REPERES - IREM . N° 28 - juillet 1997

EVALUATION ET EVOLUTION D'UN LOGICIEL DE GEOMETRIE DYNAMIQUE

Philippe BERNAT
Centre de Recherches
en Informatique de Nancy
et Irem de Lorraine

En mathématiques, l'usage de quelques logiciels commence à se répandre. Aujourd'hui, les logiciels les plus couramment utilisés et d'un apport majeur dans l'enseignement des mathématiques sont des logiciels de calcul formel, des traceurs de courbes et des logiciels de construction géométrique plane. Plusieurs publications relatent des séquences pédagogiques intégrant l'outil informatique [MEN 93a], [MEN 93b], [MEN 93c]. La géométrie est un domaine privilégié de l'enseignement en France. De nombreuses recherches ont porté sur la représentation des figures géométriques à l'aide d'un support informatique. Ces recherches ont évolué depuis les premiers travaux de pionniers dans les années 70 et ont abouti à la notion de **géométrie dynamique** (1) [Goldenberg & Cuoco 96]. Un logiciel de géométrie dynamique est un environnement qui apporte en général aux figures géométriques une nouvelle dimension : le mouvement, l'animation interactive du dessin.

Plusieurs réalisations de géométrie dynamique ont vu le jour. On peut citer, en France, *Cabri* (J.M. Laborde à Grenoble), *Calques Géométriques* (P. Bernat à Nancy), *Géoplan* (Hocquengheim au CNAM), *L'Atelier de Géométrie* (Nathan). Aux USA, le projet le plus marquant est *Geometer's Sketchapd* (N. Jackiw, Berkeley). Certaines de ces réalisations obéissent à des principes rigoureux d'interfaces homme-machine fondés sur des recherches d'ergonomie cognitive, d'autres sont des réalisations plus pragmatiques. De fait, il est difficile de comparer ces logiciels pour en en obtenir une classification. Toute évaluation porte principalement sur l'énumération des fonctionnalités de chaque produit. Comme le notent Goldenberg et Cuoco [Goldenberg & Cuoco 96], chaque version nouvelle d'un logiciel introduit des fonctionnalités qui, bien sûr, augmentent les capacités du logiciel, mais dont les conséquences en terme de pédagogie ne sont pas toujours prévisibles. Une utilisation

(1) Le terme de géométrie dynamique (dynamic geometry) est apparu récemment. Je l'ai vu pour la première fois dans un courrier électronique de Jim King en 1994. Auparavant, il était plus courant de parler de micro-mondes de géométrie ou plus simplement de logiciels de constructions géométriques. Le terme de géométrie dynamique est symptomatique de la différence que l'on établit entre la géométrie « classique » et la géométrie transposée par l'ordinateur.

non réfléchie de ces logiciels peut alors conduire à des erreurs de conceptualisation. L'utilisation de logiciels comme supports de l'enseignement conduit à des situations didactiques spécifiques qui, même si elles sont moins critiques que les situations induites par des logiciels de calcul formel, telles que celles étudiées par Michèle Artigue [Artigue 95], doivent pouvoir être repérées et gérées efficacement par les enseignants.

Un logiciel de calcul formel n'est pas un logiciel dédié à l'enseignement. Les connaissances qui y sont représentées, sont des connaissances expertes qu'il est nécessaire de transposer, ou au moins d'expliciter, avant de les transmettre à un élève. Les logiciels de Géométrie Dynamique (GD) étant conçus dans un but pédagogique, devraient évidemment être bien adaptés à une utilisation dans l'enseignement. Nous allons montrer dans cet article que la richesse (en termes de fonctionnalités) des logiciels de GD peut cependant, si elle est mal maîtrisée, être un obstacle à la conceptualisation voulue. Plus précisément, il est faux de croire que l'utilisation d'un environnement de GD, en libérant l'apprenant de tâches dites fastidieuses, facilitera immanquablement sa compréhension du domaine de la géométrie. Le travail avec un tel environnement doit être soigneusement préparé afin de construire des situations didactiques favorables à l'apprentissage attendu et ce n'est que lorsque cet apprentissage sera achevé que l'utilisation du logiciel pourra se faire sans contrainte.

La première partie de cet article décrit les objectifs initiaux qui ont présidé au développement de *Calques Géométriques*. Nous montrerons que, malgré la simplicité des intentions initiales, certains problèmes de positionnement d'un environnement de GD vis-à-vis de la théorie mathématique et de son enseignement ne manquent pas de se poser. Nous verrons ensuite comment, au fur et à mesure de l'utilisation de *Calques*, les enseignants ont exprimé de nouveaux besoins qui, à terme, ont fait apparaître de nouveaux problèmes didactiques, epistémologiques et informatiques.

