert-Gauss.

Pour que l'historien envisage cette question, il faut qu'il se soit débarrassé de la définition actuelle du nombre complexe, qu'il ne soit pas pressé de retrouver telle ou telle conception présente. Paul Veyne écrit : *L'histoire a la propriété de nous dépayser, elle nous confronte sans cesse avec des étrangetés devant laquelle notre réaction la plus naturelle est de ne pas voir* [22, p. 257]. Est-ce que cette histoire dépaysante intéresse le didacticien ? Michèle Artigue écrit que *l'analyse épistémologique* [peut] *aider la didactique à se déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle manipule au niveau des savoirs et aider le didacticien à se dégager des représentations épistémologiques erronées que tend à induire sa pratique enseignante* [3, p. 245]. Pour que l'historien puisse voir les étrangetés et aller au delà des évidences, il faut qu'il travaille à mains nues avec des concepts historicisés.

Dans cet essai d'intrigue, dont nous avons ébauché quelques grandes lignes, l'histoire du nombre complexe prend place dans l'histoire plus large des savoirs mathématiques, la dialectique entre algèbre et géométrie, le symbolisme, la théorie des équations, mais aussi dans l'histoire encore plus large des savoirs. Cette mise en place s'est opérée à partir de la signification que le mathématicien, dans l'histoire et dans la culture d'une époque, pouvait apporter aux concepts mais aussi à son activité proprement dite. Cette épistémologie historique qui s'intéresse aux significations des concepts, et plus largement aux significations des savoirs mathématiques, et encore plus largement à la signification de l'activité et du savoir mathématiques, peut-elle être un outil pour le didacticien ? Nous allons reprendre cette question, sous la forme annoncée.

4. Quelle intervention épistémologique dans la didactique ?

Je ne prétends pas répondre à cette question, mais indiquer un certain nombre d'éléments qui permettent de préciser la question et d'engager un débat entre épistémologues et didacticiens. Il s'agit d'engager un débat, et non une polémique. En effet, les travaux épistémologiques menés dans les IREM, même s'ils ne s'inscrivent pas dans le cadre de la science didactique, ont été entrepris dans le but de mieux comprendre, ou tout au moins de mieux poser, certains problèmes posés par l'enseignement des mathématiques. Je reviendrai sur cette donnée plus loin.

J'ai indiqué, au début de cet article, que le concept d'obstacle épistémologique avait conduit des didacticiens à s'intéresser à l'outil épistémologique, en particulier dans sa dimension historique. Mais, en élargissant le champ de leurs recherches, certains didacticiens ont trouvé récemment d'autres raisons à leur intérêt pour une analyse épistémologique, dans laquelle peut intervenir l'histoire.

L'élargissement du champ des recherches didactiques

Ainsi, dans un article intitulé *Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique*, Anna Sierpinska élargit son programme de recherche sous la forme d'une *complémentarité de l'évolution de la culture mathématique* [20]. Elle utilise les travaux du philosophe Wilder [23] pour *expliquer la notion épistémologique dans le cadre d'une théorie de la culture et d'une conception des mathématiques comme système culturel.* Wilder formule des "lois" qui gouverneraient l'évolution de ce système.

Lois, théorie : nous retrouvons dans les conceptions de Wilder, rapportées par Anna Sierpinska, cette *tradition philosophante héritée de l'historisme* qui, selon Paul Veyne, *donne de l'histoire l'idée la plus fausse qui soit* [22, p. 139]. Pour cet historien, l'histoire n'a pas pour objet de fabriquer des lois, de construire des théories ou de manipuler des abstractions. Il écrit que l'histoire est

> *sans cesse exposée à la tentation de réifier une abstraction, de prêter à un mot qui vient sous la plume de l'historien le même rôle de cause qu'ont les choses et les hommes ; voire à considérer que cette cause abstraite n'est pas elle même causée, qu'elle est impassible et qu'il ne peut rien lui arriver d'historique : elle sera présumée surgir et disparaître par un inexplicable caprice* [22,p. 140].

Wilder introduit deux abstractions nommées "intuition culturelle" et "moteurs du progrès". Nous pourrions critiquer, du point de vue de l'historien aux mains nues, les propos d'ordre historique de Wilder repris par Anna Sierpinska. Nous ne le ferons pas ici, sur l'entrée de la "théorie de la culture" dans le champ de la didactique, laissons de côté le mot "théorie" avec tout ce qu'il peut avoir de hérissant pour l'historien et intéressons nous au mot "culture".

