REPERES - IREM . N° 27 - avril 1997

LA PROBLÉMATIQUE DES SITUATIONS FONDAMENTALES ET L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

Deux regards sur l'enseignement des mathématiques

Marc LEGRAND
Enseignant-chercheur
Institut J. Fourier Grenoble

Introduction

Si bon nombre d'entre nous avons choisi le métier de professeur de mathématiques, c'est probablement d'abord parce que nous aimons "faire" des mathématiques, parce que nous aimons résoudre les problèmes qui se mathématisent bien, que nous apprécions tout particulièrement la façon d'appréhender le monde qui caractérise cette discipline.

Ce que les mathématiques nous ont appris nous aide parfois à "bien penser" certains problèmes, nous apporte souvent un éclairage qui enrichit la réalité que nous modélisons ainsi ; nous aimerions donc bien transmettre cet enrichissement à nos élèves ou à nos étudiants, leur communiquer un certain enthousiasme, partager avec eux... un véritable bonheur intellectuel.

Ainsi, lorsque nous réfléchissons au démarrage d'un cours, d'un nouveau chapitre, à l'introduction d'une notion importante, se posent à nous, et de façon récurrente, les questions cruciales :

– "Par quel bout s'y prendre", par quoi commencer pour qu'assez rapidement la grande majorité de nos interlocuteurs "accrochent" ? Comment les inciter à se poser très vite les "bonnes questions" qui les introduiront à une problématique scientifique qui, seule, permet de donner un sens adéquat aux objets ? Comment faire pour que, dès le départ, ils puissent découvrir par eux-mêmes à quel point la théorie que nous voulons leur faire aborder peut être riche et intéressante ?

– Une introduction historique, l'étude d'un exemple introductif, les deux, peuvent-ils suffire ?

En vieillissant dans le métier, on se pose ces questions avec de moins en moins de conviction, car on sait bien que, quelle que soit la façon dont on s'y prendra au départ, il arrivera toujours un moment où il faudra donner les définitions et vérifier les propriétés de base, et l'on sait pour l'avoir constaté très souvent à regret que c'est précisément à cet endroit que "quelque chose se casse" ; il n'est pas rare qu'après un démarrage très prometteur, on soit terriblement déçu par la réalisation globale en classe ou en amphi de notre projet de savoir.

La déception vient essentiellement du fait que ce qui, dans notre projet initial, avait globalement beaucoup de sens, une certaine harmonie, voire une esthétique, nous ne sommes pas vraiment ou très mal ou pas du tout parvenus à le faire partager à l'ensemble de nos interlocuteurs.

On est parfois même doublement déçu parce qu'après avoir cru réussir dans la partie "méta-mathématique" introductive, il apparaît que plus on avance dans le développement de la théorie, plus on l'explicite, plus on l'explique, et plus le caractère merveilleux tend à s'estomper, plus le sens et la cohérence globale qu'on envisageait de faire partager s'effacent devant des préoccupations plus secondaires, et finalement plus l'essentiel tend à disparaître au profit des acquisitions techniques incontournables.

Un certain nombre de recherches en didactique prennent plus ou moins directement en compte cet énorme obstacle didactique que l'on pourrait résumer lapidairement par la thèse : "dans tout enseignement consistant, le sens global ne se livre pas facilement, il ne peut s'énoncer directement, se dire ou se prescrire !"

Je voudrais essayer d'indiquer ici comment cet obstacle est pris en compte dans les deux théories qui jouent actuellement un rôle majeur en didactique des mathématiques, la théorie des situations initiée par Guy Brousseau d'une part, et la modélisation anthropologique développée par Yves Chevallard de l'autre ; je voudrais surtout essayer de montrer en quoi ces deux théories très opposées dans leurs fondements apportent néanmoins un éclairage très complémentaire, et par suite très enrichissant sur ce problème qui nous concerne tous au premier chef.

En pratique, on peut dire que la théorie des situations aborde directement ce problème de la construction du sens initial avec la notion de situation fondamentale.

En effet, dans la recherche d'une situation fondamentale, on se pose les questions : Quelle peut ou doit être l'activité du sujet élève ou étudiant au moment extraordinaire de l'introduction à une forme de pensée nouvelle ? Quelles conséquences nos choix initiaux de mathématicien et de professeur peuvent-ils avoir sur la suite ? En quoi ces choix initiaux peuvent-ils avoir une incidence sur la compréhension "finale" de l'élève ?

A l'opposé, la théorie anthropologique se préoccupe principalement des moments plus ordinaires de la vie scolaire d'un savoir : ce qui a été introduit d'une façon ou d'une autre doit, pour ne pas être immédiatement oublié, vivre un certain temps dans le cours, les exercices et les problèmes (*i.e.* sous la tutelle de tout ce qui fait le scolaire) ; ces contraintes incontournables du temps et de l'effet institutionnel vont éventuellement peser lourd dans la transformation du savoir initialement introduit, elles peuvent dans certains cas expliquer en partie notre immense déception devant l'étiolement, la disparition ou la transformation régressive du sens au fur et à mesure que le "cours avance".

Au fil des années, j'observe que ces deux éclairages théoriques sont de puissants outils d'anticipation sur ce qui peut se produire dans nos classes ou nos amphis, lorsque nous projetons d'introduire ceci ou cela d'une façon ou d'une autre ; ces théories peuvent nous aider dans bien des cas à effectuer des choix épistémologiques et didactiques pertinents qui, s'ils ne nous permettent qu'exceptionnellement de sauver tout le caractère merveilleux et fondamentalement enthousiasmant de notre projet de savoir, garantissent néanmoins avec une bonne fiabilité – je trouve – que l'essentiel ne sera pas mis de côté, et n'est-ce pas déjà beaucoup ?

Je souhaiterais donc simultanément montrer ici d'un côté ce que ces mises à distance de la réalité pédagogique m'ont permis de comprendre vis-à-vis des mathématiques elles-mêmes et de leur enseignement, en quoi elles m'aident à mieux exercer mon métier de professeur, et de l'autre les précautions (dont j'ai mis longtemps à comprendre la nécessité), les défenses que j'ai dû construire, les paris philosophiques que j'ai dû faire pour que la froideur scientifique de ces regards théoriques demeure néanmoins compatible avec le sentiment de responsabilité que j'attribue à mon métier de professeur, pour que la didactique n'entre pas en quelque sorte en conflit avec une certaine éthique.

En clair, je voudrais vous dire ce qui me paraît chaque jour plus nécessaire de rajouter à la didactique pour que cette façon de modéliser la réalité soit une véritable aide dans notre métier de professeur, *i.e.* ne nous conduise ni au délire pédagogique en nous laissant croire que tout est possible en matière d'enseignement, ni à l'inverse ne nous installe dans un pessimisme inhibiteur, une sorte de désillusion morbide qui nous retirerait tout désir, toute imagination pour organiser l'enseignement autour de la construction du sens !

Quelques précisions sur un "malentendu fondamental" à propos de la science

Pour tenter d'écarter le malentendu fondamental qui a tendance à "donner des boutons" à certains d'entre nous dès qu'on leur parle de recherches ou de théories didactiques, essayons de préciser les rapports que nous voyons entre théorie et pratique, modèles et réalités.

Il me semble que la plupart des bâtisseurs de théories, qu'il s'agisse de sciences dures ou de sciences humaines, n'explicitent pas ou pas suffisamment leur position philosophique vis-à-vis du "réel" qui est à la base de leur construction intellectuelle : quelle distinction font-ils entre modèle et réalité ? quelle distance nous invitent-ils à prendre vis-à-vis de leurs thèses pour que nous ne soyons pas amenés à notre insu à en dénaturer le caractère scientifique ? quelles limites souhaitent-ils que nous donnions à la portée de leurs conclusions qui, par essence théorique même, se formulent souvent peu ou prou comme des vérités universelles sur la "nature", alors que sur le fond leur universalité vient du fait que "comme les mathématiques", elles ne parlent jamais de la "nature elle-même", mais d'un certain modèle construit à propos de la "nature".

Notre problème initial ici, au niveau de l'enseignement, est donc de mieux préciser les rapports qu'il convient d'établir entre la réalité – le didactique – et ses différentes modélisations théoriques – la didactique.

Modèle et réalité

Le réel, ce qui se passe concrètement, c'est bien sûr ce qui nous intéresse tous au premier chef puisque c'est ce que nous vivons ; le malheur, c'est que ce réel-là... tout présent à nous qu'il soit ou qu'il ait l'air de s'imposer, est le plus souvent trop insaisissable, trop singulier pour que nous puissions en voir autre chose que les apparences les plus grossières et parfois les plus trompeuses.

Contrairement à une vision scientiste, il me semble que la connaissance effective "du réel" échappe à notre condition d'être humain. Le pari commun des scientifiques est alors à mon avis que, reconnaissant notre incapacité à connaître l'essence même des choses, nous croyons néanmoins pertinent de chercher à penser "le réel", de chercher à comprendre et à maîtriser les événements qui le matérialisent, et pour cela d'accepter de nous en écarter explicitement en le remplaçant par des modèles abstraits que l'on dote de lois permettant de réfléchir, de prédire, de calculer.

Ainsi en est-il des atomes et des électrons auxquels la plupart des personnes confèrent une existence matérielle, croient presque pouvoir voir et toucher, mais dont en fait personne n'a jamais vu que les représentations et n'a jamais ressenti que les effets dans des modèles ad hoc ; ce ne sont que des abstractions de scientifiques, mais (et c'est certainement en partie ce qui donne un poids abusif à la science) ce sont des abstractions tellement pertinentes pour nous aider à penser et à maîtriser un certain nombre d'événements nous concernant directement qu'on finit par les prendre pour la réalité.

La difficulté générale à connaître toute forme de réalité est renforcée lorsque le réel qui nous préoccupe est, comme l'enseignement, fait d'instants découpés dans nos vies propres ; dans ce cas, il peut même apparaître choquant à d'aucuns de voir autrui se dresser en spécialiste devant leur propre vécu et prétendre avoir le droit d'en parler savamment, objectivement, en connaisseur, alors qu'il s'agit là d'une intimité dont personne ne connaît rien ou presque.

Cependant, lorsqu'on cherche à appliquer aux sciences humaines le pari scientifique si souvent payant en sciences "dures", on est conduit à postuler que tout en reconnaissant chaque personne comme singulière et totalement irréductible aux autres, il n'est pas déraisonnable de considérer que la réalité d'un humain est aussi la réalité des autres humains, de faire le pari qu'on peut se penser soi-même au travers de ce que les autres nous donnent à voir et vice-versa.

Pour toutes ces raisons, il me semble que chercher à exploiter la puissance de la démarche scientifique pour étudier une réalité humaine comme l'enseignement par exemple, c'est s'obliger à remplacer un monde fait d'objets matériels, de faits contingents et de personnes irréductibles les unes aux autres, par un monde immatériel fait d'idées et de jugements sur ces idées, un monde imaginaire peuplé d'objets et d'êtres fictifs qui agissent et réagissent en fonction des suppositions qui sont faites explicitement sur les uns, d'idées et de logiques qui sont prêtées aux autres.

De façon paradoxale, je dois constater depuis plusieurs années que ce jeu explicite entre un réel construit pour penser un réel donné permet à l'homme de vivre pragmatiquement avec une certaine humanité (voire, s'il y intègre une éthique, avec une certaine humanitude) une suite d'événements contingents qui, sans ce travail explicite de mise à distance que permet la démarche scientifique, ne sont le plus souvent qu'une suite d'ordre et de désordre subis plus qu'organisés et voulus, vécus sans responsabilité comme une succession de chances et de malchances.

Pour échapper à la fatalité du subi sans intelligibilité (ce qui dans l'enseignement, crée à la longue une sorte de désespérance du professeur), *i.e.* pour donner sens à sa vie, on peut donc parier sur la force et l'efficience des idées et de l'imaginaire pour organiser le réel ; ce pari réussit, semble-t-il, à chaque fois qu'il est fait et vécu comme tel, c'est-à-dire à chaque fois qu'on s'interdit absolument de confondre ses idées avec ce qu'elles sont censées représenter, ses "modèles" avec la réalité.

La didactique et le didactique

Ainsi en va-t-il, à mon avis, entre le didactique et la didactique :

* Le didactique, c'est ce réel tout pétri d'humain qui nous intéresse et que nous vivons tous au premier degré avec nos tripes, réel fait d'un professeur et de ses élèves, d'administration, de collègues et de parents, de devoirs, d'interrogations et de copies, d'angoisses, de joies et de déceptions, d'apparentes réussites et d'apparents échecs. Ce réel-là, personne ne peut prétendre le bien connaître, puisque c'est une affaire privée entre des personnes singulières réunies dans une activité socialement organisée, l'enseignement ; nul ne peut à mon sens s'immiscer en connaisseur dans cet espace de vie sans prendre le risque de le perturber fortement, de le travestir, voire de l'empêcher de se dérouler humainement.

* La didactique, c'est cet effort de compréhension du didactique entrepris depuis toujours par l'homme aux prises avec l'énorme difficulté de partager ce qu'il sait avec celui qui l'ignore, effort d'intelligibilité théorisé scientifiquement en mathématiques depuis une vingtaine d'années par la création de modèles explicites, c'est-à-dire de mondes imaginaires peuplés de personnages fictifs encore appelés maître et élèves qui ne sont plus des personnes singulières mais génériques ; personnages auxquels on prête des fonctions, des intentions, des déterminismes spécifiques du jeu de partage du savoir.

Il me paraît donc essentiel aujourd'hui de bien considérer que ce petit monde qui peuple les modélisations du didactique n'a jamais existé en tant que personnes physiques propres et ne doit jamais être identifié à l'un quelconque de nos interlocuteurs effectifs : l'élève de Guy Brousseau, ce sujet épistémique qui agit et réagit "naturellement" dans une rationalité de mathématicien, ne se rencontre pas spontanément dans nos classes et nos amphis, et il nous faut sérieusement travailler le contrat didactique pour qu'il soit raisonnable de considérer un élève ou un étudiant comme tel ; de même, mais à l'opposé, l'élève d'Yves Chevallard, ce scolêtre qui agit et réagit en suivant implacablement les lois du didactique les plus réductrices de sens, ne rend pas forcément compte du personnage curieux, rebelle aux vérités imposées, scolairement désintéressé, qui se cache bien souvent derrière ce personnage apparemment sans grandes aspirations scientifiques.

A mon sens donc, il serait tout à fait pervers de vouloir réduire nos élèves ou nos étudiants à ces modèles scientifiques, car précisément il me semble que la force et la complexité de l'homme résident en grande partie dans le fait que tout en étant comme le reste du monde grandement soumis aux lois de la nature, chaque personne humaine, chaque groupe humain peut, dès qu'il se donne un but, un idéal, dès qu'il connaît mieux les lois qui le gouvernent à son insu, déjouer une bonne part des déterminismes qui, sinon, le contraindraient totalement.

Tous ces personnages qui peuplent nos modèles didactiques doivent donc être explicitement considérés comme des personnages fictifs inventés par les chercheurs, non pour nous donner une photographie fidèle de nos classes ou de nos amphis, mais pour nous aider à découvrir une certaine logique dans le comportement souvent déconcertant du monde scolaire (élèves, étudiants, collègues), voire dans notre propre comportement de professeur. Ces modèles scientifiques qui ne sont donc ni les modèles de ce qu'il faut faire, ni ceux de ce qu'il ne faut pas faire, sont là uniquement pour nous aider à penser plus rationnellement cette réalité qui nous échappe si souvent : l'enseignement.

Au risque de se répéter, soyons donc clairs : l'élève, l'étudiant, le maître, la classe ou l'amphi des théories didactiques ne sont pas le vrai élève, le vrai étudiant que nous rencontrons, le vrai maître que nous sommes dans notre vraie classe ou notre véritable amphi, et ils ne demandent surtout pas à être pris pour tels..., parions seulement qu'à certains moments le comportement des uns nous permettra d'interpréter, de comprendre et de maîtriser le comportement des autres !

Cette prise de distance, ce pari, j'ai personnellement, en tant que professeur, eu beaucoup de mal à en comprendre l'importance et la nécessité, j'ai donc dû vaincre de fortes résistances intérieures pour le rendre effectif, mais je dois avouer aujourd'hui que plus j'utilise cette méthode de travail et plus je la trouve simultanément efficace et enrichissante, car elle me permet de progresser dans la compréhension du système tout en respectant mon identité propre et la singularité de mes interlocuteurs.