1 — Evaluation de "Calques Géométriques"

Cette section retrace l'historique de *Calques Géométriques*, depuis la version initiale fonctionnant sous DOS. Nous expliquerons l'évolution du logiciel en exposant les raisons qui nous ont amené à introduire certaines fonctionnalités nouvelles tout en essayant de satisfaire des demandes qui nous paraissaient parfois contradictoires.

Les objectifs initiaux

Pour beaucoup d'enseignants de mathématiques, l'enseignement de la géométrie ne se conçoit pas sans une figure réalisée soigneusement. De fait, les constructions précises à la règle et au compas ont constitué, pour des générations d'élèves, des exercices qui demandaient autant une habileté manuelle que des connaissances mathématiques élaborées. Certains se souviendront peut-être des longues heures passées à essayer de construire les cercles inscrits et exinscrits d'un triangle sans jamais obtenir de résultat satisfaisant : les côtés du triangle s'obstinaient toujours à ne pas être tangents aux cercles obtenus.

Pour l'enseignant lui-même, une construction réalisée « manuellement » présentait certains inconvénients. Une construction réalisée au tableau noir devenait rapidement incompréhensible, la figure étant généralement surchargée de traits inutiles, correspondant soit à des constructions intermédiaires, soit à des points de vue différents selon l'état de présentation du problème. Les figures avaient parfois l'idée malicieuse de déborder du cadre du tableau ou de correspondre à des cas particuliers que l'on aurait aimé éviter (comme par un fait exprès, tels points sont pratiquement alignés aussi le triangle qu'il forment devient inexploitable).