L'introduction de la culture conduit Anna Sierpinska à reformuler son programme de recherche et sa demande vis à vis de l'analyse épistémologique. Cette analyse *comprend une réflexion sur l'évolution historique des concepts dans la culture mathématique en termes d'obstacles et de moteurs épistémologiques*, elle *sert avant tout à comprendre les concepts mathématiques*. Anna Sierpinka explique que "comprendre" concerne les significations et le fonctionnement des concepts. Elle termine son article en se demandant ce qui distingue son programme des autres recherches didactiques concernant les conceptions des élèves et l'utilisation du savoir et répond : *c'est l'accent mis sur la réflexion historique et épistémologique dans l'étude de la construction des connaissances mathématiques et dans l'utilisation qu'on en fait dans les recherches sur l'enseignement.* Nous passons ainsi de l'étude des obstacles à celle des significations des concepts. Mais quelle épistémologie présidera à cette étude ? Une épistémologie aplatie par des lois et réductrice de sens, ou une épistémologie riche d'intrigues ?

Anna Sierpinska évoque à la fin de son article les recherches didactiques sur "les conceptions". Ces recherches sont présentées dans l'article *Epistémologie et didactique* de Michèle Artigue [3].

Les "conceptions"

Michèle Artigue cite les diverses acceptions de cette notion parmi les didacticiens. Aussi bien dans les définitions qui en sont données que dans les exemples étudiés, il s'agit surtout de "conceptions" concernant des concepts (cercle, mesure, tangente). Ainsi, Michèle Artigue utilise l'histoire pour étudier les conceptions de la tangente. Les conceptions d'Euclide, d'Appolonius et de Descartes deviennent pour le didacticien des "points de vue". Cet aplatissement historique n'est pas satisfaisant pour les épistémologues historiens : ne laisse-t-il pas entendre que tous ces mathématiciens d'antan avaient un libre choix sur un objet éternel ? L'épistémologue historien veut comprendre pourquoi et comment tel ou tel concept est là, à ce moment là. Comment négliger que leurs conceptions de la tangente sont étroitement liées, par exemple, à leurs conceptions de la courbe ou aux moyens mathématiques mis en œuvre ? Ainsi, Descartes dans le Livre II de *La géométrie* explique qu'on peut associer à une courbe géométrique une équation algébrique. Puis il montre qu'il peut ainsi obtenir une méthode algébrique directe pour trouver les tangentes à toutes les courbes considérées, alors que dans la géométrie grecque les démonstrations sur les tangentes étaient des démonstrations géométriques par l'absurde. Ici, le concept de tangente est intimement lié à la conception de la courbe : objet algébriquement exprimé chez Descartes, objet géométrique pour les Anciens.

Se poser la question de "pourquoi et comment tel concept" signifie que l'on ne se borne pas à aligner des "points de vue" sur un concept, mais que l'on se situe dans une épistémologie de la problématique. Vis-à-vis de cet aplatissement historique, nous pourrions formuler les mêmes critiques que celles de Guy Brousseau vis-à-vis des travaux de Glaeser sur les nombres relatifs : il ne faut pas que la formulation en termes de conceptions

masque la nécessité de comprendre par

quels moyens on abordait les problèmes [...]. *Se posait-on ces problèmes ? comment les résolvait-on ? Ou croyait-on pouvoir les résoudre ? Est-ce que ce qui nous apparaît aujourd'hui comme une difficulté était perçu de la même façon à l'époque ? Pourquoi cet "état des connaissances" paraissait-il suffisant, sur quel ensemble de questions était-il raisonnablement efficace ?* [...]. *Ces questions sont nécessaires pour entrer dans l'intimité des connaissances* [9].

Les articles d'Anna Sierpinska et de Michèle Artigue se réfèrent essentiellement à une analyse épistémologique des concepts. L'approche de l'histoire des sciences par les concepts a été développée, en particulier par Georges Canguilhem, mais elle a des limites si elle est prise dans un sens trop strict. Le concept ne peut-être qu'une entrée. Comme le montre l'exemple du concept de nombre imaginaire, l'intrigue va "déborder" rapidement le concept pour nous plonger dans la culture mathématique d'une époque. Ceci est même en général insuffisant, et il faut plonger dans tout le contexte philosophique, historique, social ou technique d'une époque si l'on veut comprendre. L'histoire des mathématiques peut avoir d'autres entrées comme nous le dirons tout à l'heure en évoquant les travaux épistémologiques des IREM sur les "grands problèmes" de l'histoire des mathématiques.