Modèle ou mystification

Un dernier mot enfin, pour qu'un malentendu levé n'en introduise pas un autre. En nous invitant à ne pas réclamer aux modèles didactiques d'être des photographies fidèles de notre réalité pédagogique et encore moins des "modèles à suivre", je ne suis pas en train de militer pour que nous nous laissions embarquer les yeux bandés dans une de ces mystifications qui sont d'autant plus séduisantes et crédibles qu'on ne les confronte pas à "la réalité", bien au contraire.

Pour moi le seul critère de validité de ces théories, c'est le type de changement qu'elles nous permettent d'opérer sur nous-mêmes. Personnellement, le concept de situation fondamentale et les lois du didactique mises en évidence dans la théorie anthropologique m'ont permis de changer très positivement ma réalité d'enseignant, notamment à propos de la question initiale : "comment sauver l'essentiel au niveau du sens dans l'introduction d'un concept ?" ; c'est pour cela que je leur accorde une certaine force et que je souhaiterais partager avec vous ces problématiques.

Deux modélisations très différentes de la réalité de l'enseignement : la théorie des situations d'une part et le modèle anthropologique de l'autre.

Première approche de la théorie des situations

Cette théorie se fonde sur une modélisation de l'enseignement des mathématiques à deux niveaux, au niveau du savoir et au niveau de l'élève.

Modélisation du savoir : les mathématiques ne sont pas vues d'abord comme un corpus de vérités instituées qu'il faudrait connaître et appliquer, mais principalement comme une pratique de questionnement pour s'adapter à la complexité, une certaine façon de transformer les difficultés mal cernées, les questions trop vagues en problèmes, *i.e.* en questions suffisamment ciblées et fermées pour qu'il soit raisonnable d'envisager d'établir comme des vérités collectives le fait qu'elles aient une ou des solutions ou qu'elles n'en aient pas.

Enseigner un tel savoir, c'est donc introduire ses interlocuteurs à une problématique de questionnement, de clarification des problèmes et de vérification des solutions ; apprendre ces savoirs, c'est alors acquérir une aptitude à se poser certaines formes de questions, à les transformer en problèmes et à se doter d'outils de raisonnement qui permettent de trier dans les réponses possibles celles qui sont suffisamment précises, efficaces et certaines pour être considérées comme des solutions.

Modélisation du sujet : Le sujet élève ou étudiant n'est pas pris dans sa globalité psychologique et psychique de personne humaine et n'est pas regardé non plus comme un sujet de l'institution école se conformant aveuglément aux lois de cette institution, mais comme un sujet épistémique. C'est-à-dire que l'élève de ce modèle est traité comme une personne rationnelle qui accorde une valeur de vérité et d'utilité aux déclarations générales du cours de mathématiques en fonction des explications qu'on lui en donne ou qu'il se construit lui-même, et en fonction aussi de leur (in)compatibilité avec les situations particulières dans lesquelles il est amené à les rencontrer.

En d'autres termes, dans cette modélisation, on fait volontairement abstraction de tout l'aspect psychologique, social et affectif qui agit sur le comportement de l'élève, non pas parce qu'on considère que cela n'est pas important ou n'a pas d'influence sur l'enseignement, mais pour pouvoir analyser ce qui dans le comportement d'un élève est dicté par son épistémé, c'est-à-dire ce qui justifie le comportement de l'élève lorsqu'il entend le discours du professeur et travaille les problèmes qui lui sont soumis, en tant que sujet rationnel mu par une rationalité proche de celle du mathématicien.

Dire que ce sujet épistémique est mu par une rationalité proche de celle du mathématicien, c'est ici faire l'hypothèse que lorsque le sujet élève de ce modèle perçoit une contradiction entre ce qu'il pense être vrai de façon générale et ce qui se produit dans une situation particulière, il réagit comme un mathématicien, *i.e.* il ne regarde pas cette pathologie comme un fait "bizarre", un cas particulier à supporter comme tel ou à éliminer de sa théorie ! Au contraire, il cherche à rendre ce fait compatible avec ce qu'il pense être vrai et il accepte éventuellement au cours de cette opération de remettre en cause certaines de ses conceptions, lorsqu'il lui apparaît clairement que c'est leur fausseté qui est la source de la contradiction.

Par exemple, si en calculant l'aire d'une figure de deux façons différentes, notre élève trouve trois unités d'une façon et quatre de l'autre, dans notre modèle on ne va pas envisager que le sujet épistémique pourrait laisser passer cela en se disant : "et alors !... en math tout est possible !"

Nous supposerons par contre que cette "bizarrerie" va être considérée par l'élève comme une absurdité, *i.e.* comme quelque chose d'inacceptable, et qu'il va donc en conséquence chercher de lui-même à revenir sur ce qu'il a fait, sur ce qu'il a conjecturé, sur ce qu'on lui a dit, afin de découvrir où "ça cloche", car il pensera "qu'il y a quelque part quelque chose qui ne va pas", qui doit être remis en question. (Dans ce modèle, les contradictions sont supposées être la source des feed-back producteurs de savoirs et de sens.)

Dans la réalité de nos classes ou de nos amphis, une telle attitude appelée parfois "le bon sens" se présente de façon "innée" chez certains élèves (comme par hasard issus de milieux socio-culturels favorisés), et semble inaccessible par contre à d'autres sujets ; à mon avis cette attitude très cartésienne, postulée dans le modèle des situations, est à construire dans le réel de l'enseignement auprès de la grande majorité de nos interlocuteurs, et je pense même que l'organisation démocratique d'une société se fonde implicitement sur le pari que par l'école tout citoyen peut à terme accepter cette forme de rationalité pour gérer les problèmes de vie en société.

On pourrait d'ailleurs facilement convenir – je pense – que si par l'étude des mathématiques cette compétence était assurément acquise par le plus grand nombre à la fin de la scolarité obligatoire, on aurait là une raison majeure de défendre l'intérêt d'une solide culture mathématique de base pour tous dans les pays qui choisissent de se gouverner de façon démocratique.

Conséquence sur l'enseignement

Partant de cette double hypothèse que les connaissances scientifiques sont le fruit de l'adaptation intelligente de l'homme aux situations complexes, et que l'élève est un sujet épistémique mu par une rationalité compatible avec celle du mathématicien, le principe didactique qui en découle (assez naturellement) est que plutôt que de dire à l'élève ce qui est vrai, ce qu'il "faut savoir", il convient de le confronter directement à des situations complexes qui ont un rapport "nécessaire" avec ce savoir.

Plus précisément, à partir d'une situation problématique mise en place par le professeur, l'élève est amené à rencontrer une difficulté potentiellement riche d'apprentissages : il doit atteindre un objectif qui a du sens pour lui, il peut en partie aborder seul ou avec ses pairs les questions sous-jacentes, mais il ne peut que très difficilement (ou pas du tout) trouver une solution totalement satisfaisante avec le simple bon sens et ses seules connaissances antérieures.

Par ce choix didactique, on pense que si la situation est en bonne adéquation avec le savoir et si l'élève se comporte en sujet épistémique, il va au cours de la situation, non pas inventer le savoir (ce qu'il serait totalement démagogique de laisser supposer), mais en éprouver le besoin, se poser de "bonnes questions", faire des conjectures pertinentes même si elles sont en parties erronées, effectuer des calculs plus ou moins maladroits qui lui apporteront, dans certains cas au moins, des réponses intéressantes, etc.

On cherche donc au cours de cette période erratique à faire vivre chez l'élève ou dans le groupe d'élèves un présavoir que le professeur ne montre pas, n'enseigne pas, mais sur lequel l'élève agit en pleine conscience (il se pose des questions, conjecture, calcule, tombe sur des contradictions ou des paradoxes, etc.) ; la situation doit alors engendrer des effets de feed back qui indiquent peu à peu à l'élève ou au groupe les choix les plus pertinents et ceux qui le sont moins ou pas du tout.

Lorsque tout se passe convenablement, il est probable que ce qui oriente principalement les réflexions de l'élève est davantage de l'ordre des raisons scientifiques (c'est pertinent ou non, vrai ou faux) que des raisons scolaires ("c'est ce qu'on nous a demandé de faire !", c'est la réponse attendue du professeur).

A partir d'une problématique que l'on veut faire partager, on fait l'hypothèse que ce foisonnement de questions et d'actions au cours desquelles l'élève a principalement l'initiative est nécessaire, dans un premier temps, pour que progressivement le professeur puisse introduire le savoir sans que les significations scientifiques de son enseignement disparaissent presque automatiquement dès que la théorie se déploie et que des techniques sont proposées pour outiller les idées.

Il est important de noter ici que le principe moteur qui doit permettre à ce dispositif didactique de sauvegarder auprès des élèves une grande part des significations scientifiques ne repose pas d'abord sur l'habileté supposée du professeur à bien présenter la théorie ou à proposer de bons exercices techniques, pas plus que sur l'application des élèves à bien écouter et à bien apprendre, mais essentiellement sur l'adéquation entre le type de questions que l'élève ou la classe va "être contraint à se poser" pour investir la situation, le genre d'idées auxquelles un débat de la classe pourra donner vie et consistance, les techniques que les élèves pourront mobiliser, adéquation donc de tout cela avec le type de réponses scientifiques que le savoir théorique peut apporter à ces questions, le type de mise en ordre sur le problème que la théorie peut apporter aux idées déjà là, le type de simplification et de sécurisation des calculs que les techniques peuvent fournir.

Lorsque cette opération didactique réussit, le savoir enseigné apparaît au sujet épistémique non comme un savoir scolaire (ce qu'il faut savoir), mais comme "une sorte de réponse scientifique optimale" permettant de s'adapter rationnellement aux problèmes auxquels il a été confronté pour "apprendre".

Un premier exemple à l'école élémentaire

L'exemple paradigmatique de cette façon de concevoir l'enseignement des mathématiques est celui envisagé par Guy Brousseau au sujet de l'apprentissage des décimaux.

Schématiquement, le processus est le suivant : au lieu d'enseigner d'abord aux élèves comment fractionner l'unité, puis de se servir du concept naissant de nombre fractionnaire ou de fraction pour le "faire vivre" dans des exercices d'application, on choisit ici de confronter directement la classe – sans jamais avoir parlé de nombres fractionnaires – à un problème difficile qui les "nécessite".

On confronte donc les élèves placés en petits groupes au problème délicat suivant : "comment distinguer avec des intruments de mesure traditionnels (genre pied à coulisse) l'épaisseur de différentes feuilles de papier provenant de différents paquets de feuilles ?"

Comme l'opération directe de mesure de l'épaisseur des feuilles séparées avec un pied à coulisse s'avère dérisoire car totalement aléatoire, les sujets épistémiques élèves sont alors conduits (par la raison et non par la consigne du professeur) à faire des paquets de suffisamment de feuilles pour pouvoir mesurer une épaisseur (10 feuilles, 1mm ; 60 feuilles, 7 mm ; etc.).

Chaque groupe d'élèves est alors invité par le maître à choisir, après débat interne, un ou des codes pour désigner l'épaisseur des feuilles ; un jeu de communication organisé par le maître entre les groupes a pour but de qualifier ou de disqualifier par leur fonctionnalité (et non par les jugements du professeur) les codes plus ou moins pratiques ou plus ou moins ambigus.

Le jeu ainsi organisé sur trois séances d'enseignement permet de faire émerger le couple (épaisseur, nombre de feuilles) muni d'une relation d'équivalence ad hoc comme une réponse bien adaptée au problème initial.

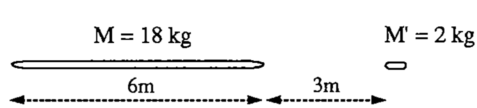
Par des institutionnalisations successives, le professeur a ainsi la possibilité de faire émerger auprès de ses élèves (traités essentiellement comme des sujets épistémiques) le concept de fraction, de nombre décimal comme un outil de pensée bien adapté pour résoudre un problème d'apparence très simple et qui s'avère peu à peu insoluble par l'exploitation du seul "bon sens".

Le détour de pensée "fraction" peut ici apparaître après coup comme "nécessaire" au sujet épistémique pour résoudre ce problème !

Un autre exemple à l'université

De façon similaire, à l'université on peut envisager d'aborder le concept d'intégrale de la façon suivante :

On peut par exemple, sans aucun préambule sur l'intégrale, demander aux étudiants d'évaluer la force d'attraction newtonienne qui s'exerce entre un barreau rectiligne et une masse ponctuelle située à une distance donnée sur l'axe du barreau.



Les réponses d'un amphi d'une centaine d'étudiants au bout d'un quart d'heure de recherches individuelles à la question **F = ?** peuvent être :

F =	– 8 k	4/9 k	k	4/3 k	4k	8k	?
Nbre d'étud.	10	3	#50	8	10	4	#25

On constate sur ce tableau que les sujets épistémiques qui n'ont jamais entendu exposer une théorie de l'intégrale et qui n'ont pas été trop souvent spectateur des mises en équations infinitésimales pratiquées de façon standard ("on découpe la barre en tranches infiniment minces d'épaisseur Δx ou dx etc. etc.") sont peu nombreux à défendre la réponse idoine 4/3 k ; par contre, leurs diverses réponses ont toutes des raisons scientifiques et le débat qui s'instaure pour les analyser conduit progressivement le groupe amphi à découper la barre en morceaux, non pas infiniment minces, mais d'épaisseur appréciable.

L'épaisseur d'un morceau ne pouvant être considérée comme nulle dans un découpage effectif, les sujets rationnels qui veulent contrôler ce qu'ils font, sont "naturellement" conduits à majorer et à minorer les forces partielles qui s'exercent sur chaque morceau.

L'étude scientifique du problème permet alors, après quelques découpages particuliers, d'intuiter que la somme des erreurs d'appréciation des forces locales diminue lorsque le découpage s'affine.

Il devient alors "naturel" de chercher à "passer à la limite" pour réduire au maximum ces erreurs d'encadrement ; bref, les sujets épistémiques étudiants d'un amphi sont peu à peu conduits à envisager une procédure de type intégrale de Riemann, et ce non parce qu'on aura prononcé les mots magiques "infiniment petit" et "intégrale" ou parce qu'on aura agité devant leurs yeux les symboles Δx, dx, $\int_a^b f(t)dt$, mais en raison d'une nécessité scientifique, celle de cadrer au plus près cette force qui existe certainement, bien qu'elle soit insaisissable directement par les mises en équations algébriques classiques.

Pourquoi envisager un changement aussi radical de l'enseignement

Nous reviendrons en fin d'article sur cette situation problématique du barreau, car cela nous permettra de mieux préciser la notion de situation fondamentale, mais, sans vouloir faire de prosélytisme, disons néanmoins dès maintenant qu'une telle situation, lorsqu'elle est abordée en amphi dans une didactique de débat scientifique, provoque le plus souvent un changement radical d'attitude globale des étudiants.

Elle provoque une rupture de comportement que l'on obtiendrait très difficilement par d'autres procédés ; en effet, on observe qu'une majorité d'étudiants se mettent à "déplacer" leurs énergies et leur imagination, exclusivement consacrées habituellement aux manipulations techniques, vers la construction et l'utilisation d'une procédure intégrale : beaucoup parviennent ainsi à entrer de façon durable dans une problématique de mesure et d'intégration.

Classiquement (*i.e.* dans un enseignement qui suit le schéma traditionnel : définitions, théorèmes, démonstrations, applications), après une introduction historique suivie de quelques commentaires sur les rapports envisageables entre aire, intégrale et primitives, présentation qui passionne quelques étudiants, mais que l'on écourte d'année en année car elle "fait bâiller" la grande majorité qui attend un exposé plus "mathématique", le professeur se lance dans un long monologue au cours duquel il introduit des découpages, des encadrements et des passages à la limite.

La compréhension des raisons et de la nature de cette procédure complexe de découpages, d'encadrements et de passages à la limite est à mon sens tout aussi nécessaire pour "faire des mathématiques" que pour "faire de la physique", car sans elle on ne peut d'une part comprendre comment il est possible de construire des primitives en général (*i.e.* hors des cas très particuliers où les calculs peuvent s'effectuer), et d'autre part on ne peut donner sens à de nombreux concepts du monde physique comme l'aire, le volume, la masse, la force, le travail, etc., hormis les cas très particuliers où les paramètres les plus pertinents sont constants.

Ici, l'obstacle à l'entrée du sujet épistémique dans une théorie scientifique fine et complexe est (comme c'est très souvent le cas) renforcé par le fait que la plupart des étudiants, eux, n'éprouvent pas du tout le besoin de faire un tel détour théorique, ils n'en ressentent absolument pas la nécessité.