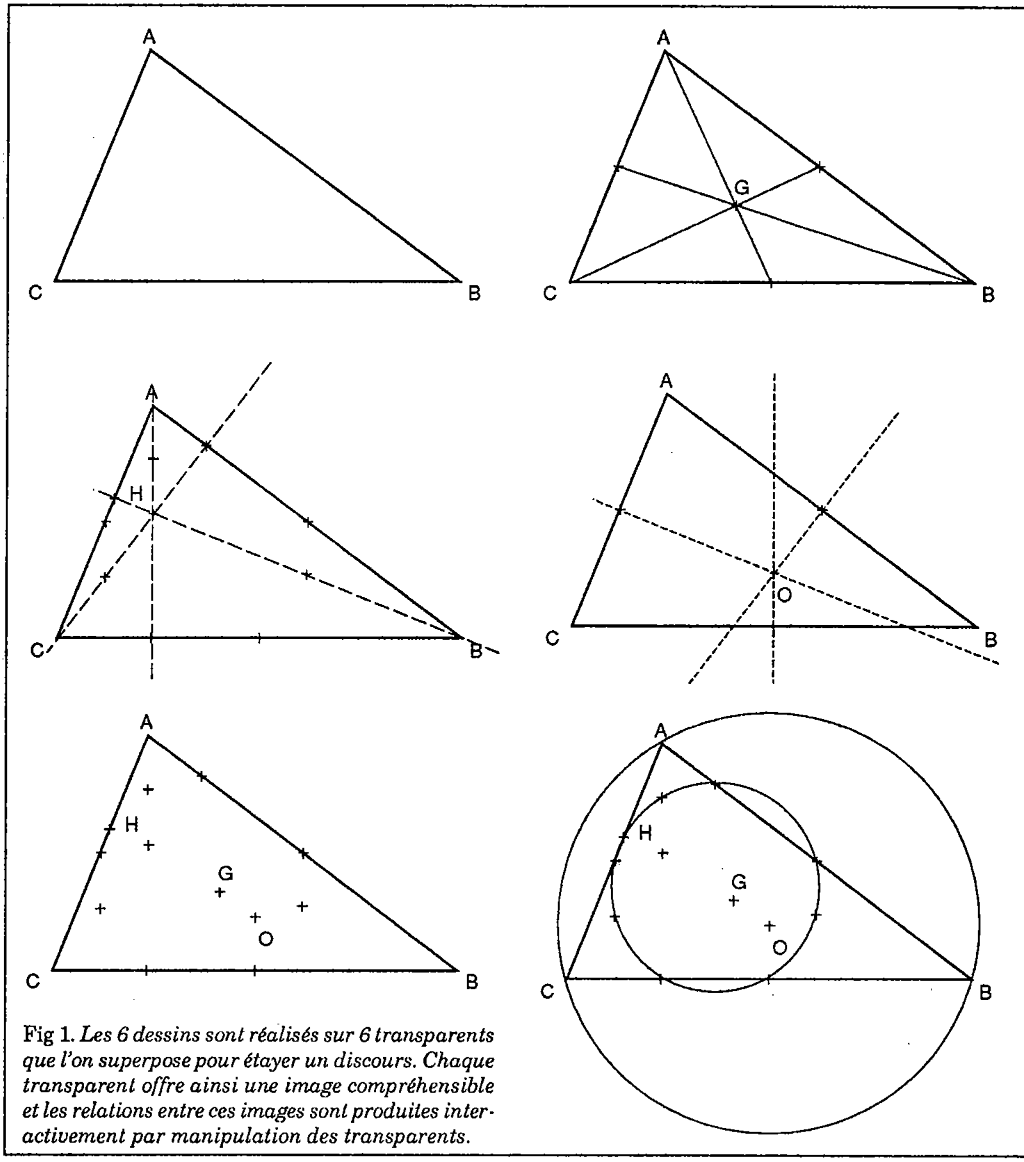


Fig 1. *Les 6 dessins sont réalisés sur 6 transparents que l'on superpose pour étayer un discours. Chaque transparent offre ainsi une image compréhensible et les relations entre ces images sont produites interactivement par manipulation des transparents.*

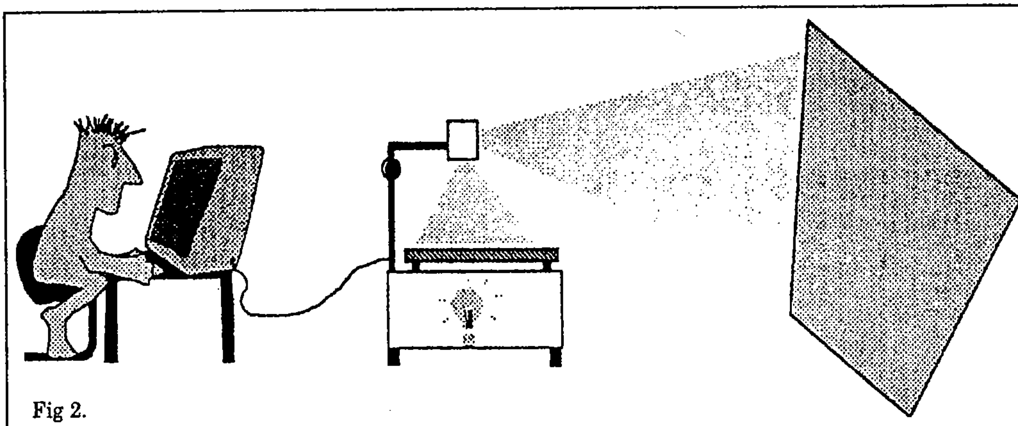


Fig 2.

L'utilisation du rétroprojecteur constitue une première solution technique. L'enseignant prépare une figure de base et la complète, de manière interactive avec la classe, en rajoutant ou en effaçant des constructions supplémentaires. La technique de la superposition de transparents permet de préparer des figures complexes et d'en présenter les points de vue adaptés à l'instant de la résolution (Fig. 1). *Calques Géométriques* constitue une solution informatique dont l'esprit est assez proche de la solution « rétroprojecteur et transparents », si on utilise l'image informatique projetée par l'intermédiaire d'une tablette à cristaux liquides posée sur un rétroprojecteur (Fig. 2).

De plus, l'ordinateur offre un avantage par rapport à la solution « transparents » : la figure réalisée pourra être modifiée dynamiquement au lieu d'être statique. Cette solution présente toutefois l'inconvénient d'être plus coûteuse en matériel et surtout de dépendre d'un logiciel conçu par une tierce personne. Néanmoins, *Calques Géométriques* a été conçu et réalisé en vue de ce type d'utilisation. Les objectifs que visaient cette première réalisation étaient approximativement les suivants :

— construction informatique de toute figure constructible à la règle et au compas,

— simulation informatique de la « technique des transparents »,

— modification d'une figure en respectant les contraintes de construction.

D'autres objectifs sont rapidement apparus. Ils correspondaient à des pratiques courantes qu'il était intéressant d'automatiser. Ainsi, les *lieux géométriques* se construisaient, dans l'environnement papier/crayon, en répétant plusieurs fois la même construction tout en ne faisant varier que la position d'un point initial. Une telle construction, fastidieuse « à la main », pouvait être facilement réalisée techniquement. De plus, les lieux géométriques semblaient, à l'époque, être d'un grand intérêt dans des réalisations informatiques telles que les imagiciels [Hirlimann 92]. Nous avons donc implanté la possibilité de ces constructions en nous attachant à imiter la méthode « manuelle » (2).

(2) A chaque modification de la figure, il est possible de laisser sur l'écran une trace du point dont on cherche le lieu. Dans la première version de Calques, il était ensuite possible de joindre les points obtenus par une courbe de Béziers. Cette technique copie la méthode manuelle†: tracer plusieurs points du lieu et les joindre.