Cependant, Michèle Artigue écrit que l'analyse épistémologique ne se limite pas à une épistémologie conceptuelle :

A un premier niveau, l'analyse épistémologique est, me semble-t-il nécessaire au didacticien pour l'aider à mettre à distance et sous contrôle les "représentations" des mathématiques induites par l'enseignement :
– en aidant à redonner une historicité aux concepts mathématiques que l'enseignement usuel tend à représenter comme des objets universels, à la fois dans le temps et dans l'espace,
– en aidant à redonner une historicité également à des notions métamathématiques comme celle de rigueur alors que l'enseignement usuel cultive la fiction d'une rigueur éternelle et parfaite des mathématiques. [...]
Au delà de l'analyse conceptuelle, l'épistémologie intervient à ce niveau [celui de la signification du concept] *sur un plan plus général car ce que vise l'enseignement des mathématiques, ce n'est pas simplement la transmission des connaissances mathématiques, c'est plus globalement celle d'une culture. Il s'agit de faire entrer les élèves dans le jeu mathématique. Mais, qu'est ce jeu mathématique ? Quels sont les processus généraux de pensée qui le gouvernent ? C'est l'analyse épistémologique (pas nécessairement historique à ce niveau, même si l'approche historique permet de saisir l'aspect nécessairement historique et spatial de cette culture) qui est au premier chef concernée par ces questions* [3, p. 243, p. 246].

Nous retrouvons ici le terme de "culture", pris dans le sens de la signification de l'activité mathématique, et celui de "processus généraux de pensée". Mais quelle épistémologie répondrait à ces recherches ? Une épistémologie qui s'intéresse aux conceptions ne pourrait se restreindre à un seul catalogue, elle demanderait que celles-ci soient incluses dans un univers historique de compréhension. Le terme de "processus généraux de pensée" ne risque-t-il pas d'enfermer l'histoire dans de grands schémas ? Paul Veyne rappelle que *comprendre l'histoire ne consiste pas à savoir discerner de larges courants sous-marins par dessous l'agitation superficielle* [22, p. 130].

L'anthropologie des savoirs

Dans la postface de la réédition de *La transposition didactique,* Yves Chevallard explique que la didactique est isolée, qu'elle n'a pas jusqu'ici trouvé son lieu : *Où donc situer la didactique des mathématiques ? Voici ma réponse, en peu de mots : la "didactique", les didactiques, s'inscrivent dans le champ de l'anthropologie* [11, p. 205]. Il s'agit, cette fois, d'un élargissement considérable. Yves Chevallard précise quelques pages plus loin que la théorie de la transposition des savoirs se situe dans une anthropologie des savoirs, ou mieux dans une anthropologie épistémologique, et même dans une *épistémologie tout court* [11, p. 210] Ainsi la didactique (ou une partie de la didactique ?) devient partie de l'épistémologie. Mais il existe déjà une épistémologie, qu'Yves Chevallard juge insatisfaisante :

> *L'épistémologie actuelle, en effet, nous donne une vision très restreinte de la vie des savoirs dans la société.* [...] *Il est assez clair maintenant que l'épistémologie telle qu'elle existe s'est donnée jusqu'ici avec passion à l'étude quasi exclusive de la production des savoirs, et à l'étude de leurs producteurs ; qu'elle a négligé et leur utilisation, et leur enseignement. Or ceux-ci ne peuvent être écartés d'une étude anthropologique des savoirs* [...].
> *L'oubli sur lequel s'est bâtie l'épistémologie actuelle devrait lui-même être expliqué : car il n'est rien d'autre qu'un fait, dont il appartient à l'anthropologie des savoirs de rendre raison* [...]. *On doit y voir, je crois, l'effet d'une certaine façon qu'a la culture de traiter les savoirs. Leur production est mise en avant et valorisée. Leur utilisation reste opaque, ignorée. Leur enseignement, plus visible culturellement que leur utilisation, est cependant péjoré, regardé comme entreprise contingente et mal nécessaire* [11, pp. 211-212]