Cette non nécessité pour l'étudiant de s'investir dans un raisonnement infinitésimal a, me semble-t-il, une double origine :

– en mathématiques, rares sont les sujets rationnels qui peuvent spontanément pressentir l'énorme difficulté du problème (on cherche à effectuer une sorte de moyenne pondérée d'une famille de valeurs, or cette famille n'est pas en général finie, ni même dénombrable) ; dès lors il est bien difficile pour le sujet épistémique "ordinaire" d'imaginer qu'il va rencontrer des paradoxes insurmontables s'il se contente d'effectuer tout simplement la somme d'une infinité non dénombrable de valeurs ! (et pour 99% de nos interlocuteurs, il ne sert à rien de soulever ce problème pour qu'il en devienne un !)

– en sciences appliquées, notamment en physique, quand un problème ne peut guère se mathématiser que par un traitement différentialo-intégrale (une occasion rêvée de donner du sens à cette procédure théorique par ses applications), il existe des coutumes d'enseignement, des rites qui permettent à presque tous les professeurs (euxmêmes ont été ainsi enseignés) de jongler avec les dx et les Δx, de passer subrepticement du signe Σ au signe $\int$ en utilisant pour légitimer ces passages les mots magiques "petit", "très petit", "infiniment petit", et ainsi de résoudre "miraculeusement" (*i.e.* sans donner l'occasion à l'étudiant de percevoir les difficultés abordées et/ou les moyens théoriques utilisés pour les dépasser) certains problèmes complexes au moyen d'un simple calcul de primitive ou en appuyant sur une touche d'ordinateur.

Du coup, en l'absence de raisons intra- et extra-mathématiques qui pourraient justifier à ses yeux l'effort intellectuel très important qu'il lui faudrait effectuer pour entrer véritablement dans une problématique infinitésimale, et en l'absence de points de repère de sens, l'étudiant conciencieux "gratte" le cours, mais ne saisit que très exceptionnellement les raisons et les enjeux des précautions prises par le constructeur d'une théorie qui lui semble alors totalement "parachutée".

Quelques indices montrent d'année en année que de façon récurrente les étudiants n'exercent pratiquement aucun contrôle épistémique pendant cette période, et ce quels que soient les efforts pédagogiques du professeur. En pratique, l'amphi des étudiants semble ne retrouver une certaine vie intellectuelle qu'au moment du calcul des primitives, car là au moins le sujet épistémique étudiant a le sentiment de pouvoir en partie reprendre l'initiative au niveau d'une action qu'il peut conduire seul dans une certaine autonomie.

Le résultat de cette affaire est qu'à moins de décider d'évacuer purement et simplement du cours de mathématiques toute la partie conceptuelle, on a chaque année l'impression de s'enfermer davantage dans un cercle vicieux en participant à reculons à une sorte de mascarade scientifique.

Il s'agit donc là d'un problème didactique majeur, car en théorie il semble que sont réunies autour de l'enseignement de l'intégrale toutes les conditions du succès, et en pratique on échoue très régulièrement.

Sont réunies *a priori* toutes les conditions du succès dans la mesure où l'on consacre du temps et des énergies importantes pour mettre en valeur auprès des étudiants une théorie qui pourrait être *a priori*, pour lui aussi, très riche, pleine de sens et d'intuition.

En effet :

– il s'agit d'un savoir merveilleux sur un plan didactique puisque son étude permet de mettre en œuvre et de problématiser une très grande part de ce qu'on a appris auparavant : nombres réels, cardinalité, majorations-minorations, passages à la limite, procédés itératifs, phénomènes linéaires, etc. etc. ;

– il s'agit aussi d'un savoir merveilleux sur un plan épistémologique interne aux mathématiques, car son étude approfondie peut être la source d'une ouverture considérable sur le sens de la démarche de l'analyse : on peut vraiment observer là comment le mathématicien, après avoir introduit l'infini pour mieux penser certains problèmes, doit travailler à définir ce dont il parle pour avancer dans la compréhension des problèmes sans être en permanence bloqué par les paradoxes inhérents à toute vision trop simpliste de l'infini ;

– il s'agit enfin d'un savoir merveilleux sur un plan épistémologique externe aux mathématiques, puisque c'est l'exemple même de la richesse des rapports que les mathématiques peuvent entretenir avec les autres sciences, notamment avec la physique où nombre de concepts sont en partie définis, précisés, évalués au moyen d'intégrales.

C'est un problème didactique majeur puisqu'en pratique, même lorsqu'on souhaite ardemment enseigner tout cela, c'est le plus souvent autre chose que l'étudiant apprend.

Pour la majorité de nos interlocuteurs, l'essentiel semble se perdre très rapidement tant au niveau de la compréhention du concept même d'intégrale qu'au niveau de la compréhension de la démarche de l'analyse, et aussi sur le plan de la qualité des rapports entre mathématiques et autres sciences ; pour eux, tout ou presque est "ratatiné", réduit à la partie technique du calcul des primitives.

La problématique des situations nous conduit ici à envisager ce problème didactique majeur sous un jour très différent.

De façon provocatrice, le changement de point de vue peut se stigmatiser de la façon suivante :

* Arrêtons de considérer l'étudiant comme un non scientifique, comme un simple client ou comme un simple consommateur de science :

– d'abord comme un client peu à même

d'apprécier les qualités d'un outil scientifique. En effet, ne sommes-nous pas dans un premier temps en train d'essayer de le séduire par un discours introductif un peu vague sur les qualités de l'intégrale, et ensuite n'effectuons-nous pas trop à sa place tout le travail métaphorique qu'il devrait en fait réaliser lui-même pour se construire des représentations significatives de l'intégrale ? Ne le supposons-nous pas alors juste apte à nous croire sur parole ?

– ensuite comme un spectateur scientifique à qui on montre qu'il y a une belle théorie, devant qui on étale les mécanismes de cette théorie, mais qu'on ne place jamais dans des situations où, pour survivre, il serait indispensable qu'il s'en serve !

** Considérons par contre cet étudiant comme un sujet épistémique à part entière et plaçons-le dans des situations problématiques où, sans faire intervenir des procédures de découpage, de majoration-minoration et de passage à la limite, *i.e.* sans entrer dans une problématique de type intégrale, il ne sera pas possible de trouver d'issue mathématique.

En adoptant cette attitude, nous nous plaçons, nous enseignants, devant la nécessité de découvrir ce qui va s'appeler "une ou des situation(s) fondamentale(s)" dans la théorie des situations.

En résumé, ce que nous pouvons mettre en évidence dès maintenant dans la théorie des situations est que :

cette modélisation conduit à concevoir l'enseignement comme un jeu entre deux partenaires et à deux niveaux, jeu où les protagonistes, élèves et professeur, jouent effectivement lorsque c'est essentiellement une rationalité de type mathématicienne qui motive leurs investigations, guide leurs choix et leurs actions, l'emporte en cas de litige ou de contradiction sur les autres considérations (affectives, sociales, scolaires, etc.) ; jeu auquel ces différents partenaires gagnent ou perdent simultanément :

– ils perdent, si les élèves ne se heurtent pas aux difficultés scientifiques que le professeur voulait faire apparaître par le biais des situations qu'il organise, par exemple :

* le professeur n'arrive pas à faire la dévolution de son problème ; les élèves s'investissent dans d'autres problèmes, partent dans des directions qu'il ne peut exploiter ;

* le professeur n'arrive pas à faire la dévolution aux élèves d'une responsabilité scientifique : ces derniers ne peuvent affronter directement avec leurs seules connaissances la situation, car elle est trop complexe ou délicate pour eux, ils ne peuvent contrôler ni la justesse ni la pertinence de leurs démarches, ou bien encore ils trouvent une solution par phénomène de contrat, *i.e.* ils démasquent les intentions didactiques du professeur, et la solution qu'ils obtiennent ainsi est alors perçue par eux non comme une réponse à un problème scientifique, réponse qu'il faudrait contrôler par la raison, mais comme la réponse attendue qu'il fallait découvrir à travers le jeu des questions posées ;

– ils gagnent par contre, lorsque les élèves, en avançant erratiquement, de façon relativement autonome, vers la découverte d'une solution, entrent dans des problématiques mathématiques de même nature que celles qui ont animé les concepteurs de ces savoirs ; ils donnent à la situation et aux éléments de savoir qui émergent des significations ad hoc suffisamment fortes pour ne pas être balayées ultérieurement par l'introduction des formalismes et des techniques.

Ce jeu se situe à deux niveaux, en ce sens que professeur et élèves, tout en étant essentiellement "mathématiciens", ne doivent pas perdre de vue "qu'on est là pour apprendre des mathématiques en les pratiquant".

Professeur et élèves doivent donc en permanence entretenir la connivence : le vrai problème que l'on "résoud" n'est peut-être pas celui qui est matériellement traité, mais plutôt le système des problèmes analogues ; le vrai savoir que l'on "apprend", que l'on devra retenir, est moins la solution exhibée dans ce problème précis que la démarche mathématique que l'on a été amené à effectuer (les questions qu'on a dû se poser pour avancer, les intuitions qui ont conduit à des impasses, les intuitions et méthodes qui nous ont permis d'en sortir, de pressentir les erreurs et de les corriger, les procédures qui ont débouché sur des solutions, etc.).

C'est donc un savoir très global, à la fois très théorique et très contextualisé qui naît, prend sens, s'actualise dans l'étude problématisée de cas particuliers : de ce va-et-vient permanent entre théorie et pratique, on attend que se constituent chez l'élève des connaissances beaucoup plus profondes, beaucoup plus transférables d'une situation à l'autre, beaucoup plus mobilisables dans l'action.

Première approche du modèle anthropologique

Dans la théorie des situations, le jeu de l'élève (du maître) est essentiellement un jeu "contre la nature", puisque le sujet épistémique se bat pour comprendre ce qui marche et pourquoi ; dans le modèle anthropologique proposé par Yves Chevallard, le jeu de l'élève (du professeur) devient plus social, c'est celui du sujet placé dans une micro-société, l'école, sujet qui doit tenir une place, remplir un rôle dans cette institution école totalement organisée autour des deux actions qui la fondent, enseigner et apprendre.

– Le savoir problématique de la théorie des situations (*i.e.* le savoir vu comme le résultat du travail de l'homme pour s'adapter à la complexité) fait maintenant place à un savoir plus institutionnel ; le savoir est alors ce qui est reconnu comme valide par l'institution qui enseigne, c'est... ce qu'il faut savoir !

– Le sujet épistémique de la théorie des situations (élève ou maître), ce sujet essentiellement rationnel qui se laisse guider par la sémantique des problèmes, s'efface dans ce modèle devant le sujet scolaire ou scolêtre, c'est-à-dire cette personne assujettie aux lois de l'institution dans laquelle il travaille.

Dans le modèle anthropologique, on regarde donc ce qui se produit ou peut se produire quand ce qui oriente principalement la compréhension des mathématiques des uns et des autres, ce qui guide les actions pour enseigner et apprendre, est moins le jeu scientifique qui peut s'instaurer entre savoir et problèmes que l'interaction de l'élève et du maître avec un savoir découpé suivant un programme, savoir qu'ils doivent parcourir ensemble dans le cadre d'une institution d'enseignement : le savoir est alors vu par les uns et les autres comme ce qu'il faut savoir d'une certaine façon.

On oublie donc ici volontairement l'aspect psychologique global de la personne humaine élève (ou maître) et l'épistémé n'est pas ce qui est supposé gouverner principalement les actions des uns et des autres. Cette réduction drastique permet de mieux dégager les rôles finement spécifiés que sont amenés à tenir maître, élèves et savoirs quand ils sont institutionnellement liés ; chacun "obéit" alors dans cette relation aux règles d'un contrat essentiellement implicite, le contrat didactique, contrat qui se noue au fil des années entre les acteurs des différentes institutions d'enseignement.

C'est ainsi que cette modélisation permet de mettre en exergue le phénomène de transposition didactique qui est à l'Ïuvre dans tout acte d'enseignement, transposition incontournable en ce sens que personne ne peut enseigner ce qu'il sait comme il le sait. De fait, tout professeur, qu'il soit ou non auteur de ce qu'il enseigne, le transforme pour que cela soit "plus clair", plus logique, plus simple, "plus compréhensible", "mieux dit", etc. !

Paradoxalement, cette transposition aux intentions louables (toutes ces transformations sont réalisées en principe pour aider l'élève) peut, par une suite d'adaptations subrepticement effectuées, mais rarement épistémologiquement contrôlées au niveau du sens global qu'elles induisent, aller à l'encontre même du projet initial (permettre à l'élève de mieux comprendre), c'est-à-dire que le savoir tel qu'il est enseigné (celui auquel l'élève peut donner sens par ce qu'il entend et fait en classe) peut s'écarter énormément, voire dans certains cas devenir totalement opposé, au niveau du sens, au savoir initialement désigné comme à enseigner.

En un certain sens, cette modélisation nous permet de mieux analyser de quelle façon l'institution école a tendance, comme toutes les institutions, à détourner au profit de son propre fonctionnement les actes qui s'accomplissent en son sein.

Complémentarité et opposition des deux modélisations précédentes

Si on se met à penser les deux modélisations précédentes dans une perspective d'enseignement, elles sont tellement différentes au niveau de leurs hypothèses de départ qu'elles peuvent apparaître comme totalement contradictoires :

– la théorie des situations semble parfois vouloir ignorer les lois du didactique (en particulier les phénomènes de dégénérescence épistémologique liés à la transposition didactique) mises en évidence dans la théorie anthropologique ;

– symétriquement, la théorie anthropologique semble vouer systématiquement à l'échec l'entreprise des situations fondamentales : l'ingénierie des situations ne peut pas fonctionner de façon durable dans ce second modèle tant elle y est écologiquement non viable.

Toutefois, il me semble qu'on peut avantageusement sortir de cette contradiction si l'on se rappelle que dans la réalité le sujet épistémique et le scolêtre sont potentiellement présents dans chacun de nos élèves ou de nos étudiants, voire dans le mathématicien-maître que nous sommes quand nous devenons professeur ; il devient alors extrêmement précieux de pouvoir s'appuyer complémentairement sur chacune de ces deux théories pour analyser et conduire un enseignement donné.

En effet, ce n'est que lorsqu'on regarde froidement toutes les contraintes qui pèsent institutionnellement sur un enseignement que l'on peut rationnellement envisager de modifier sa pédagogie de façon à ce qu'il ne soit pas totalement utopique et dérisoire de vouloir faire "fonctionner" le cours comme si nos interlocuteurs pouvaient se comporter comme les sujets épistémiques de la théorie des situations, c'est-à-dire comme si on était en présence d'élèves avec lesquels il est pertinent de miser à plein sur un jeu franchement scientifique, finalement comme... s'il n'était pas totalement déraisonnable de vouloir *faire des mathématiques* en cours de mathématiques.

En pratique, comment exploiter ce double regard sur les problèmes d'enseignement

Pour ne pas rester dans le vague, prenons pour premier exemple un événement qui se répète très souvent dans un cours de mathématiques, celui où nous exhortons nos élèves en leur disant : "réfléchissez bien !" (et en mathématiques, nous passons notre temps à réclamer à nos interlocuteurs d'adopter cette attitude).

Spontanément, le message que nous envoyons à nos interlocuteurs nous paraît à ce moment-là totalement transparent ; à l'aune des deux modèles précédents, nous pouvons soupçonner que ce message peut, en fonction des élèves à qui nous nous adressons, ne pas avoir la clarté que nous lui prêtons, et qu'il peut même enjoindre certains d'entre eux d'adopter une attitude diamétralement opposée à celle à laquelle nous pensions les convier, car, suivant que notre élève se gère lui-même comme le sujet épistémique de la théorie des situations (ce qui est implicitement entendu quand nous clamons que pour faire des mathématiques il faut bien réfléchir) ou qu'il est devenu le scolêtre de la théorie anthropologique, il va entendre une chose ou son contraire.

En effet, pour que notre élève entende bien notre message et lui donne la valeur épistémique que nous lui attribuons, ne faut-il pas d'abord qu'il puisse nous oublier en tant que professeur questionneur ou donneur de conseils ? qu'il oublie l'institution dans laquelle cette question est posée avec ses horaires, ses contrôles, ses notes et ses places, pour ne plus voir que le problème scientifique auquel il est en principe confronté ?