Evaluation de la version initiale

L'évaluation d'un logiciel pédagogique ne doit pas se faire en énumérant uniquement ses performances informatiques mais surtout en mesurant son adéquation à l'enseignement auquel il est destiné. Nous essayerons donc de répondre aux questions suivantes :

1) le logiciel est-il utile dans une situation d'enseignement ?

2) le logiciel permet-il de réaliser toutes les constructions à la règle et au compas ?

3) le logiciel permet-il de réaliser d'autres constructions que celles de la règle et du compas ?

4) en cas de réponse positive à la question 2,

a) y a-t-il risque de conséquences néfastes sur l'apprentissage visé ?

b) y a-t-il conformité de la réalisation informatique avec la théorie enseignée ?

5) le logiciel est-il complet pour un enseignement de la géométrie ?

Utilité du logiciel

Calques, comme les autres logiciels de géométrie dynamique permet la construction et la modification d'une figure. Il apporte de ce fait une dimension expérimentale qu'il est plus difficile d'obtenir dans une situation papier/crayon [Laborde 96]. Il donne une approche de la distinction nécessaire entre la figure (la construction) et le dessin (la trace sur un support matériel) introduite par B. Parzysz [Parzysz 88]. De plus *Calques Géométriques* permet de reproduire facilement la technique des transparents : chaque objet de la construction peut être copié sur une « feuille », ce qui permet de visualiser dans des fenêtres séparées neuf états différents d'une même construction. Cependant, il n'est pas vraiment certain que la dimension expérimentale apportée par la géométrie dynamique ne soit pas quelquefois un frein à la créativité des élèves. C. Laborde [Laborde 96], montre la différence entre la même tâche dans un environnement papier/crayon et dans un environnement de géométrie dynamique en s'appuyant sur l'exemple suivant :

On demande à des élèves de répondre à la question : « *Existe-t-il des triangles dans lesquels deux bissectrices (intérieures) sont perpendiculaires ?* » (3)

Dans l'environnement informatique, les élèves constatent que cette orthogonalité n'est obtenue que dans le cas particulier du triangle aplati et en cherchent ensuite les raisons. Dans l'environnement papier/crayon, on constate que souvent les élèves réalisent un grand nombre de dessins et n'aboutissent pas dans leur recherche. Mais un tel échec ne pourrait-il pas être une incitation à changer de méthode et à amener les élèves à réfléchir sur une figure particulière, un simple dessin même approximatif, afin d'en déduire des propriétés utiles pour répondre à la question ?

Plus généralement, l'utilisation d'un environnement informatique est-il toujours aussi formateur que l'on voudrait le faire croire ? Personnellement, je considère qu'un bon environnement informatique d'apprentissage est un environnement *dont l'élève pourra se passer à plus ou moins long terme.* Nous pouvons illustrer l'apprentissage par la métaphore de l'étayage (« scaffolding ») : au début de son apprentissage, l'élève doit être soutenu, par exemple par des outils ou des tutoriels informatiques. Ce soutien doit se faire de plus en plus lâche pour finalement disparaître. Certains apprentissages pensent bien à mettre l'étayage en place, mais

(3) La formulation de cette question pousse davantage les élèves à travailler en produisant un grand nombre d'exemples et donc à favoriser l'environnement informatique. Une autre formulation aurait pu être « Comparer l'angle de deux bissectrices d'un triangle et les angles des sommets correspondants ».

ils oublient parfois de l'ôter. Aussi, l'apprentissage de la géométrie doit progressivement conduire les élèves à plus d'autonomie par rapport aux outils informatiques. Toute démarche expérimentale fondée sur l'outil informatique doit nécessairement être poursuivie par un bilan et un travail hors informatique.

Constructions à la règle et au compas

Les commandes de base autorisent :
— la création d'un point,
— la création d'une droite ou d'un segment passant par deux points,
— la création d'un cercle défini par son centre et un point,
— la construction d'un point sur une droite, un segment ou un cercle,
— la définition de l'intersection de deux objets,
— le report d'une distance (4).

R. Cuppens [Cuppens 9] rappelle que les actes de base d'une construction à la règle et au compas sont :
— construire une droite à partir de deux points à l'aide de la règle,
— construire un cercle de centre donné passant par un point donné en plaçant la pointe sèche du compas sur le centre et l'autre pointe sur le deuxième point puis construire le cercle,
— placer les deux pointes du compas sur deux points afin de reporter une distance.

Nous constatons que toutes ces constructions sont réalisables avec *Calques*. L'ensemble des constructions réalisables contient donc l'ensemble des constructions réalisables à la règle et au compas. On ne manquera pas de remarquer que *Calques* dispose d'autres commandes de base, telles que la création d'un point et l'intersection de deux objets, commandes nécessaires dans un environnement informatique à une spécification cohérente d'une construction. Ces commandes sont des réifications d'instructions de construction souvent implicites telles qu'elles existent dans des énoncés comme « construire la droite (AB) ». Un tel énoncé se traduit nécessairement par : « créer les points A et B et tracer la droite (AB) ». Comme nous le verrons par la suite, il est cependant possible de réunir cette séquence de constructions par une seule instruction informatique.