Disons, tout de suite, qu'il est inexact que l'épistémologie ait négligé l'utilisation et l'enseignement des savoirs. Au contraire, ces études ont pris beaucoup d'importance dans les travaux des vingt dernières années, citons ceux de E.Garin et de Luce Giard pour la Renaissance, de Jean Dhombres pour l'époque révolutionnaire, de Daniel Roche ou de Ernest Coumet pour le XVII^{e} siècle. En ce qui concerne ce dernier siècle, les recherches sur l'enseignement des jésuites, sur les sociétés savantes et les académies provinciales occupent actuellement de nombreux chercheurs, épistémologues ou historiens, et font l'objet régulier de séminaires. Des recherches sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques sont menées par Bruno Belhoste ou Hélène Gispert. Dans les IREM, des recherches que le didacticien semble appeler de ses vœux sont menées : sur l'utilisation des savoirs, on peut se reporter, par exemple, aux Actes du colloque inter-IREM *Les mathématiques dans la culture d'une époque*, sur l'enseignement des savoirs, on peut se reporter aux recherches de Rudolf Bkouche pour le début du siècle, ou à celles de l'IREM de Nantes pour le XVII^{e} siècle.

Mais, il est à craindre que le didacticien ne trouve rien qui le satisfasse dans les travaux riches et fouillés des historiens :

ceux-ci n'utilisent pas le concept de transposition didactique. Or, écrit Yves Chevallard, *le territoire de la didactique des mathématiques est immense, et les terrains du didacticien des mathématiques virtuellement partout dans l'espace social* [11, p. 227]. N'est-ce pas dire que la didactique doit être le "levain" de toute analyse épistémologique ? Nous avons déjà expliqué pourquoi le métier d'historien s'accomplit à mains nues. Nous pouvons encore le dire pour l'intrusion d'une grille de lecture de l'histoire qui s'appellerait transposition didactique. Ainsi, quand Yves Chevallard affirme que *Gaspard Monge crée la géométrie descriptive, il ne vise à rien d'autre qu'à "savantiser", à couronner de vraie science, de science indubitable ce monument que les siècles ont construit, l'art du dessin (technique)* [11, p. 217], il oublie que le mathématicien veut aussi apporter à la géométrie de nouvelles manières de faire correspondre les objets de l'espace avec ceux du plan, et enrichir ainsi sa manière de démontrer. La lecture en terme de transposition didactique conduit le didaction à réduire cet événement historique en un événement purement institutionnel, et à en écarter les enjeux mathématiques. Cette vue étroite ne saurait satisfaire l'épistémologue historien qui sait qu'un événement historique est porté par une certaine volonté de savoir porteuse de transformations des savoirs.

Ainsi, au moment où la didactique se dit épistémologie, les relations entre épistémologie et didactique deviennent extrêmement problématiques. Il faut plus que jamais se demander : quelle épistémologie ? Aussi, il me semble important d'engager effectivement le débat entre épistémologues et didacticiens des mathématiques.

5. Epistémologues historiens et didacticiens : quel débat ?

Il existe bien un lieu institutionnel pour ce débat : les IREM. Mais les recherches épistémologiques et didactiques se sont menées dans une certaine ignorance. Pourtant, certains didacticiens s'intéressent à l'épistémologie, et la plupart des épistémologues interrogent l'histoire sur des questions relatives à l'enseignement.

Je n'ai pas parlé des recherches épistémologiques menées dans les IREM, parce qu'il m'a semblé, dans un premier temps, plus intéressant de partir des préoccupations des didacticiens. En ce qui concerne les recherches épistémologiques (voir [6]), je signalerai deux directions : l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques [12] et l'étude des grandes problématiques de l'histoire des mathématiques [13]. Les recherches visent à la fois une réflexion épistémologique sur la signification des savoirs mathématiques et sur l'activité mathématique proprement dite, et une approche culturelle des savoirs et du savoir mathématique. L'entrée par les grandes problématiques permet, en particulier, de construire des intrigues riches qui renouvellent considérablement l'analyse conceptuelle habituelle.

Il semble que les épistémologues historiens lisent plus les didacticiens, que les didacticiens ne lisent les épistémologues historiens, voire les historiens tout court. Si cette affirmation se trouvait vérifiée, il y aurait lieu de rechercher des explications à cet état de fait. Les critiques des épistémologues sur les travaux des didacticiens ne doivent pas être interprétées sur le plan institutionnel : elles concernent bien un débat d'idées. Rudolf Bkouche indique la portée de ces critiques en écrivant : *On voit se mettre en place chez les didacticiens une manipulation épistémologique qui consiste à reconstruire les concepts en fonction des besoins de la didactique* [7] Il cite l'exemple du travail d'Yves Chevallard sur la notion de distance, *exemple d'autant plus intéressant qu'il montre comment le souci de mettre en place le concept de transposition didactique conduit à une analyse erronée autant sur le plan mathématique que sur le plan épistémologique* [7].