Si, à l'opposé, notre élève est essentiellemnt ce scolêtre qui passe son temps à se questionner sur ce que l'école attend de lui, exige de lui comme comportement externe, notre "réfléchissez bien" ne va-t-il pas être interprété comme signifiant : "s'il me dit de réfléchir, c'est que je me suis trompé ou que je risque de le faire, il y a donc un piège qu'il faut déjouer ! Peut-être veut-il me rappeler qu'il convient d'utiliser ce qu'il vient de nous expliquer ? etc. etc." Ce faisant, notre élève s'engagera bien alors dans une certaine réflexion, mais n'est-ce pas une tout autre réflexion que celle à laquelle nous voulions le convier ? cette autre réflexion ne rend-elle pas la première (la réflexion scientifique) en un certain sens totalement improbable ?

En clair, avoir deux modélisations aussi caricaturales des processus d'enseignement peut nous aider, en tant que professeurs, à mieux savoir ce que nous voulons enseigner véritablement et, lorsque nous envisageons de changer en profondeur nos pratiques de façon à privilégier les prises de sens chez nos interlocuteurs, à mieux cadrer ce que "coûterait" au juste la réalisation de nos projets.

Il faut bien voir que dans le modèle des situations (qui correspond sur bien des points à une sorte de monde idéal dans lequel chaque professeur de mathématiques aimerait se trouver), pour que le gain épistémologique soit substantiel (*i.e.* pour que les pertes de temps importantes qu'occasionne toute démarche erratique d'élaboration de conjectures et de construction de preuves permettent une compréhension auprès de la majorité des élèves justifiant après coup le temps passé), il faut que ces élèves oublient en partie, tout au long de ce processus, qu'ils sont élèves ; il est nécessaire qu'ils ne se soucient pas trop du jeu didactique du professeur pour que ce soit principalement l'induction des situations sur leurs connaissances propres qui les rende capables d'aborder en compréhension un savoir qui leur est ainsi enseigné essentiellement comme clef de problèmes scientifiques.

Cette possibilité pour l'élève de ne pas être en permanence totalement contraint par les lois de l'institution école suppose précisément qu'il ait une grande confiance dans le professionnalisme de son professeur, *i.e.* qu'il sache d'expérience que ce dernier connaît suffisamment bien les mathématiques et maîtrise suffisamment les lois du didactique pour être capable d'organiser des situations problématiques qui soient à la fois riches sur un plan scientifique et adapté au programme et au niveau considérés.

Cette confiance *a priori* (qui doit à chaque cours se rejustifier) de l'élève en son professeur est à mon sens indispensable pour que le sujet épistémique élève qui s'investit dans les problématiques scientifiques que le maître organise, puisse faire taire le scolêtre qui reste toujours chez lui en état d'éveil, prêt à reprendre le dessus pour tuer le jeu scientifique si l'angoisse de ne pas apprendre (re)devient trop forte.

Analyse plus approfondie des hypothèses et des contraintes de ces deux modèles : les notions de temps didactique et de situations fondamentales

Dans la théorie des situations, le temps de l'apprentissage est artificiellement découpé en deux moments bien distincts :

– un premier moment jugé crucial dans ce modèle est celui où l'élève entre en contact pour la première fois avec un élément de savoir consistant ; ce moment-là doit être totalement au service d'une double logique, celle du savoir lui-même et celle du sujet rationnel qui amorce une conceptualisation au travers de l'étude structurée d'un problème,

– une fois les notions fondamentales introduites, une fois les conceptualisations amorcées de façon consciente (l'élève a une idée non superficielle de ce qu'il est en train de cerner, de maîtriser, de connaître), les moments erratiques, problématiques, déstabilisants jugés nécessaires au départ pour faire sens, peuvent être suivis de périodes plus calmes d'approfondissement, de stabilisation, de structuration et d'algorithmisation dans lesquelles les logiques classiques d'apprentissage des mathématiques peuvent redevenir dominantes (il s'agit de la logique de la discipline d'une part – l'enchaînement mathématique – et des logiques d'apprentissage d'autre part – l'entraînement à faire et à répéter des calculs pour gagner en rapidité et en fiabilité, à réexploiter une méthode pour la faire sienne et créer les réflexes intellectuels nécessaires).

Hypothèse d'irréversibilité de l'histoire d'un apprentissage par adaptation et "nécessité" des situations fondamentales

Le premier moment, la première rencontre avec le savoir est en fait ce qui est privilégié dans le modèle des situations, cet instant doit être "extraordinaire" en vertu d'une hypothèse d'irréversibilité didactique : on fait l'hypothèse que c'est dans cette première approche que non seulement s'installe chez l'élève le premier niveau de sens, mais aussi que c'est là que s'inscrivent en grande partie les potentialités d'évolution du sens de ce savoir.

Si notre sujet épistémique a effectivement beaucoup réfléchi et philosophé sur le savoir mis en jeu au cours de ces premières situations, d'autres situations devront et pourront ultérieurement enrichir, compléter ou rectifier les premières visions du savoir qui en seront nées, mais elles ne les remplaceront pas, elles s'inscriront seulement dans le champ des possibles qui se seront dessinés lors de la première rencontre. (On postule que cette première rencontre avec le savoir va laisser une trace indélébile chez le sujet, trace résultant de l'illumination de cette première intelligibilité du problème ou de son opacité totale, de ce premier amour ou de ce premier désamour).

Les deux temps didactiques du modèle anthropologique

A l'inverse, dans la théorie anthropologique où le triplet maître-élève-savoir est regardé dans son assujettissement à l'institution, le temps ne se structure pas du tout de la même façon. On suppose maintenant dans cet éclairage des problèmes d'enseignement que, par nécessité institutionnelle, deux temps se superposent, coexistent parfois sans jamais se rencontrer véritablement : le temps didactique institué par le professeur d'une part – celui qui permet de dire "aujourd'hui nous traitons les fractions" ou "nous passons de la définition de l'intégrale au calcul des primitives", et puis d'autre part, ou plutôt en parallèle, il y a le temps didactique de l'élève ou de l'étudiant qui est formellement synchrone (en tout cas tant que l'élève n'est pas complètement perdu ou ne se révolte pas totalement contre sa position d'élève), *mais qui est fondamentalement autre* et qui échappe pour une grande part au regard et au contrôle du professeur.

Dans ce modèle, non seulement on fait l'hypothèse qu'il n'est pas possible de savoir au fur et à mesure ce que l'élève a compris ou non sur le fond, ce qui fait même qu'il comprend ou ne comprend pas, à quel moment précis se produit la compréhension, quand elle a lieu ou au contraire à quel moment précis se nouent les blocages au niveau du sens, mais on fait même de cette "ignorance" une condition nécessaire au fonctionnement du système didactique : élèves et maître ne peuvent pas échanger en sincérité sur ce niveau, car quelle que soit la méthode pédagogique utilisée, il se produit forcément à certains moments une grande désynchronisation entre le temps institué par le maître et la position de l'élève face à l'avancée du savoir, et dans ce cas il n'est pas dans l'intérêt de leur jeu institutionnel de le laisser apparaître. (Le professeur ne doit pas trop savoir qu'il est très en avance et l'élève qu'il est très en retard, sinon la fiction de leur coopération épistémologique devient insupportable ; or le maintien de cette fiction est institutionnellement nécessaire !)

Le point crucial de la synchronisation ou de la désynchronisation des temps didactiques

Si on regarde bien ce qui vient d'être écrit, on peut constater que c'est au niveau de cette différenciation dans la prise en compte du temps didactique que les deux modélisations se distinguent le plus et vont même à certains moments jusqu'à s'opposer totalement dans ce qu'elles tendent à nous montrer des phénomènes d'enseignement.

En effet, la théorie des situations postule que pour chaque notion mathématique à enseigner à un niveau donné, il existe une situation ou un groupe restreint de situations susceptibles d'introduire assez rapidement la notion en classe dans une véritable dimension épistémologique (*i.e.* des situations dans lesquelles la notion joue pour les élèves le rôle de réponse adaptative optimum).

> ***Lorsqu'un tel groupe de situations fonctionne ainsi dans un contexte donné, on l'appelle "situation (ou groupe de situations) fondamentale(s) pour cette notion".***
> *" Admettons que le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations didactiques qui lui sont proposées (dévolues).*
> *Nous admettrons aussi qu'il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptible de lui donner un sens correct.*
> *Dans certains cas,* ***il existe quelques situations fondamentales accessibles à l'élève au moment voulu.*** *Ces situations fondamentales lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance qui pourra s'insérer, le moment venu, sans modifications radicales, dans la construction de nouvelles connaissances."*
> (Brousseau G., 1986, p. 67)

La fonction de ces situations fondamentales, la fonction de cette première rencontre avec le savoir est donc de réaliser une sorte de mission impossible : arriver à parler de façon significative à l'élève d'une idée qu'il ne peut avoir spontanément (l'idée de nombre, d'équation, d'intégrale, etc.) et qui ne peut s'énoncer significativement dans la logique de la discipline qu'une fois connue, c'est-à-dire lorsqu'elle a déjà pu être énoncée en termes mathématiques et mise en Ïuvre dans du connu.

Il faut donc que ces instants cruciaux permettent au néophyte de travailler des objets de pensée qu'il ne maîtrise pas encore, lui donnent l'occasion d'émettre des conjectures à leur sujet bien qu'il n'en ait pas encore une définition très rigoureuse, et ce, non pour faire semblant, pour faire des grimaces mathématiques, mais au contraire pour que le sujet épistémique parvienne progressivement à délimiter par le travail des mathématiques (la recherche de preuves et de contre-exemples) ce qu'est le savoir mathématique mis en jeu, c'est-à-dire en grande partie à délimiter ce qu'il n'est pas.

On remarquera que cette mission paradoxale peut apparaître comme totalement inconcevable ou absurde (car inutile et vouée à l'échec) à toute personne qui partage de près ou de loin les deux conceptions réductrices de l'élève et de l'enseignement suivantes :

– au niveau de l'élève ou de l'étudiant, imaginer que celui que nous rencontrons effectivement dans nos classes et nos amphis et qui, dans la théorie des situations, devrait aborder en épistémologue les situations fondamentales qu'on lui soumet, n'est pas en réalité "taillé dans le même bois", n'est pas de la même "espèce" que le petit Einstein auquel la théorie des situations semble aller comme un gant ; en d'autres termes, imaginer qu'un élève "normal" ne peut véritablement avoir d'idées scientifiques propres,

– au niveau de l'enseignement, imaginer que le rôle de l'école est bien davantage de transmettre à tous des savoirs de type réponses bien cadrées à des questions bien ciblées que de développer chez le plus grand nombre possible un esprit de recherche, un esprit scientifiquement critique.

Nous reviendrons un peu plus tard sur le réalisme paradoxal et la pertinence effective de la notion de situation fondamentale lorsqu'on se place dans une certaine conception de la démocratie et qu'on envisage une certaine éthique de l'enseignement ; mais avant cela, je vous propose de regarder comment ce problème du "sens initial" est pris en compte dans la modélisation anthropologique du didactique.

Dans cette seconde modélisation, la notion de situation fondamentale est quasi absente non seulement pour des raisons épistémologiques (le savoir qui circule dans la classe n'est pas vu d'abord comme le fruit de l'adaptation de l'homme à des situations problématiques), mais aussi et peut-être surtout pour les raisons institutionnelles que nous avons déjà évoquées et qui structurent le temps didactique de façon diamétralement opposée à celle qui est envisagée dans la modélisation précédente.

Le terrible secret de la transposition didactique

En effet, dans la modélisation anthropologique, non seulement on met en évidence les décalages importants qui s'installent de façon quasi automatique au fur et à mesure que le cours avance, décalages entre l'état du savoir tel qu'il est traité par le professeur (et qui est formellement celui que la classe est supposée travailler à ce moment précis) et les différents états où ce savoir se trouve effectivement manipulé par les élèves, mais en plus on fait maintenant de ce décalage lui-même une nécessité du fonctionnement didactique.

En clair, on pose comme hypothèse fondatrice du modèle anthropologique que le professeur ne peut "faire classe" que s'il est constamment au-dessus et en avance de ses élèves, que s'il maintient en permanence un certain décalage quantitatif et qualitatif entre ce qu'il sait et montre savoir et ce que les élèves savent effectivement et peuvent manifester savoir !

Tel est, comme le dit Y. Chevallard, le terrible secret que révèle le modèle de la transposition didactique ; terrible en ce sens qu'en tant que professeurs, nous avons beaucoup de mal à supporter ce regard sur notre action, car c'est l'image profonde que nous avons de nous-mêmes qui est mise en cause par cette vision.

Regardons donc froidement ce qui se

joue dans ces deux modélisations, non pas pour dire “dans ma classe ce n’est surtout pas comme ceci ou comme cela que ça se passe”, mais plutôt pour essayer de mieux comprendre ce qui est susceptible de “faire marcher” ou ce qui peut “verrouiller” une classe réelle, suivant que telle ou telle composante de ces modélisations devient la composante principale de la classe.

Dans le premier cas, celui des situations, où les élèves sont considérés comme des “épistémologues”, le problème de l’autorité du maître, du pouvoir qu’il doit détenir pour arriver à faire travailler son groupe social d’apprentis sur les objets de savoir du programme, réside quasi totalement sur la valeur épistémique et didactique des situations qu’il met en Ïuvre : si ces situations sont scientifiquement profondes, elles vont permettre aux élèves de se poser les questions fondamentales indispensables pour entrer dans une conceptualisation ad hoc ; si, de plus, ces situations sont bien montées didactiquement, beaucoup d’élèves vont se trouver impliqués dans un jeu scientifique dont l’intérêt sera entretenu par les alternances de doutes et de certitudes, de contradictions et d’harmonie intellectuelle.

L’essentiel de l’autorité de ce maître reposera alors sur sa capacité à relancer le jeu scientifique en problématisant le désordre inhérent aux recherches communes, en faisant rebondir les intuitions mal formulées en conjectures, etc. ; l’harmonie du groupe classe se structurera autour de recherches communes et demeurera forte tant que beaucoup d’élèves se sentiront investis d’avoir à apporter eux-mêmes des réponses scientifiques aux questions que les situations les amènent à se poser.

Ce professeur-là qui base son autorité de maître sur la qualité scientifique du jeu dans lequel il implique ses élèves, n’a donc aucun intérêt à voir s’installer une désynchronisation trop forte entre l’état du savoir qu’il se propose de travailler avec ses élèves et les états réels où chacun de ces derniers parvient à l’issue de son cheminement personnel (extrême difficulté de la synchronisation des états de recherche d’un groupe). Il n’a aucun intérêt à cela parce que, de plus, il n’a pas à redouter que certains de ses élèves ne le rejoignent ou même ne le devancent sur un plan épistémologique au cours du jeu scientifique impulsé et structuré par lui, mais joué par les élèves.

En effet, s’il garde son rôle (structurer et problématiser les interventions des élèves), ce professeur restera toujours le maître : celui qui sait globalement où l’on va et comment y parvenir, celui qui permet de travailler ensemble, d’exploiter les synergies des oppositions et de la diversité, celui qui à terme est capable d’analyser, de recadrer, de synthétiser les propositions des uns et des autres, celui qui fait le lien entre la classe et la communauté scientifique d’une part, la classe et la communauté scolaire de l’autre, bref celui sans lequel la classe ne peut avancer fiablement.

Ce maître-là doit donc tout faire pour que l’ensemble de la classe ou de l’amphi ne soit pas trop loin de lui au niveau du sens, pour que les élèves ne s’écartent pas trop entre eux au niveau des problématiques effectivement partagées : puisqu’en tant que maître en titre et en acte le professeur doit toujours porter son pouvoir, il sait qu’il risque de le perdre si au bout d’un temps la plupart des élèves sont tellement éloignés de lui et entre eux qu’il devient impossible à beaucoup de pratiquer le jeu scientifique nécessaire pour comprendre.

D'où l'importance capitale des situations fondamentales qui ont, entre autres, la fonction de créer, en un même moment pour tous, un premier capital de sens commun à la classe ou à l'amphi.

Il est clair que le professeur ne peut demander longtemps à ses élèves d'assumer l'angoisse du doute et de l'erreur, inhérente à tout travail scientifique, que si ces derniers peuvent individuellement et collectivement arriver à situer assez objectivement leur niveau de compréhension scientifique ; dans le modèle des situations, le temps de l'apprentissage doit donc coïncider en bonne partie avec le temps institué par le professeur, et cela, il ne suffit pas que ce soit hautement affirmé par le professeur, il faut que les élèves puissent le vérifier régulièrement sans que pour autant le cours ne ralentisse trop. (Recherche permanente d'un équilibre paradoxal entre "le trop vite" et "le trop lentement".)