Constructions supplémentaires

Certaines commandes supplémentaires ne modifient pas fondamentalement l'ensemble des constructions réalisables avec *Calques*. Il s'agit par exemple des commandes « parallèle », « perpendiculaire », « milieu » car ces constructions sont réalisables à la règle et au compas. Le *lieu géométrique*, réalisable point par point avec le logiciel, peut également être obtenu à la règle et au compas (beaucoup moins rapidement et avec moins de précision, il est vrai).

Nous ne devons donc pas chercher les différences entre l'environnement informatique et l'environnement papier/crayon au niveau des commandes de construction. En revanche, la possibilité de modifier une figure par *manipulation directe sur les points de base* (les points qui sont les données de la construction) peut conduire à des « constructions » impossibles à la règle et au compas. R. Cuppens parle alors de *figures définies par glissement* [Cuppens 96] et assimile leur réalisation aux systèmes articulés [Rideau 89]. Nous donnons un exemple simple de telles constructions par glissement qui corresponde à la réalisation informatique d'un énoncé mathématique (voir la Fig. 3 de la page suivante).

(4) La commande « translater » permet de construire un point M à partir de trois points donnés A, B et C, tel que le vecteur CM soit égal au vecteur AB.

Réaliser la construction suivante :

ABC est un triangle quelconque. A', B' et C' sont des points de [BC], [CA] et [AB] respectivement, tels que (B'C') // (BC), (C'A')//(CA) et (A'B')//(AB).

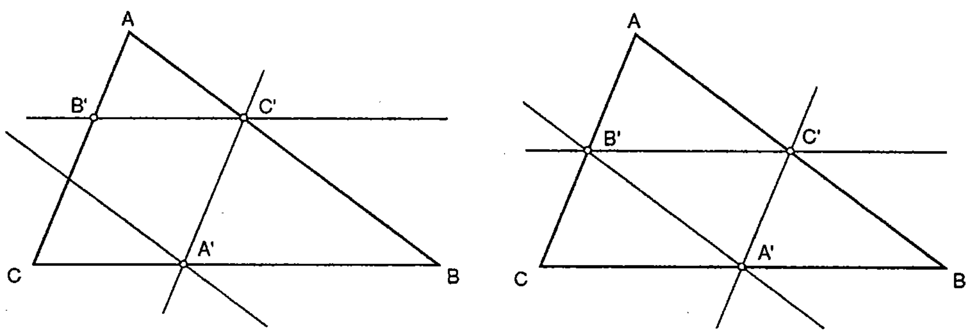


Figure 3. *Construction par glissement*

La construction correspondante peut être la suivante : On construit le triangle, puis on place le point B' sur (AC). On construit ensuite la parallèle à (BC) passant par B'. Cette parallèle coupe (AB) en C'. On construit de la même manière A' puis la parallèle à (AB) passant par A' (Figure 3 gauche). A ce stade de la construction, la contrainte (A'B')//(AB) a peu de chances d'être vérifiée. On déplace alors B' pour obtenir le dessin de droite dans la Figure 3.

Une telle construction ne peut pas être réalisée à la règle et au compas sans une démonstration géométrique du fait que B' doit être le milieu de [AC]. Ce type de manipulation peut alors modifier complètement la perception que doivent avoir les élèves de la notion de construction et même de la nécessité d'une démonstration. Un enseignant, dont l'objectif (au travers de l'énoncé du problème de construction) est d'amener les élèves à démontrer la propriété géométrique : « B' milieu de [AC] », devra donc nécessairement argumenter de la non validité d'une telle « construction » réalisée par glissement...

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut donc modifier profondément une situation didactique. En tout cas, elle oblige l'enseignant à expliciter certains termes du contrat didactique. Dans notre exemple, il lui faut préciser la signification exacte du mot « construction ».

Conformité de la géométrie dynamique avec la géométrie classique

La géométrie dynamique modifie les situations d'apprentissage. Ce phénomène était prévisible et peut être bénéfique pour peu que l'enseignant en soit conscient. D'une manière générale, l'introduction de nouveaux éléments dans un contexte d'enseignement transforme les connaissances à enseigner [Balacheff 91]. Cependant, on peut penser qu'il est important que ces transformations ne conduisent pas à des contradictions avec le modèle théorique de référence. La distance entre la géométrie dynamique et son modèle théorique (la géométrie « classique » (5)) ne pourra pas être réduite à zéro car l'informatisation d'un modèle mathématique suppose une réalisation et donc une modification de ce modèle. La théorie mathématique est bâtie sur des propositions déclaratives alors que le modèle informatique est fondé sur des fonctions. Plus précisément, le modèle mathématique est descriptif. Une représentation informatique doit transformer ces descriptions en actions réalisables par la machine, c'est-à-dire en un modèle computationnel. Une telle transformation, appelée *réalisation*, peut entraîner des « effets de bord » qu'il est parfois difficile de contrôler.