Il y a quelques années, un début de débat entre épistémologues et didacticiens s'est engagé à propos des recherches sur la démonstration [5]. Ce n'est pas un hasard s'il avait commencé à s'engager sur le thème de la démonstration, mais bien d'autres thèmes peuvent faire l'objet de débats et de rencontres. Le débat, s'il doit avoir lieu, ne peut pas s'engager à coups de grandes considérations générales, mais sur des exemples précis.

Très récemment, en novembre 1996, un colloque sur les mathématiques cartésiennes a réuni pour la première fois, à l'initiative d'André Rouchier, des historiens et des didacticiens. Il laisse prévoir des échanges fructueux dans l'avenir.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHA, "Une approche heuristique de l'analyse", *Repères IREM*, n¡25, pp. 35-62.

[2] ARSAC Gilbert, "L'origine de la démonstration : Essai d'épistémologie didactique", *in Recherches en Didactique des mathématiques*, 1989.

[3] ARTIGUE Michèle, "Epistémologie et didactique", *in Recherches en Didactique des mathématiques,* vol. 10, 1.2, 1990, pp. 241-286.

[4] ARTIGUE Michèle, "Les nombres complexes. Une approche épistémologique et didactique", IREM Paris 7, 1991.

[5] BARBIN Evelyne, "Quelles conceptions de la démonstration mathématique pour quels apprentissages ?", *in Repères IREM*, n° 12, Juillet 1993, pp. 93-113.

[6] BARBIN Evelyne, "Histoire et enseignement des mathématiques : pourquoi ? comment ?", *in* Revue de l'AMQ, (Association Mathématique du Québec), à paraître en mars 1997.

[7] BKOUCHE Rudolf, *La formation des maîtres : professionnalisation et formation professionnelle*, IREM de Lille, 1994.

[8] BROUSSEAU Guy, "Problèmes de didactique des décimaux", *in Recherches en Didactique des mathématiques,* vol. 2.1, 1981.

[9] BROUSSEAU Guy, "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques", *in Recherches en Didactique des mathématiques,* vol. 4.2, 1983, pp. 164-198.

[10] BROUSSEAU Guy, "Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques", *Colloque international de Montréal, construction des savoirs,* 1988.

[11] CHEVALLARD Yves, *La transposition didactique*, nouvelle édition, La pensée sauvage, Grenoble, 1990.

[12] COMMISSION INTER-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques, *Pour l'introduction d'une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques,* IREM de Lyon, 1988.

[13] COMMISSION INTER-IREM Epistémologie et histoire des mathématiques, *Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*, Ellipses, 1993.

[14] DESCARTES, *La géométrie,* 1637, Christophe David, Paris, 1705.

[15] EUCLIDE, *Les éléments,* trad. PEYRARD, Blanchard, Paris, 1966.

[16] FRIEDELMEYER Jean-Pierre et VOLKERT Klaus, "Quelle réalité pour les imaginaires ?", *in Histoires de problèmes, Histoire des mathématiques*, Ellipses, 1993.

[17] SCHNEIDER Maggy, *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives,* Université de Louvain la Neuve, 1988.

[18] IREM de Toulouse, *Equations du troisième degré,* 1980.

[19] ROSMORDUC Jean éd, *Réflexion sur la création d'un D.E.A.* de didactique interdisciplinaire, Université de Brest, 1993.

[20] SIERPINSKA Anna, "Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique", *Colloque international de Montréal, Construction des savoirs,* 1988.

[21] SIERPINSKA Anna, "Quelques idées sur la méthodologie de la recherche en didactique des mathématiques liée à la notion d'obstacle épistémologique", *in Cahiers de didactique des mathématiques,* Institut Français de Thessalonique, n° 7, pp. 85-86.

[22] VEYNE Paul, *Comment on écrit l'histoire, Essai d'épistémologie,* Ed. du Seuil, Paris 1971.

[23] WILDER R.L., *Mathematics as a cultural system, Pergamon Press, Toronto, 1981.*