Ce que la théorie anthropologique nous montre de très insupportable à ce sujet, c'est qu'à partir du moment où le professeur ne parvient plus à fonder son autorité sur le constat renouvelé par ses élèves de la valeur scientifique des jeux qu'il leur permet de pratiquer en classe, il est condamné à installer son pouvoir sur des appuis très institutionnels, puisqu'en tant que maître il doit sans cesse porter son pouvoir pour enseigner ; dans ces conditions, il doit donc à tout moment "impressionner" ses élèves, leur montrer qu'il en sait plus et autrement, il faut donc qu'un écart se creuse entre lui et les élèves, et par suite il devient "nécessaire au didactique" que le maître soit toujours "trop" en avance, aille toujours "trop" vite.

On peut ou non être d'accord avec les conséquences de ces deux modélisations du didactique, trouver la première totalement utopique et la seconde absolument révoltante ; le problème n'est pas là, car nous avons convenu que ces modélisations ne sont ni la description de notre classe, ni des modèles à suivre, mais des moyens de réfléchir sur les moyens dont nous disposons pour enseigner et les difficultés que nous risquons de rencontrer dans l'exercice de ce métier.

J'attire seulement l'attention de chacun sur le fait que l'utopie des situations fondamentales est probablement nécessaire à tout apprentissage en profondeur : on peut raisonnablement faire l'hypothèse que le plus souvent les "très bons élèves" sont tels parce que, seuls ou grâce à un soutien externe à l'école, ils parviennent régulièrement à organiser pour eux-mêmes une sorte de jeu fondamental.

Envisager cette utopie comme une réalité plausible permet de concevoir autrement le cours et par suite de le préparer très différemment. De façon symétrique, le "cynisme" à froid de la vision anthropologique, en nous éclairant sur les contraintes de toute entreprise didactique, peut nous aider à mieux identifier le décalage, voire les contradictions entre nos intentions didactiques et nos réalisations ; il peut alors nous permettre de faire des choix en responsabilité qui soient plus en accord avec la déontologie de notre profession.

En fait, la double modélisation précédente nous montre avec une certaine force que lorsque nous ne parvenons pas à amener suffisamment souvent (ou en suffisamment grand nombre) nos élèves ou nos étudiants à être les sujets épistémiques que postule la théorie des situations, lorsque trop de nos interlocuteurs ne peuvent évaluer sur eux-mêmes en quoi l'effort que nous leur demandons pour entrer dans une pensée mathématique leur apporte une ouverture effective sur le monde, les rend capables de penser différemment les problèmes, voire de les résoudre, nous risquons fort en tant que professeurs d'être "condamnés", pour pouvoir continuer à enseigner des mathématiques, à devenir ces sortes de maîtres que, sans doute, nous ne voudrions surtout pas être.

Des maîtres qui, pour garder le pouvoir nécessaire au fonctionnement de la classe ou de l'amphi, doivent soit être suffisamment naïfs pour ne pas se rendre compte du niveau réel de compréhension scientifique de leurs élèves, pour ne pas percevoir le décalage qui se creuse entre eux et leurs élèves, entre les étudiants du premier rang et ceux du fond de l'amphi, soit être froidement cyniques : être de ces professeurs qui savent pertinemment que leurs interlocuteurs ne comprennent pas l'essentiel de ce qu'ils leur enseignent, qui savent qu'ils vont trop vite et qui se disent néanmoins, sans éprouver le moindre trouble : "c'est une bonne chose qu'ils soient"à la rue", cela les empêche de chahuter puisqu'ils ont toujours un demi-tableau de retard", être donc ces professeurs qui savent que la plupart de leurs élèves sont totalement désynchronisés par rapport à la réalité de ce qu'ils enseignent, mais qui sachant tout cela avancent inexorablement, car... c'est ce que la société leur demande implicitement en leur confiant un rôle sélectif, c'est ce qui leur permettra d'être considérés par beaucoup comme de "bons" professeurs, des professeurs "très forts" ou très compétents, des professeurs qui en fin de compte n'ont aucune raison de remettre en question leurs pratiques malgré l'échec patent qu'elles produisent.

Nous serons donc amenés à être plus ou moins volontairement ces maîtres qui enseignent la fiction du sens et qui contribuent, plus ou moins consciemment, à la corruption de la vérité en participant à la comédie humaine ailleurs appelée langue de bois !

Il me semble que cette attitude ne correspond ni à une éthique de responsabilité éducative et de volonté de transmission des valeurs démocratiques essentielles, ni à une épistémologie des mathématiques dont une des fonctions essentielles est précisément, à mon sens, d'élaborer une méthode de travail qui élimine le plus possible les faux-semblants.

Situation ou métaphore fondamentale

Quel que soit notre enthousiasme lors de l'élaboration d'une situation, il me semble indispensable pour ne pas tomber dans le délire didactique de considérer que dans le réel de l'enseignement, aucune situation n'est "fondamentalement effective", *i.e.* aucune situation ne peut à elle seule prendre en charge la totalité de l'induction des préoccupations des élèves vers le savoir, il y a toujours de l'imprévu et de l'imprévisible, et le rôle du professeur est alors de s'adapter à ce qui advient plutôt que de rester figé dans une position prédéterminée inadéquate. Et néanmoins, il me semble *extrêmement fructueux pour analyser un savoir et envisager son enseignement de mener la fiction de la recherche d'une situation fondamentale le plus loin possible dans le modèle.*

Paradoxalement donc, il me semble que pour que le professeur de mathématiques puisse exploiter convenablement dans ses enseignements le concept de situation fondamentale, il faut qu'il envisage l'élucidation ou l'appropriation de ces situations fondamentales plus comme une recherche de mise en évidence de ses intentions épistémologiques profondes, plus comme une tentative explicite de mise en cohérence de ces intentions avec les contraintes de la réalité pédagogique, plus comme une sorte de métaphore de ce qu'il pourrait faire, que comme une activité à mener suivant un plan totalement prédéterminé, que comme une sorte de super-ingénierie faite sur mesure pour introduire sans coup férir telle ou telle notion ou concept.

Pousser métaphoriquement l'étude de "faisabilité" didactique le plus loin possible dans le modèle est une véritable méthode de travail pour le professeur, puisque cette démarche l'amène :

– d'abord à identifier son véritable projet de savoir (quelles sont les idées directrices, les résultats majeurs, les techniques nouvelles qu'il veut faire émerger au cours de l'étude de ce savoir et qui devraient laisser des traces à long terme chez une majorité de ses élèves ?), projet de savoir qui, lorsqu'il n'est pas mis en exergue dès le départ, a tendance à se dissoudre dans les idées et techniques intermédiaires nécessaires pour que le cours "tienne debout",

– ensuite à faire l'analyse épistémologique des choix auxquels il devra nécessairement se résoudre s'il veut effectivement enseigner ce qu'il considère comme l'essentiel ; il devra alors hiérarchiser ses priorités en tenant mieux compte des effets d'effacement des problématiques et d'aplatissement du sens inhérents à tout exposé dans lequel on introduit les concepts et on établit les résultats en ayant en toile de fond les préoccupations didactico-mathématiques classiques (respect de la logique de la discipline, souci de ne pas aller contre la logique des examens et concours, obligation démocratique de ne pas se laisser embarquer dans un niveau de complexité rédhibitoire pour presque tous les élèves).

Il n'est donc pas question d'envisager que cette étude fondamentale puisse dispenser le professeur de faire en situation l'analyse des conditions psychologiques et sociales qui lui permettront ou non d'inscrire son projet fondamental dans l'histoire présente de la classe et de ses sujets, pas plus qu'elle ne *dispensera ce professeur d'exercer dans sa classe un réel professionnalisme pédagogique (s'adapter aux réactions des élèves, inventer les relances et les déblocages nécessaires quand la situation "se grippe", etc.).*

Toutefois, ce dont je peux témoigner, c'est que lorsque l'analyse fondamentale a été poussée assez loin, la contingence inévitable de l'action de la classe peut le plus souvent se réorganiser dans de bonnes conditions autour d'un fil conducteur, la contingence des événements particuliers peut entrer dans la nécessité qu'a fait apparaître l'analyse initiale ; face à une difficulté imprévue, le professeur n'est donc plus condamné à reprendre à son compte (comme cela se passe habituellement pour que "ça marche coûte que coûte") toute la responsabilité scientifique du déroulement de la situation.

Sans analyse fondamentale, le professeur surpris peut malgré lui rompre d'un coup le contrat de travail scientifique établi avec ses élèves en se remettant brutalement à porter des jugements sur tout, sans nuances et sans respect de l'implication personnelle des sujets scientifiques : il déclare ceci bon, cela mauvais, ceci intéressant ou pertinent, et cela non, il fait toutes les propositions et les démontre instantanément lui-même avec ses arguments et à son rythme.

Grâce au fil conducteur épistémologique dégagé par l'analyse fondamentale, le professeur peut plus facilement éviter que la situation ne se bloque définitivement, il peut donc localement réorganiser le travail de la classe sans pour autant "tuer" le sens principal de l'action de réflexion qu'il avait suscitée chez ses interlocuteurs. (On pourra trouver des illustrations de ce propos dans les études de la situation fondamentale du pétrolier faites par H. Di Martino (1992) et D. Pintard (1992).)

C'est pourquoi je défends ici la thèse paradoxale :

Même lorsqu'on ne trouve aucune situation susceptible de faire entrer immédiatement les élèves au cœur d'une problématique scientifique et ce de façon suffisamment large et durable pour que la conceptualisation qui s'amorce puisse se poursuivre dans les différentes dimensions que ce concept doit couvrir, et même lorsque cela paraît illusoire d'espérer y parvenir dans les conditions actuelles d'enseignement, la problématique de recherche de situations fondamentales vues comme métaphores d'enseignement demeure consistante pour la recherche en didactique comme pour l'enseignement.

Cette thèse est paradoxale en ce sens qu'elle a l'air de nous inviter à (re)découvrir la pierre philosophale ; en fait, sa signification profonde est plutôt à chercher métaphoriquement du côté de la fable du laboureur de La Fontaine.

En d'autres termes, en cherchant avec obstination à construire des situations fondamentales "introuvables", et en ne se préoccupant pas pour ce faire de prendre en compte toute la contingence matérielle et sociale de la classe (problèmes de discipline, d'efforts demandés à la classe, d'horaires, de programmes, de devoirs surveillés, etc., etc.), non seulement on est amené à parcourir les méandres du sens par lesquels nos élèves ou nos étudiants doivent impérativement passer pour comprendre, on est conduit à buter à nouveau sur les obstacles fondamentaux que l'on a appris à dépasser ou à contourner depuis si longtemps qu'on ne les voit plus, mais encore et surtout on est contraint à faire ce parcours épistémologique dans une vision pédagogique très pragmatique :

– quelle mise en scène peut amener mes élèves (qui n'ont pas ma culture et qui ne savent pas, comme je le sais, où l'on veut en venir) à se poser des questions scientifiques analogues à celles que je me pose maintenant ?
– si je suis obligé de convenir que mes interlocuteurs ne peuvent pas se poser spontanément ces questions cruciales pour la compréhension, comment faire pour ne pas être amené à leur découper et mâcher le travail jusqu'au point où, en vertu du contrat didactique, ils n'auront plus de problème scientifique à résoudre ?
– comment, à l'inverse, ne pas laisser mes élèves ou mes étudiants partir dans n'importe quelle direction au risque qu'ils ne se trouvent brutalement face à trop d'obstacles simultanément réunis, ou qu'ils ne se dispersent au niveau de leur questionnement individuel à un point tel qu'aucun travail en commun ne soit plus possible dans la classe ou dans l'amphi ?

Un choix épistémologique crucial associé à la problématique des situations

Lorsque Guy Brousseau écrit :

"... Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées : il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage.

Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie faux ou inadéquat.

... Le professeur a le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier."

(Brousseau G., 1986, pp. 67-68)

il est à mon sens parfaitement conscient de l'extrême difficulté que représente la problématique des situations fondamentales pour le professeur ; mais on constate que sa modélisation le conduit à se poser la question déontologique fondamentale : doit-on en priorité enseigner un savoir formellement juste, mais éventuellement dénué de sens pour beaucoup d'élèves, ou doit-on se résoudre à travailler avec les élèves un savoir en partie faux (à cause de sa portée trop locale), mais suffisamment vrai et significatif pour que l'élève s'en saisisse et puisse le faire évoluer au fil des années, non pas en chassant et oubliant ce qu'il a appris d'une année sur l'autre, mais en réaménageant ses connaissances en fonction des exemples et contre-exemples rencontrés.

La recherche de situations fondamentales nous oblige à nous poser cette question concept par concept, car l'analyse fondamentale de tout savoir mathématique consistant nous montre assez radicalement qu'on ne peut espérer avoir immédiatement sens et rigueur en mathématiques.

Les paris nécessaires :

Vu le prix que représente l'entrée dans une problématique de recherche de situations fondamentales et vu le coût de l'utilisation en classe d'un dispositif constructiviste (dispositif implicitement nécessaire pour que l'induction de la situation sur la connaissance puisse s'exercer), la théorie des situations ne peut satisfaire aux conditions écologiques minimales de tout enseignement durable que si on peut l'asseoir sur le double pari ou postulat suivant :

– par une telle problématisation du savoir, beaucoup d'élèves peuvent atteindre la dimension proprement scientifique des savoirs qui leur sont enseignés,
– dans une didactique plus énonciative, moins problématique, beaucoup d'élèves (notamment ceux qui ne sont pas culturellement préparés à entrer dans une vision scientifique de la réalité) ne peuvent aller au delà de la surface des choses.

Il ne s'agit pas d'une vision manichéenne de l'enseignement (la théorie des situations ou rien), mais il est clair qu'une telle théorie est incompatible (parce que toute réalisation pratique s'inspirant de ce modèle devient alors écologiquement improbable) avec les hypothèses classiques du modèle empirique (à savoir que la réussite d'un enseignement repose principalement sur la clarté du cours, les dons et l'assiduité des élèves, lesquels, lorsqu'ils effectuent un solide travail d'apprentissage par imitation et répétition, finissent toujours par comprendre et maîtriser l'essentiel des savoirs qui leur sont ainsi enseignés).

Complémentarité et opposition de ces théories dans une analyse du didactique conduisant à des décisions d'enseignement

Quand on ne se préoccupe pas de la portée philosophique ni sociale des théories didactiques et qu'on les regarde uniquement comme des techniques pour analyser et structurer un réel complexe (le didactique), on peut dire que le paradigme anthropologique et le paradigme des situations se complètent souvent de façon remarquable ; mais, comme en matière d'enseignement, on ne peut imaginer que des modèles théoriques puissent longtemps se développer, voire s'enseigner, sans rétroagir sur le réel modélisé, il nous faut aussi analyser la nature de cette rétroaction.

Au niveau des prises de décisions pédagogiques, il m'apparaît deux façons bien différentes de considérer les paradigmes précédents comme complémentaires :

– Ou bien la théorie anthropologique est considérée comme la théorie organisatrice globale, et les autres théories deviennent alors des théories locales qui permettent de modéliser certains moments particuliers de l'anthropologie didactique des savoirs.

– Ou bien, inversement, on part du paradigme des situations comme base de l'organisation globale d'un enseignement, la théorie anthropologique devient alors une théorie qui permet l'analyse de l'ajustement entre les intentions et les réalisations effectives.

Je prétends que l'ordre dans lequel on prend les choses est loin d'être indifférent en ce sens qu'à partir d'une même réalité d'enseignement, les analyses que l'on fait sur ce qui s'est produit et les décisions qu'on est amené à prendre pour rectifier ce qui ne va pas peuvent être assez radicalement différentes en fonction du choix théorique directeur.

Confrontation des deux paradigmes sur un exemple

Partons du savoir S, factorisation canonique du trinôme en classe de première, *i.e.* de la transformation de l'écriture de la somme $ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, en un produit $a.(x - x').(x - x'')$ quand c'est possible.

Mathématiquement, ce problème se décompose en l'introduction d'une procédure P et l'obtention d'une technique T.