L'exemple qui suit montre la réalisation d'une proposition simple et une conséquence intéressante de cette réalisation.

La représentation de la proposition $\mathcal{P}$:

$$M \in [AB]$$

ne peut se faire par la fonction :

$$\text{point\_sur\_segment} : (A,B) \mapsto M$$

puisque la relation qui lie M aux points A et B n'est pas une fonction (car il y a plusieurs possibilités pour M). On peut alors réaliser la proposition $\mathcal{P}'$ équivalente à $\mathcal{P}$:

$$\exists t \in [0,1]; \vec{AM} = t.\vec{AB}$$

par la fonction :

$$\text{point\_sur\_segment} : (A,B,t) \mapsto M .$$

Le paramètre t est une variable. Le problème est la valeur qu'il faudra lui attribuer pour permettre la réification du point M. Selon les logiciels, la valeur initiale de t est définie de différentes manières lors de la création du point M : pour *Calques Géométriques* et *Cabri*, t est défini de telle sorte que le point M soit créé à proximité immédiate du curseur lors de la désignation du segment [AB] alors que pour *Geometer's Sketchpad*, la valeur initiale de t est aléatoire.

Il faut ensuite définir l'évolution de ce paramètre lors de la manipulation de la figure. La règle généralement adoptée est la suivante : *sauf en cas de manipulation de* M, la valeur de t reste constante. Le résultat en est que, lors d'une modification du segment, le rapport dans lequel le point M divise le segment reste constant. Ainsi, si le point se situe à peu près au milieu du segment, il restera toujours au milieu du segment quelles que soient les manipulations effectuées sur la figure, sauf si on saisit directement le point M. Le point donnera ainsi l'impression de posséder une propriété qui ne lui a jamais été attribuée. Ce phénomène est bien connu, mais il peut conduire à des résultats plus sérieux encore qu'à une interprétation discutable de la figure. Dans l'exemple qui suit, nous allons voir que le résultat obtenu en géométrie dynamique diffère nettement du résultat théorique attendu.

On construit un segment [AB]*, un point* M *sur* [AB] *et un point* O *hors de* (AB)*. On crée enfin un point* P *sur* [OM]*. Quel est le lieu du point* P *lorsque* M *varie sur* [AB] *?*

Essayons d'abord de comprendre quel doit être le résultat théorique. Le lieu E du point P étant l'ensemble des positions possibles de ce point lorsque M varie, et P pouvant atteindre n'importe quelle position sur

(5) Nous ne chercherons pas à définir complètement cette géométrie « classique » (je n'ose même pas parler de géométrie euclidienne) et nous nous contenterons d'une vision intuitive. La géométrie, telle qu'elle est enseignée, comporte en effet bien des zones mal définies et sans doute non définissables rigoureusement. Le modèle de géométrie que les environnements informatiques essayent de transposer n'est qu'une partie très réduite d'un univers géométrique que nous avons, je l'avoue, beaucoup de difficultés à cerner parfaitement.

le segment [OM], le lieu de P est l'intérieur du triangle (OAB) Figure 4) :

$$E=\{P\,/\,\exists t\in[0,1];\vec{OP}=t.\vec{OM};M\in[AB]\}$$

Demandons maintenant à un logiciel de tracer ce lieu. Le rapport OP/OM restant constant, le point P décrit un segment E', homothétique de [AB] (Figure 5) :

$$E=\{P\,/\,\vec{OP}=t_0.\vec{OM};M\in[AB]\}$$

où t_0 est une constante.

Le résultat est encore plus curieux si on remplace le segment [OM] par une droite. *Calques*, *Cabri* et *Geometer's Sketchpad* ayant des représentations différentes de la fonction « point_sur_droite », produisent des lieux géométriques très variés. Ainsi, dans *Cabri*, on obtient soit un arc de cercle soit une cissoïde selon que l'on a construit la droite (MO) ou (OM) (Figure 6) (6). Les résultats obtenus par les environnements de géométrie dynamique diffèrent des résultats théoriques et diffèrent également entre eux. Il existe donc plusieurs géométries incompatibles entre elles. Les lieux obtenus ici s'expliquent aisément si l'on considère que la géométrie dynamique est une extension de la géométrie des systèmes articulés : le résultat de la Figure 6, peut s'interpréter en considérant une tige coulissant sur le point O ; deux points étant fixés sur cette tige (P et M), le point M coulisse sur la tige AB...