J'écris l'intentionnalité de la procédure P de la façon suivante :

* *forcer l'écriture* du carré $(x + b/2a)^2$ et *corriger* le surplus introduit,
* *pour faire apparaître* si possible la différence de deux carrés,
* *afin de transformer cette somme en produit* de deux facteurs du premier degré
* transformation qui :
– lorsqu'elle est impossible à effectuer, montre que ce problème n'a certainement pas de solution dans R,

– lorsqu'elle réussit, ramène l'équation complexe "$ax^2 + bx + c = 0$" à la résolution de deux équations triviales $x - x' = 0$ et $x - x'' = 0$!

Cette procédure fournit une technique de calcul T

T : " Lorsque la quantité $\Delta = b^2 - 4a.c$ est positive, le trinome $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ a deux racines réelles x' et x" données par les formules :

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2.a} \text{ et } x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2.a}. \text{ "}$$

Dans les classes, on observe principalement deux stratégies d'enseignement à ce sujet :

I) Après avoir utilisé la procédure P pour établir T, on oublie plus ou moins cette procédure pour ne faire vivre dans la classe que la technique T.
II) Après avoir montré ou rappelé la procédure P, on tente de la faire vivre dans la classe. Pour cela, le plus souvent, on restreint l'usage direct de la technique T seule.

Pour illustrer mon propos je reprends ici le récit d'Alain Mercier (1994, p. 258), qui décrit le cas de Joëlle, devenue subitement mauvaise élève en classe de Première, alors que ses résultats en mathématiques étaient honorables auparavant.

Visiblement Joëlle n'a pas compris la philosophie de la procédure P ; plus grave, elle n'a pas vu qu'il y avait quelque chose à comprendre et à apprendre au niveau du sens de cette démarche.

En fait, son professeur de Première n'a pas fait de cours proprement dit sur ce point, elle s'est contentée de faire quelques rappels rapides en début d'année comme s'il s'agissait de faits triviaux bien connus ; Joëlle s'est donc contentée de se remémorer la technique T.

Comme ce professeur a néanmoins choisi la deuxième stratégie d'enseignement (faire vivre en classe la procédure P), Joëlle échoue régulièrement en algèbre, mais aussi en géométrie, par exemple avec la recherche du centre d'un cercle donné par son équation cartésienne ; par suite, elle se sent traquée et poursuivie par cette factorisation canonique que son professeur s'ingénie à placer dans les problèmes et interrogations en lui "interdisant" de se servir de la technique T.

Alain Mercier, dans son analyse, qualifie le procédé utilisé par ce professeur de "création d'ignorance didactique".

> *"L'intervention de la factorisation du trinôme est, à l'évidence, le moyen privilégié de ce professeur pour* **recréer systématiquement de l'ignorance à propos du travail algébrique** *: pour montrer aux élèves de la classe qu'il y a encore "quelque chose à apprendre, sur la question de la factorisation des polynômes et de ses usages".*
> *De ce fait, ce professeur fait vivre le plus longtemps possible une technique relative à des objets dont la théorie n'apparaît pourtant pas comme un savoir essentiel dans le programme de la classe de Première."* (Mercier A., 1994, p. 261)

Alain Mercier analyse alors l'échec répété de Joëlle sur ce point comme une sorte de malentendu entre l'élève et son professeur : le professeur crée de l'ignorance didactique sur la procédure classique P (appelée technique par Alain Mercier) en suscitant des débuts de situations a-didactiques (des problèmes où il faudrait, pour avancer, utiliser la factorisation canonique), afin que Joëlle, rencontrant son ignorance à ce sujet, se décide à *"prendre le temps d'apprendre à maîtriser enfin cette technique."*

Comme Joëlle est aux abois, à chaque fois qu'elle bute sur ces échecs provoqués, elle considère qu'il s'agit en fait d'un savoir passé et trop local pour qu'il vaille la peine de lui consacrer le temps d'apprentissage nécessaire. (Elle refuse, ou elle se trouve dans l'impossibilité "de prendre le temps d'apprendre à maîtriser enfin cette technique", comme le suggère A. Mercier).

Je ne conteste pas cette lecture des faits rapportés, lecture qui en un certain sens est dans le droit fil de la modélisation anthropologique et qui est éclairante ; *je veux simplement montrer maintenant que si on se place initialement dans la perspective de la théorie des situations, i.e.* si à propos du savoir S : "factorisation canonique du trinôme" mis en jeu dans la relation didactique étudiée, on regarde d'abord quelles peuvent être les significations majeures de ce savoir à ce niveau d'enseignement, et en conséquence en quoi les moyens didactiques mis en Îuvre par le professeur ont ou non vocation à permettre une sorte de contact direct du sujet épistémique avec ces significations majeures, *on peut avoir une tout autre lecture des événements qui nous sont rapportés.*

Derrière la factorisation canonique du trinôme, vue ici par Alain Mercier comme une technique mathématique parmi d'autres et analysée du point de vue anthropologique comme un procédé didactique utilisé par le professeur pour créer de l'ignorance, maintenir une distance, désigner un travail à faire, etc., j'aperçois personnellement dans la perspective des situations le moment crucial d'un formidable saut épistémologique : l'occasion pour les élèves de Seconde-Première d'effectuer une rencontre décisive avec ce que l'algébrique peut leur apporter de véritablement novateur à ce niveau par rapport aux activités de "structuration, d'automatisation, de mise en mémoire des démarches de l'arithmétique" qu'ils ont appris à effectuer les années précédentes en abordant le calcul littéral et les équations du premier degré.

En effet, toutes les manipulations algébriques que les élèves ont eu à exercer jusque là pour résoudre des problèmes, ont essentiellement porté sur des phénomènes linéaires et n'ont donc jamais présenté de ruptures au cours du traitement (une fois l'équation posée, l'algorithme conduit sans discontinuité au résultat) ; l'algèbre a essentiellement consisté pour eux à organiser, systématiser, mécaniser une certaine logique de l'induction automatique, et il semble que beaucoup d'élèves studieux réussissent très bien dans ce travail de systématisation, précisément parce qu'il ne présente pas de rupture, en un sens il reste en totale continuité avec ce qu'ils font assez naturellement.

Avec la procédure P apparaît une nouvelle pensée mathématicienne, une pensée quasi révolutionnaire en ce sens qu'elle aborde un obstacle infranchissable avec le seul "bon sens" de la pensée naturelle :

– quand on écrit *"si $3x + 4 = 5$, alors $3x = 5 - 4$, donc $x = 1/3$"* ou quand on effectue le produit $(a + b)(a - b)$ et que l'on obtient $a^2 - b^2$ après élimination des doubles produits, c'est-à-dire quand on lit de gauche à droite l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, on reste (au delà de toutes les difficultés qu'il faut surmonter pour manipuler convenablement un tel symbolisme) dans un registre de pensée ordinaire, en ce sens qu'on applique des règles systématiques qui ne peuvent échouer si on les respecte, on fait de l'algébrique comme une sorte de mécanisation de la pensée naturelle (la plupart des élèves pensent d'ailleurs que l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ est remarquable et à apprendre parce que cela fait "gagner du temps", cela évite des erreurs de calcul !)

– par contre, quand on réalise que cette identité est réversible et que, lue de droite à gauche, elle nous confère le pouvoir de transformer une somme en produit, **on marque,** le jour où l'on provoque soi-même ce type de transformation afin d'obtenir un résultat inaccessible directement (procédure P), **un changement radical de registre épistémologique.**

Ce changement nécessite une rupture dans la façon de penser les problèmes, rupture que ne provoquent pas les très nombreux exercices de factorisation que les élèves ont à effectuer dès la classe de 4ème, puisque ces exercices sont en général totalement déproblématisés ; cette rupture ne peut véritablement se produire, à mon sens, que le jour où ce retournement des choses devient la connaissance optimale pour résoudre un vrai problème.

Ainsi la résolution des équations du second degré, qui se traite dans une continuité totale des pratiques antérieures si le professeur choisit la pratique I) (*i.e.* exige seulement les formules donnant les racines), peut aussi être l'occasion de marquer une formidable avancée épistémologique si on l'utilise pour provoquer chez l'élève une rupture dans sa façon d'envisager la résolution d'un problème.

En effet, une fois que l'élève a compris (ce qui n'a rien d'évident) qu'une équation est un moyen pour savoir si un problème a des solutions et lesquelles, il lui faut, pour acquérir un véritable savoir mathématique sur la résolution des équations, réaliser deux faits :

a) que ce qu'il faisait jusqu'ici pour résoudre les équations linéaires était en un sens tellement simple et "naturel" qu'il pouvait presque le réaliser sans vraiment le penser : pour "connaître x" dans une relation linéaire, il n'y a qu'à l'isoler, et pour cela, le "bon sens" un peu travaillé et l'usage méthodique des règles de calcul suffisent largement ;
b) que cette méthode d'isolement de la variable n'est ni nécessaire ni toujours possible hors des relations linéaires.

La rupture consiste ici à prendre conscience qu'une procédure de résolution tellement triviale qu'elle ne nécessite plus au bout d'un certain temps d'être pensée profondément pour être utilisée efficacement, peut d'un coup devenir totalement inopérante si on modifie quelque peu le problème : "tirer directement x" dans une expression où figurent significativement des x et des x^2 est un problème apparemment insoluble, aucun des raisonnements de simple "bon sens" utilisés jusqu'ici, aucune règle de simple calcul ne permet "d'isoler directement x" (*i.e.* de sortir du cercle infernal : "pour connaître x, il faudrait connaître x^2 et vice-versa").

La procédure P apparaît alors comme un excellent paradigme de cette révolution d'esprit que permet le formalisme algébrique. En effet, devant ce mur pour la pensée naturelle que représente la résolution des équations du second degré (impossibilité de "connaître directement x" parce qu'impossibilité d'effectuer les calculs comme ils se présentent) :

– *on se met à forcer la nature tout en la respectant* (on fait apparaître la différence de deux carrés en rectifiant l'erreur introduite),

– et on opère ainsi non par magie, mais parce *qu'on a un projet philosophique que l'on mène sous contrôle scientifique* : "on veut transformer, sans jamais changer sa valeur, une expression du second degré qu'on a reconnue comme totalement opaque et inaccessible aux investigations de la seule pensée "naturelle" pour la ramener à du premier degré, parce qu'on sait que là se trouve le domaine de prédilection de cette pensée" (on essaye de placer une réalité complexe du second degré dans un modèle linéaire où l'on sait traiter le problème des équations),

– *comme on ne veut pas prendre ses désirs pour des réalités*, on corrige ce que l'on a rajouté, et on remplace une expression dont la forme nous dérange par une autre dont la forme nous convient mieux, tout en prenant garde de ne pas transformer sa valeur (on utilise pour cela les identités que l'on a antérieurement remarquées comme telles).

A mon sens, la résolution des équations du second degré ne pourra être l'occasion d'un saut épistémologique qu'auprès des élèves qui auront pris conscience qu'ici, pour avancer, il faut avoir initialement *remarqué* trois choses :

– on sait isoler trivialement la variable quand elle figure dans des sommes du premier degré et on ne sait plus le faire en général quand elle y figure à plusieurs degrés,

– pour qu'un produit de nombres soit nul, il faut et il suffit que l'un au moins des facteurs le soit,

– l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, lue de droite à gauche, permet de transformer des sommes du second degré en produits du premier.

Effectuer ces observations et les coordonner fait passer l'algébrique sur un registre épistémologique qui est en rupture totale avec ce que la plupart des élèves, et probablement Joëlle, ont appris à faire jusqu'à ce jour : *il ne suffit plus pour résoudre un problème de plaquer un modèle tout fait sur une réalité donnée, il faut par contre transformer la réalité sans la trahir pour la placer dans un modèle où l'on sait traiter le problème transposé.*

A mon sens, ce passage représente donc une formidable occasion de faire effectuer aux élèves de second cycle un saut épistémologique fondamental, un de ces moments privilégiés où l'enseignement des mathématiques peut conférer au sujet-élève les attributs d'une véritable culture scientifique, changer radicalement le regard du sujet sur lui-même et sur les problèmes : demain, s'il a compris la philosophie de cette démarche, peut-être s'accordera-t-il davantage le droit d'aborder par lui-même des problèmes apparemment inaccessibles au simple "bon sens" ?

Partant de cette analyse épistémologique et sociale du savoir S, les faits rapportés par Alain Mercier me conduisent à faire l'hypothèse que le professeur de Joëlle ne connaît peut-être ni la théorie anthropologique ni la théorie des situations, mais qu'en tant que mathématicienne elle mesure l'épaisseur épistémologique de la procédure P, elle a probablement ressenti sur elle-même qu'il y avait derrière cette banale technique de factorisation canonique quelque chose de tout à fait particulier, de tout à fait fondamental, mais qu'elle ne peut nommer en tant que tel puisque cela ne figure ni dans le vocabulaire du mathématicien, ni dans l'énoncé des programmes ou dans leurs commentaires.

Alors ce professeur traite d'abord ce savoir qui n'est pas officiellement dans son programme, comme un savoir vieux, comme allant de soi, comme une technique sans philosophie ni problèmes, puis, comme elle sait que les élèves ne savent pas faire cela et qu'elle pressent le pouvoir paradigmatique de cette procédure, elle l'impose comme un passage obligé à chaque fois que l'occasion se présente, et ce par les moyens didactiques les plus frustes, non pour créer de l'ignorance à des fins a-didactiques, voire sadiques, mais pour forcer directement un apprentissage de nature épistémologique qu'elle ressent comme essentiel sans se donner le droit de l'enseigner en tant que tel.

Sur un plan pratique, si je devais collaborer avec ce professeur

– *Partant de la théorie anthropologique*, il me semble que nous aurions à comprendre que les situations a-didactiques, par lesquelles on crée de l'ignorance afin que les élèves apprennent ce qui est au programme, doivent être adaptées aux élèves auxquels on s'adresse ; je soulèverais alors, comme le fait A. Mercier, le problème posé ici par l'absence d'un cours à propos du travail algébrique *"la théorie s'y exposerait, le temps didactique progresserait avec l'exposé et cela justifierait une succession d'exercices où les techniques du travail algébrique seraient mises à l'épreuve."*

– *Partant de la théorie des situations*, il me semble que notre premier travail consisterait par contre à faire ressortir de façon explicite l'épaisseur épistémologique que nous pressentons derrière cette procédure canonique P, et si nous convenions qu'il est très important de faire partager cette nouvelle vision aux élèves, il nous faudrait dans un deuxième temps construire une situation fondamentale susceptible de faire entrer les élèves dans notre problématique, *i.e.* susceptible de faire vivre la procédure P de façon suffisamment pertinente, durable et métaphorique dans la classe pour que la majorité des élèves, et non pas seulement quelques-uns, voient progressivement se dessiner là, d'abord un nouveau paradigme de traitement des problèmes algébriques, puis dans un deuxième temps un paradigme assez général du traitement mathématique de la complexité.

Tout cela ayant pour but d'amener l'élève à mieux comprendre d'une part comment les mathématiques interviennent spécifiquement dans la résolution des problèmes complexes, et d'autre part ce qu'est l'univers du mathématicien. Le travail paradigmatique sur cette procédure devrait alors permettre au sujet global de mieux saisir ce qu'il peut "faire des mathématiques" pour faire des mathématiques ou... pour faire autre chose, et de mieux ressentir s'il souhaite par goût s'investir davantage dans l'étude de cette discipline... ou au contraire limiter cet apprentissage au strict nécessaire !

Théories didactiques et problèmes éthiques

Au travers des différents choix que le professeur est amené à effectuer pour construire son cours, se dessinent des problèmes d'ordre éthique que l'on ne peut feindre d'ignorer sans nier simultanément le besoin de cohérence globale indispensable au professeur et à ses élèves pour pouvoir exercer sereinement leurs métiers réciproques.

De fait, la didactique et l'éthique ne peuvent être pensées l'une sans l'autre : *a priori* une théorie didactique, comme tout modèle scientifique, ne se soucie pas du bien ou du mal, de ce qui est bon ou mauvais pour l'homme ou pour la société, ce n'est en principe qu'un élément de savoir objectif qui devrait nous permettre une meilleure intelligibilité de la réalité enseignement.

En pratique nous savons qu'il n'en est rien, car lorsque l'homme crée une théorie pour analyser sa réalité, il la modifie de fait ; puisqu'influencé par ce que lui montre son modèle, il agit différemment dans le réel.

Par exemple, je trouve que la théorie anthropologique a l'immense avantage de nous dénaïver en mettant en évidence les multiples raisons qui dans un contexte donné vont s'opposer à toute organisation pédagogique qui (s'inspirant ou non de la théorie des situations) visera la constitution de plus de sens auprès de l'ensemble des élèves, et dans certains cas provoqueront leur échec total.

Ce savoir didactique "décapant" peut être extrêmement efficace dans la mesure où il nous aide à faire l'économie de rénovations coûteuses et mal cadrées dans l'écologie des savoirs, transformations coûteuses qui, passée l'euphorie du changement, s'avèrent souvent après coup tellement décevantes qu'on devient, après avoir été l'apôtre de la rénovation, l'ennemi déclaré de toute proposition de changement.

Mais ce savoir décapant peut aussi devenir par lui-même un inhibiteur de tout désir d'amélioration de l'enseignement :

– "A quoi bon tenter l'impossible ! S'il est "scientifiquement démontré" que le maître n'a que très peu de responsabilités sur les constructions de sens effectuées par ses élèves !"

– Autant choisir la didactique la moins risquée possible, la plus économique en énergie et en temps : "Beaucoup d'élèves n'y comprendront goutte, mais cela a-t-il vraiment de l'importance ?" ou plus exactement : "Cela nous regarde-t-il directement en tant que professeurs, puisqu'il est "scientifiquement montré" que dans d'autres dispositifs ils n'auraient probablement pas compris davantage ou plus durablement ?"

En tant que mathématiciens "purs et durs", nous pouvons donc décider en toute légitimité d'avancer linéairement sans trop nous soucier des laissés-pour-compte, puisque nous avons tous la preuve (nous sommes éventuellement la preuve) que certains élèves arrivent à construire du sens à travers des présentations très académiques du savoir, et ce par des chemins qui nous échappent, et que par ailleurs nous avons le sentiment que d'autres élèves au contraire n'iront jamais très loin en mathématiques, et ce quelle que soit la générosité de la didactique choisie !

Personnellement, pour arriver à limiter le caractère inhibiteur des lois du didactique mises en évidence dans la modélisation anthropologique, *i.e.* pour ne pas devenir en tant que professeur de mathématiques le spectateur horrifié mais passif des mécanismes réducteurs de la transposition didactique, j'ai choisi de jouer à fond le jeu de cette modélisation.

En d'autres termes, puisque ce modèle montre clairement pourquoi l'enseignement a tendance à "tuer systématiquement le caractère scientifique du savoir" lorsqu'aucune force antagoniste n'est là pour compenser, pour rééquilibrer durablement les contraintes qui pèsent sur le professeur et sur ses élèves, je *limite volontairement la portée de cette théorie* aux seules situations didactiques où aucune force contraire ne semble pouvoir s'exercer pour s'opposer à la dégénérescence du sens.

Pour cette raison, je considère donc aujourd'hui que le paradigme anthropologique développé par Y. Chevallard est une façon d'analyser et de décrire comment les hommes vivent ensemble quand ils enseignent et apprennent du *scientifique dans des institutions d'enseignement qui ont relégué au deuxième plan leurs fonctions éducatives propres,* voire dans certains cas qui ont totalement oublié qu'elles avaient une fonction culturelle et morale à assumer pour que transitent par l'école les valeurs fondamentales qui fondent une harmonie sociale et une démocratie dans un pays évolué.

En clair, je fais l'hypothèse que les mécanismes que la théorie anthropologique permet d'élucider fonctionnent comme des lois hégémoniques quand il *n'existe aucune raison supérieure permettant aux acteurs de la scène didactique de les contrer.*

Je pense honnêtement aujourd'hui que lorsqu'un projet d'enseignement ne se nourrit pas de façon suffisante du désir de former des sujets habitués par leur instruction à penser par eux-mêmes et à se penser eux-mêmes, capables de gérer dans une certaine indépendance de pensée la complexité d'un monde chaque jour plus facile à subir dans la conformité et plus délicat à affronter en pleine responsabilité, les mécanismes de la transposition didactique finiront toujours à terme par anéantir au niveau des faits réels toutes les velléités épistémologiques hautement proclamées (savoir de haut niveau, valeur scientifique des diplômes, formation d'excellence, etc.) par les individus ou les groupes professionnels qui mènent ce projet.

La place du "débat scientifique" dans cette interaction entre éthique et didactique

C'est en partie l'analyse précédente qui nous a conduits à introduire une forme de débat scientifique en cours de mathématiques. En effet, la philosophie qui préside à cette démarche repose sur l'hypothèse que les mathématiques sont au moins aussi importantes pour l'homme par la façon dont elles lui permettent de penser le monde que par les résultats qu'elles établissent : la pensée mathématique n'est pas la pensée naturelle ni même son prolongement, elle est autre, et c'est essentiellement cette autre façon de penser les problèmes qui est considérée comme un savoir utile, utilisable, car c'est ce savoir qui peut permettre au sujet de changer ses représentations sur le monde, de concevoir une autre façon de poser les problèmes et d'envisager ses capacités à les résoudre.

Au plan socio-culturel et éthique, on part alors du principe qu'il n'est déontologiquement acceptable d'enseigner à "tous les sujets de la société" une discipline qui repose essentiellement sur la réflexion et qui est initialement un moyen d'intelligibilité du monde que si précisément "tous ces sujets" sont considérés comme pouvant participer effectivement à ce mouvement vers une plus grande intelligibilité du monde, sont pensés comme aptes à partager les éléments majeurs des significations initiales des savoirs qui leur sont enseignés.

En d'autres termes, dans ce projet d'enseignement, tout savoir consistant introduit dans la classe ou dans l'amphi doit non pas être travesti afin de pouvoir être appréhendé même par les sujets qui n'en comprendraient pas les significations majeures (car alors ce type de savoir devient "absurde" en tant que tel, puisqu'il ne sert pratiquement à rien ou presque en tant que résultat et qu'il a perdu d'avance son pouvoir de transformation sur celui qui l'apprend), il doit par contre être travaillé par le sujet élève ou étudiant de la même manière que le chercheur et l'ingénieur travaillent leurs objets scientifiques ; en aucun cas donc, l'adaptation des difficultés d'apprentissage d'une notion au niveau réel des élèves ne peut conduire à l'acceptation d'une compréhension de ces derniers qui apparaisse comme dérisoire vis-à-vis de la compréhension savante de ce savoir.

En clair, s'il est évident que le savoir de l'élève ne peut directement être celui de l'expert, s'il est clair par suite qu'il faut et faudra toujours transposer la science savante pour l'introduire dans un environnement scolaire, la transposition admise dans ce modèle ne doit pas induire un changement radical du sens du jeu, elle doit au contraire permettre au sujet élève d'avoir pour jeu principal un jeu scientifique, *i.e.* un jeu de même nature que celui que pratiquent les scientifiques quand ils élaborent du savoir ou exploitent un savoir déjà élaboré pour résoudre d'autres problèmes.

Nécessité de reformuler la nature du savoir à enseigner

A mon sens, le savoir mathématique fondamental, s'il passe nécessairement par l'apprentissage de résultats et de techniques particulières (dont la portée sera éphémère pour la plupart des citoyens), ne s'y réduit pas ; c'est un savoir beaucoup plus global qui participe directement au développement de la personnalité du sujet et à sa capacité à communiquer rationnellement.

Un tel savoir se caractérise, s'identifie par les faits suivants :

– Il permet au sujet la prise de conscience de la force du raisonnement dans l'accession à une pensée indépendante et l'expression d'une identité propre.

– Il introduit le sujet à un autre regard sur le monde, un regard de type scientifique, qui n'est pas celui de la pensée naturelle, mais le complète. Le sujet découvre ainsi que même si ces deux regards s'opposent dans bien des cas, aucun ne peut légitimement se substituer totalement à l'autre : la pensée naturelle est davantage tournée vers l'action singulière et immédiate, la pensée mathématique nous pousse à mettre au clair ce sur quoi se fondent nos vérités.

Dans ce nouveau rapport au savoir, le

sujet apprend à mieux distinguer le nécessaire du contingent, il découvre que ce qui est bien fondé n'est pas toujours ce qui s'impose avec le plus de force à l'esprit, et que le vrai des scientifiques est toujours soit postulé soit relatif à un ensemble de principes initiaux qui ont été choisis *a priori* dans un arbitraire réfléchi.

– Il ouvre le sujet à une double prise de conscience au niveau des contraintes de fonctionnement démocratique des groupes humains :

* nécessité d'établir une grammaire commune, *i.e.* nécessité pour tout groupe d'individus d'établir au préalable un accord sur des fondements, tant au niveau des faits qu'au niveau des raisonnements, pour pouvoir envisager de résoudre des problèmes en coopération critique et prendre des décisions collectives acceptables,

** nécessité de donner une dignité à la pensée individuelle pour fonder une conscience citoyenne : dès qu'est érigé en principe de coopération le fait de donner *a priori* une égale dignité aux raisons exprimées par les différentes personnes lorsqu'elles décident de bonne foi d'apporter leurs idées propres dans la résolution d'un problème, apparaît l'obligation pour chacun de prendre sa part de responsabilité dans la recherche des vérités collectives.

Il semble que lorsque les élèves entrent dans cette philosophie de la science, le rôle hyper-scolaire que se donne bien souvent le scolêtre devient tellement dérisoire à ses propres yeux que les lois du didactique mises en évidence par la théorie anthropologique ne le contraignent plus de la même façon.

Le rôle des situations fondamentales dans ce pari socio-éthique

La problématique de recherche d'une situation fondamentale peut se présenter dans ce contexte comme l'actualisation, concept par concept, du pari socio-éthique suivant : faire en sorte que les élèves d'une classe ou les étudiants d'un amphi puissent normalement (sans être l'élite de l'élite) accéder à une compréhension et à une maîtrise des outils conceptuels et des techniques associées qui soient à la hauteur de la complexité du savoir enseigné !

L'instauration du débat scientifique est alors pour nous le moyen de faire passer cet élève soumis à mille pressions non scientifiques à cet état de sujet épistémologue pour lequel la notion de situation fondamentale a du sens.

Les hypothèses pragmatiques de ce modèle d'enseignement des mathématiques sont alors qu'en négociant un contrat explicite avec les élèves d'une classe ou les étudiants d'un amphi et en leur proposant des situations didactiques ad hoc :

– il est scientifiquement raisonnable de proposer aux élèves de formuler leurs idées générales (faire des conjectures) sur des domaines mathématiques qu'ils ne connaissent que partiellement et qui (par nécessité de programme) ne sont pas forcément dans le droit fil de leurs investigations personnelles,
– les élèves sont susceptibles d'éprouver un véritable doute scientifique,
– la preuve, en étant l'unique moyen dont le groupe classe dispose pour éliminer les incertitudes et lever les contradictions, peut donc apparaître comme un outil nécessaire pour consolider ce que l'on entrevoit,

– le groupe classe ou amphi peut supporter dans la durée ce processus erratique dans la mesure où cette façon de travailler les mathématiques “démontre” en permanence que l'important en mathématiques n'est pas fait que de résultats formalisés (théorèmes, formules, algorithmes, etc.), mais est constitué du couple résultats – modes de pensée nécessaires pour les établir et leur donner du sens.

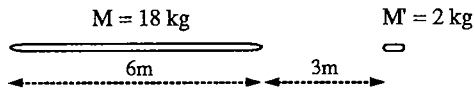
Dans ce modèle, la problématique des situations fondamentales est cruciale, car ce sont ces situations qui ont la charge de réduire les tensions paradoxales d'un travail collectif simultanément très ouvert et très orienté.

Retour sur l'étude d'un exemple de situation fondamentale : la situation du barreau

Pour finir, développons un peu plus la situation que nous avons déjà évoquée et que nous utilisons souvent en première année d'université comme situation fondamentale d'introduction au concept d'intégrale.

Sans aucun préambule sur l'intégrale, au tableau se trouve posé le problème suivant :

Si la loi d'attraction universelle de Newton entre deux masses ponctuelles situées à distance r est donnée par la formule : $F = k\ M.M'/\ r^2$, quelle est la force F qui s'exerce entre deux masses M et M' situées à 3m l'une de l'autre, la masse M étant constituée d'une barre homogène de 6m de long et de 18 kg et la masse M' de 2 kg étant considérée comme ponctuelle ?



Les réponses d'un amphi d'une centaine d'étudiants au bout d'un quart d'heure de recherches individuelles autour de la question F = ? sont les suivantes :

F =	– 8 k	4/9 k	k	4/3 k	4k	8k	?
Nbre d'étud.	10	3	#50	8	10	4	#25

Cette situation a un caractère fondamental, en ce sens que

– d'emblée elle projette l'étudiant dans une problématique scientifique :

* il ne peut douter que cette force existe objectivement et soit bien déterminée indépendamment des différentes procédures qu'il peut envisager pour l'évaluer,
* un peu de réflexion lui montre qu'il ne peut *a priori* calculer simplement cette force à partir de la formule ponctuelle, car ici les forces partielles qui s'exercent sur les “atomes” du barreau varient quand on parcourt ce barreau ;

– le problème n'admet pas de solution à partir des seules connaissances antérieures : les étudiants avancés (ou redoublants) qui ont déjà vu traiter ce problème par une mise en équation infinitésimale peuvent proposer la réponse F = 4/3.k, et la justifier comme le résultat du calcul de l'intégrale-primitive $\int_3^9 k.M'/r^2.M/6.dr$, mais comme il leur est très délicat d'expliquer pourquoi un tel calcul de primitive est effectivement adéquat pour représenter cette force, cette proposition ne pourra, dans le contrat du débat scientifique, être imposée aux pairs comme ***la*** solution du problème par la seule explication : "c'est ce qu'on nous a dit l'an passé !"

– assez rapidement une majorité d'étudiants peuvent croire avoir résolu le problème grâce à une "astuce", la recette du centre de gravité : "tout se passe comme si la masse de la barre était concentrée en son milieu", recette qui est souvent pertinente quand il y a de la linéarité, mais qui ne l'est pas ici et qui conduit au résultat erroné F = k.

Ce qui est fondamental ici sur un plan épistémologique, c'est que :

* ce dernier résultat est erroné, mais rien ne montre de façon évidente et immédiate qu'il l'est ou ne l'est pas !

* la validité de ce résultat repose pour beaucoup d'étudiants sur le principe scolaire non scientifique, voire anti-scientifique : "il existe toujours un truc qui permet de trouver la solution d'un problème sans avoir à le résoudre véritablement !"

* le caractère erroné du résultat obtenu par l'astuce du centre de gravité peut être mis en évidence non pas grâce à une intervention magistrale, non pas non plus en connaissant déjà la théorie de l'intégrale que l'on veut enseigner, mais tout simplement en réappliquant le principe erroné qui l'a produit et en exigeant seulement de ce principe d'être cohérent avec lui-même : en coupant le barreau en deux et en considérant que la force qui s'exerce sur le tout est la somme des forces qui s'exercent sur chaque morceau, on obtient (par le principe du centre de gravité appliqué à chacune de ces deux moitiés) F # 1,21 . k .

Si le principe du centre de gravité était "universellement" valide, on devrait avoir en cohérence 1 = 1,21 !

* Lorsqu'il existe un principe de contradiction scientifique dans l'amphi (il est insupportable pour une grande majorité d'élèves ou d'étudiants – ce qui n'a rien d'évident *a priori* – de considérer comme valide une méthode qui produit 1 = 2 !), une fois cette incohérence mise en évidence, les tenants du principe du centre de gravité ne peuvent plus continuer à défendre ce principe comme valide en s'appuyant implicitement sur le fait que leur opinion "était" majoritaire ; la présence visible de cette incohérence relance donc la recherche, et l'intérêt scientifique de cette recherche croît pour beaucoup d'étudiants avec la découverte de la complexité du problème et de ses raisons.

* Comme c'est souvent le cas dans une démarche scientifique effective, cet avatar dans la recherche d'une solution, au lieu d'être du "temps perdu", se révèle tout à fait fécond, car il nous conduit indirectement vers la procédure intégrale ; en effet :

– la monotonie de la formule ponctuelle $r \rightarrow F(r)$ permet de tenir le raisonnement suivant : la force qui s'exerce sur le barreau est certainement moins grande (resp. plus grande) que celle qui s'exercerait si la masse totale était concentrée en une extrémité (resp. en l'autre), ce qui fournit rationnellement par majoration et minoration uniforme de cette force variable l'encadrement très grossier : $4/9.k \leq F \leq 4.k$.

Cela permet déjà à certains étudiants d'évacuer les valeurs extrêmes du tableau, mais ne leur permet pas par contre d'effectuer une discrimination pertinente entre les valeurs centrales du tableau.