Il serait cependant hâtif de conclure de ce fait que les logiciels de géométrie sont inutilisables. Le domaine de l'enseignement des mathématiques est un domaine qui sait facilement retrouver un certain équilibre. A ma connaissance, le problème des lieux que nous venons d'évoquer n'a jamais été soulevé dans ces termes, tout simplement parce qu'il

(6) Le résultat dans Calques n'est pas plus valable. Pour pallier cet inconvénient, ou du moins pour proposer une variante afin d'alerter les utilisateurs, la version 2.2 de Calques autorise de faire varier le paramètre t de manière semi-aléatoire.

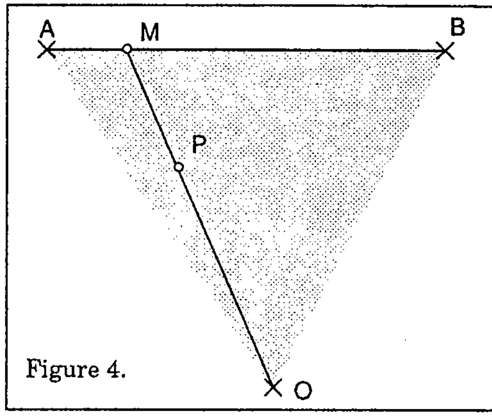


Figure 4.

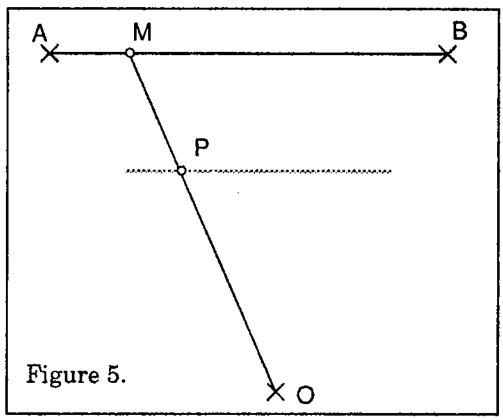


Figure 5.

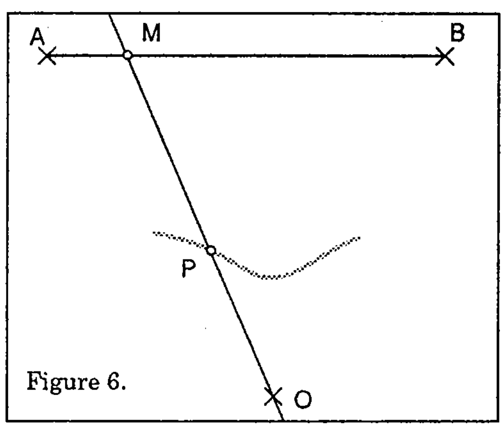


Figure 6.

ne s'est jamais posé dans l'enseignement. Les problèmes donnés aux élèves par leurs professeurs ont en général des solutions parfaitement connues. Le lieu du point P est par essence même ambigu. Le concept de lieu est-il lui-même bien défini (7) ? Aussi, les lieux recherchés se limitent bien souvent à l'image d'une courbe par une fonction continue.

En géométrie, les situations ambiguës dues a l'utilisation d'un environnement informatique sont extrêmement rares. La validité d'un logiciel pédagogique dépend de l'usage et de l'interprétation que l'on en fait. Les problèmes d'inconsistance d'un logiciel avec le domaine théorique sont bien plus important dans les logiciels de calcul formel (8). Il est vrai que les logiciels de calcul formel n'ont pas été conçus dans un but pédagogique, leur intégration dans l'enseignement soulève des problèmes d'usage nécessitant une forte préparation didactique comme le soulignent Lagrange et Drouhard [Lagrange & Drouhard 95].

Complétion vis-à-vis de l'enseignement

Il est fréquent d'entendre des enseignants reprocher à tel ou tel logiciel son inadéquation pour un usage précis. Certains regretteront que le logiciel ne permette pas de construire et de gérer des arcs de cercle, d'autres voudront l'utiliser pour étudier la tangente à une courbe et regretteront l'absence d'un quadrillage permettant de mieux repérer les points par leurs coordonnées. Enfin, certains voudront disposer, non d'un logiciel pédagogique, mais d'un outil de création « bureautique » : ils réclameront des solutions pour utiliser le logiciel en liaison avec un traitement de texte. Il est évident que de ce point de vue, la première version de *Calques* (pas plus que les suivantes...) n'est complète. Tout logiciel a été conçu pour un usage bien précis. Les environnements de type micro-monde ou de type outils donnent parfois l'illusion d'être des outils génériques. L'incompréhension entre les concepteurs et les usagers vient aussi d'une vision différente du domaine couvert par l'environnement informatique, l'usager voulant que le logiciel puisse « tout faire », sans mesurer les conséquences de cette exigence.