– l'idée utilisée par certains étudiants pour montrer l'incohérence du principe du centre de gravité peut alors être reprise par d'autres étudiants en termes de majoration et de minoration de la force qui s'exerce sur chacun des morceaux du barreau lorsqu'on découpe celui-ci en deux.

De l'encadrement $4/9.k \leq F \leq 4.k$ pour le barreau entier, on passe à $13/18.k \leq F \leq 5/2.k$, c'est-à-dire à un encadrement deux fois plus fin si on découpe ce barreau en deux !

– dès qu'un étudiant repère cette amélioration, il peut inviter l'amphi à itérer le procédé de découpage autant de fois que nécessaire pour obtenir des encadrements de plus en plus fins !

En itérant ce processus l'amphi peut se persuader assez simplement, après avoir éliminé la solution majoritaire et "évidente" k, que la valeur non évidente 4/3.k est la seule valeur réelle qui appartienne à tous les encadrements que l'on peut imaginer en découpant le barreau en autant d'équi-morceaux que l'on veut !

En dernier ressort

Cette situation est fondamentale dans la mesure où, de façon assez naturelle, tout pousse l'étudiant vers le sens du concept de fonction intégrable et d'intégrale, et rien par contre ne permet *a priori* de glisser immédiatement vers l'identification classique primitive-intégrale. Identification opérationnelle dans certaines situations, mais qui de par son aspect algorithmique trop simplificateur tue, lorsqu'il est introduit prématurément, la conceptualisation naissante de l'intégrale et rend magiques les mises en équations différentialo-intégrales (qui fondamentalement reposent sur une analyse du type précédent).

Dans une coutume de "débat scientifique en cours", on peut garantir que la plupart des arguments précédents vont émerger progressivement dans un ordre ou dans un autre et s'imposer comme une sorte de nécessité scientifique.

Cette procédure complexe de découpage, d'encadrement et de passage à la limite caractéristique de l'intégrale arrive ici progressivement dans l'amphi, non comme une sorte de rigueur gratuite imposée par le professeur, mais comme un moyen (pratiquement le seul) de ne pas être piégé par le bon sens qui nous pousse soit à déclarer forfait devant la complexité du problème, soit à se laisser emporter par un principe erroné comme celui du centre de gravité.

Dans ces conditions, le professeur se trouvant face à des élèves qui sont au cœur d'une problématique infinitésimale, peut alors "récupérer" les matériaux mis en valeur dans le débat pour théoriser (sans perte de sens exagérée) la procédure intégrale qui vient d'émerger dans l'étude de cette situation particulière.

Il peut par exemple institutionnaliser la pratique de mise en équation intégrale qui vient d'émerger dans la situation du barreau de la façon suivante :

Lorsqu'il s'agit d'évaluer mathématiquement une grandeur qui se présente comme la résultante globale R (masse, volume, force, charge, etc.) de l'action d'un certain phénomène f (une force, une densité, une hauteur, etc.) variable sur un domaine Ω (Ω étant soit un segment de droite, soit un morceau du plan ou de l'espace), la procédure intégrale précédente : découpage, encadrement, passage à la limite, est un procédé valide pour évaluer ce résultat lorsque les trois conditions suivantes sont réalisées :

Condition 1 : Le problème global est additivement localisable

– On peut modéliser de la même façon le problème global et les problèmes locaux, c'est-à-dire que si le symbole $R(\Omega)$ a naturellement du sens pour désigner le résultat global (c'est la masse, le volume, la charge, etc. de l'objet), il en est de même des symboles $R(\Omega_i)$ qui désigneront sans ambiguïté les résultats partiels correspondant au même phénomène lorsqu'on découpe le domaine Ω en sous-domaines ou morceaux Ω_i (ici, par exemple, $R(\Omega_i)$ désigne naturellement la force qui s'exerce sur le "bout de barreau" Ω_i).

– "Le problème est additif" signifie alors que lorsqu'on découpe ou décompose Ω en tranches ou morceaux Ω_i, c'est-à-dire lorsqu'on effectue une partition finie du domaine global Ω en parties assez simples Ω_i pour que chaque résultat partiel $R(\Omega_i)$ ait du sens, le résultat global $R(\Omega)$ peut être considéré comme la somme des résultats partiels $R(\Omega_i)$ correspondants : $R(\Omega) = \Sigma\, R(\Omega_i)$. (C'est le cas d'une masse ou d'un volume, d'une force si les forces partielles s'exercent dans le même sens – ce qui est le cas pour le barreau – mais ce n'est pas le cas par contre d'une vitesse moyenne ou d'une densité moyenne.)

Condition 2 : Il existe une façon cohérente d'encadrer les résultats partiels proportionnellement à la "mesure de chaque morceau"

La fonction $f : \Omega \rightarrow R$ qui modélise le phénomène variable produisant le résultat global est "la" fonction qu'il faudra "intégrer" si elle se présente comme un facteur de proportionnalité au sens suivant :

– si le phénomène f est constant sur un morceau Ω' de Ω, on a l'égalité :

$$\mathbf{R(\Omega') = f(\Omega') * mes(\Omega')}$$

(où $mes(\Omega')$ désigne, suivant le cas, la longueur s'il s'agit d'une distance, la durée s'il s'agit du temps, l'aire ou le volume de la partie Ω').

– si le phénomène f est variable sur le morceau Ω', on a seulement l'encadrement :

$$\mathbf{inf.f(\Omega') * mes(\Omega') \leq R(\Omega') \leq sup.f(\Omega') * mes(\Omega').}$$

Condition 3 : L'erreur globale d'encadrement "disparaît" par passage à la limite

Quand on découpe Ω en parties ou morceaux Ω' de plus en plus "fins", **la somme des erreurs** d'encadrement sur chaque morceau

$$\mathbf{\Delta\,(f, \Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n) = \Sigma\,[sup.f(\Omega_i) - inf.f(\Omega_i)] * mes(\Omega_i)}$$

tend vers zéro.

(L'erreur globale peut être rendue arbitrairement petite par choix de découpage fini de Ω en parties ou morceaux dont le diamètre est de plus en plus petit, *i.e.* f est intégrable au sens de Riemann sur Ω.)

Théorème-définition de "bonne fin" d'une mathématisation par la procédure intégrale

Sous les trois conditions précédentes, il existe un unique nombre réel S susceptible de représenter le résultat que modélise R ; c'est celui qui satisfait à tous les encadrements globaux suivants :

$$\Sigma\, \inf.f(\Omega_i) * mes(\Omega_i) \leq S \leq \Sigma\, \sup.f(\Omega_i) * mes(\Omega_i).$$

On appelle, par définition, cet unique nombre réel : l'intégrale de Riemann de f sur Ω, et on le note $\int_\Omega f$; par construction, on a : $R = S = \int_\Omega f$.

Epilogue

Malgré tous les aspects intrinsèquement fondamentaux liés à cette situation du barreau, je ne peux prétendre que la description que je viens d'en faire suffise pour la rendre reproductible : honnêtement je ne peux garantir à aucun professeur que s'il présente les choses dans sa classe ou son amphi de la façon précédente, ses élèves ou ses étudiants auront les comportements que je viens de décrire, comportements et réactions néanmoins indispensables pour qu'ils ressentent peu à peu la nécessité du découpage, des encadrements et du passage à la limite, et que de ce fait l'institutionnalisation précédente ne leur apparaisse pas comme une procédure exagérément complexe et parachutée par le professeur en réponse à un non-problème.

La première raison pour laquelle je ne peux rien garantir, c'est que cette situation revêt "naturellement" un caractère fondamental dans une classe ou un amphi ayant une coutume de "débat scientifique", qui a pour conséquences notamment, d'une part que le professeur ne peut jamais aller loin dans l'énonciation d'une théorie sans devoir l'appuyer sur des propositions ou des réactions d'étudiants qui lui donnent sens, et d'autre part qu'aucun élève ne peut se référer sur du déjà vu, lu ou entendu ailleurs pour imposer au groupe une procédure toute faite comme solution d'un problème.

Ensuite, il me semble que cette situation ne peut vivre dans une classe ou un amphi que s'il y existe déjà un principe de contradiction fort : une large majorité d'élèves ou d'étudiants n'accepte plus de tenir pour valide soit un raisonnement qui conduit à des réalisations invraisemblables, soit deux raisonnements qui aboutissent à des conclusions opposées (ce qui, contre toute attente, n'est pas une attitude qui va de soi dans un amphi de première année d'université, même lorsqu'il est essentiellement constitué de bacheliers scientifiques).

Par ailleurs, je pense que cette situation n'est écologiquement viable que dans un contrat didactique où il est reconnu globalement que les mathématiques ne peuvent vivre seules (il est établi comme une coutume didactique d'effectuer des réflexions méta-mathématiques portant sur les rapports entre mathématiques et d'autres domaines de réalité), et de façon plus interne aux mathématiques, qu'aucune notion mathématique ne peut non plus vivre isolément dans un chapitre étroitement cloisonné (on a accepté que l'approfondissement d'une notion conduit toujours à la remise en question et à l'approfondissement d'autres notions : ici il est clair que l'on travaille tout autant sur l'introduction de l'intégrale que sur l'approfondissement des nombres réels et de l'analyse, et aussi sur l'explicitation du jeu scientifique qui consiste à passer d'une réalité prise comme le lieu où le problème se pose à une autre réalité prise comme modèle car le problème transposé a tendance à mieux s'y traiter).

Par exemple, la procédure intégrale ne peut à mon sens prendre une consistance mathématique que si on a déjà mis en exergue le principe fondamental de l'analyse : "deux quantités fixes et infiniment proches sont égales" (la procédure intégrale repose sur ce principe et simultanément en montre toute la consistance) ; sinon cette procédure apparaîtra à certains comme une complexité inutile et à d'autres comme un "bidouillage" de physiciens.

Si donc tout cet environnement à la fois épistémologique et didactique (qui nous est nécessaire pour "faire marcher" cette situation) n'est pas là d'une certaine façon dans la classe ou l'amphi et si le professeur n'a pas comme projet global de lui donner une épaisseur précisément via l'étude de l'intégrale, je pense qu'il n'est pas très sérieux de vouloir garantir une quelconque forme de reproductibilité de la description qui vient d'être faite. (Je connais des exemples de réalisation de cette situation où en traitant le problème de façon plus directive et plus locale, *i.e.* en se donnant pour unique objectif l'introduction de l'intégrale, la séquence d'enseignement s'est avérée inutilement compliquée par rapport au bénéfice que la classe pouvait alors en tirer ; de ce fait, ces réalisations n'ont pas été reprises par les professeurs l'année suivante).

A l'inverse, dans une vision plus globale des mathématiques et de leurs rapports avec d'autres domaines de réalité, nous avons pu régulièrement "mesurer l'efficacité" d'une telle situation de la façon suivante : après avoir défini l'intégrale de Riemann comme réponse à la problématique du barreau (condition 3 de la procédure intégrale), nous avons demandé aux différents étudiants d'un amphi de s'engager dans le travail mathématique suivant :

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction Riemann intégrable, si x_0 est un point fixé de $[a, b]$ et si on pose par définition $F(x) = \int_{x_0}^{x} f\,dt$ comme étant l'intégrale de f dépendant de la borne supérieure x, quels liens pouvez-vous établir entre les propriétés classiques (continuité, monotonie, dérivabilité, etc.) de f et de F ?

Classiquement, les conjectures proposées par les étudiants au bout d'une demi-heure sont du style suivant :

C1 f et F sont de même signe.
C2 si $f \geq 0$, alors F croissante sur $[x_0, b]$.
C'2 si $f \geq 0$, alors F croissante sur $[a, b]$.
C3 $f = F'$.
C4 F est toujours continue.
C5 si f est continue, F est continue.
C6 si f est continue, F est dérivable.
C7 f croissante, alors F croissante aussi.

Le "débat mathématique" qui s'engage alors sur de telles conjectures a toujours permis à l'amphi de rejeter les énoncés faux avec des contre-exemples ad hoc et de démontrer en partie ceux pour lesquels aucun contre-exemple n'arrivait à maturité.

On remarquera ici que le professeur peut, par ce procédé, traiter de façon tout à fait rigoureuse les propriétés les plus fondamentales de l'intégrale, en ayant la quasi certitude que, pour l'essentiel, ses étudiants et lui-même partagent la même problématique (l'activité qui se déroule dans l'amphi semble plus dominée par des contraintes scientifiques : est-ce bien vrai ? est-on certain de tous parler de la même chose ? que par les contraintes scolaires : que faut-il retenir pour l'examen ? quels types de questions nous seront posés ? etc. etc.)

Mais... pour atteindre cette partie stable mathématiquement parlant, sans que trop d'étudiants aient perdu le sens de ce que l'on fait, il aura fallu accepter de passer par un stade délicat où ce que l'on dit mathématiquement n'est pas très rigoureux : l'institutionnalisation de la procédure intégrale qui permet d'introduire une définition rigoureuse de l'intégrale de Riemann n'est pas elle-même très rigoureuse, et vouloir la rendre telle (par exemple en précisant à ce stade quels ensembles sont mesurables et ce que signifie exactement la mesure de Ω ou de Ω', ce que représente alors une suite de partitions "mesurables" de calibre tendant vers zéro, etc. etc.) introduirait à mon sens une telle pesanteur formelle que le sens de la procédure risquerait de disparaître au fur et à mesure qu'elle se formaliserait.

C'est bien le sens de l'affirmation de Brousseau : *"Le professeur a le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier."*

La plupart des constatations que je viens de faire sur la situation du barreau ont à mon sens une portée beaucoup plus générale : d'une part, il me semble que sur n'importe quel sujet mathématique il est toujours possible de faire de vraies mathématiques avec les vrais élèves et les vrais étudiants que nous rencontrons chaque année dans nos différentes classes ou nos différents amphis, et les situations fondamentales sont des outils adaptés pour nous permettre d'introduire les concepts significativement ; mais par ailleurs, aucune situation fondamentale ne tient seule, ne peut être exploitée avec une probabilité importante de maintien du sens si le professeur qui la met en Ïuvre ne l'a pas repensée lui-même, ne l'a pas reprise à son compte, ne l'a pas transformée pour la mettre en cohérence avec ses propres coutumes d'enseignement, dans un contrat didactique clair pour ses élèves, et éventuellement renégocié de façon explicite avec la classe ou l'amphi lorsqu'il s'agit d'une situation au caractère très exceptionnel choisie expressément pour surmonter un obstacle important.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE M. (1989) : *Ingénierie didactique,* Recherches en didactique des mathématiques, vol. 9 (3).

BKOUCHE R. (1992) : "L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique", *Repères IREM* n°9 , Topiques Editions.

BROUSSEAU G. (1981) : "Problèmes de didactique des décimaux", *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 2.1

BROUSSEAU G. (1982) : *Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie,* Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Publication du laboratoire IMAG de l'Université J. Fourier de Grenoble, n°45.

BROUSSEAU G. (1986) : "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 7 (2).

CHEVALLARD Y. (1985) : *Les programmes et la transposition didactique; illusions, contraintes et possibles.* Communications aux journées nationales de l'APMEP, *in Bulletin de l'APMEP,* 352 (février 1986).

CHEVALLARD Y. (1989) : "Le concept de rapport au savoir", *Cahier du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Université J. Fourier de Grenoble, Année 1988-1989, n°108.

CHEVALLARD Y. (1991) : *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné,* Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

DI MARTINO H. (1992) : *Analyse du contrôle épistémologique d'une situation didactique : la situation du pétrolier.* Mémoire de DEA soutenu à Grenoble, publications de l'IREM.

LEGRAND M. (1989) : *Rationalité scientifique et rationalité quotidienne face au problème de la preuve en mathématiques,* Annales de la cinquième école d'été de didactique des mathématiques.

LEGRAND M. (1993) : "Débat scientifique en cours de mathématiques", *Repères IREM* n°10, Topiques Editions.

MERCIER A. (1994) : *L'approche biographique : un révélateur de la dimension a-didactique dans la relation didactique classique,* Colloque Vingt ans de didactique des mathématiques en France, La Pensée Sauvage Editions.

MICHALOPOULOU C. (1991) : *Une expérimentation sur une métaphore fondamentale du concept de limite,* Mémoire de DEA soutenu à Grenoble, publications de l'IREM.

PINTARD D. (1992) : *Etude de l'évolution d'une problématique didactique dans la constitution, la réalisation et l'analyse d'une ingénierie didactique sur le concept de limite,* Mémoire de DEA soutenu à Grenoble, publications de l'IREM.