Nous avons ainsi très longtemps refusé de dépasser avec *Calques* le cadre de la géométrie « pure », de la géométrie des constructions à la règle et au compas. Toute confusion avec le domaine de l'analyse était à proscrire. Aussi, si le logiciel autorisait la mesure de la longueur d'un segment, les mesures ainsi obtenues ne pouvaient pas être réutilisées dans le cadre de *Calques* pour produire de nouveaux objets géométriques. Nous verrons dans la section suivante les conséquences des dérogations à cette règle... Pour des raisons similaires, nous n'avons pas voulu autoriser des constructions fondées sur les transformations géométriques : les transformations sont présentes dans *Calques*, mais uniquement pour *visualiser* le résultat d'une transformation appliquée à une partie de la figure..

Nous considérons que *Calques Géométriques* doit être une aide à la création d'images mentales élémentaires, une aide pour « voir » la géométrie dans son aspect le plus ancien de science du mouvement. De ce point de vue, *Calques* a atteint ses objectifs en permettant

(7) Il y a une vingtaine d'années, il était courant de considérer le lieu géométrique d'une famille de droites concourantes est le point de concours de ces droites. Maintenant, le concept d'ensemble a remplacé celui de lieu et pour beaucoup, le lieu d'une famille de droites est l'ensemble de ces droites.

(8) Un logiciel de calcul formel donne un résultat pour une intégrale impropre même si cette intégrale ne converge pas. La vérification des conditions d'application d'un algorithme sont à la charge de l'utilisateur et tant pis si celui-ci ne connaît pas l'algorithme mis en oeuvre dans le logiciel.

à l'enseignant de montrer explicitement le comportement d'une figure lorsqu'on déplace un de ses points ou de visualiser facilement une transformation géométrique.

2 — Evolution vers une nouvelle version

Les logiciels de géométrie dynamique évoluent constamment pour des raisons souvent variées. Il s'agit quelquefois de mettre en œuvre des idées nouvelles ou, parfois, comme le soulignent [Goldenberg & Cuoco 96], d'une compétition entre produits différents, de l'expérience des développeurs jouant avec leur œuvre, de lectures de comptes-rendus d'expérimentations, etc. Nous allons, dans cette section, rendre compte des principales évolutions de *Calques Géométriques* et en analyser les conséquences d'ordre épistémologique et didactique (certaines évolutions sont de nature purement technique, dues au passage à Windows, aussi notre propos portera essentiellement sur les évolutions à caractère didactique ou épistémologique).

Un micro-monde plus complet

Le concept de micro-monde doit inclure, outre des objets et des fonctions agissant sur ces objets, des connaissances que l'utilisateur peut construire, sauvegarder et réutiliser ultérieurement. Ainsi, dans le micro-monde de la tortue LOGO [Papert 81], l'enfant peut construire de nouveaux objets de plus en plus sophistiqués en définissant de nouvelles fonctions LOGO telles que “Carré”, “Triangle” puis “Maison”, “Village”, etc. *Cabri* et *Geometer's Sketchpad* autorisent, sous des formes différentes, la définition et la réutilisation de constructions intermédiaires : “macro-constructions” dans *Cabri* et “scripts” dans *Sketchpad*. Dans les deux environnements, ces méthodes s'apparentent à des *procédures* car elles nécessitent, lors de leur création, la définition de paramètres formels (les *objets initiaux* dans *Cabri* et les « *given* » dans *Sketchpad*), ainsi que la désignation des paramètres effectifs lors de leur exécution. Elles diffèrent par leur réalisation informatique : dans *Cabri*, il faut désigner les objets initiaux puis les objets finaux, dans *Sketchpad*, il faut lancer l'enregistrement des actions, les paramètres de la procédure sont définis alors par *Sketchpad* et le résultat de la procédure est la figure tracée entre le début de l'enregistrement et sa fin. L'exécution de la “macro” de *Cabri* ou du “script” de *Sketchpad* sont analogues. On désigne les paramètres effectifs auxquels cette procédure doit s'appliquer.

Il était indispensable que *Calques* autorise lui aussi la définition de macro-constructions pour prétendre à l'étiquette de micro-monde. La méthode de *Sketchpad* était celle utilisée par beaucoup d'autres logiciels pour définir des « macros » (voir par exemple les macros de *Word*). La méthode de *Cabri*, plus originale, présentait l'avantage d'unifier les macro-construction et les constructions élémentaires (une macro-construction peut être ajoutée comme *item* d'un menu) et ainsi d'autoriser l'extension des connaissances directement accessibles sans différencier apparemment les connaissances prédéfinies des nouvelles connaissances personnalisées. Il était alors très tentant de recopier ce concept et de l'adapter dans *Calques*, ce qui n'aurait peut-être pas été jugé très honnête (9)... Et puis, il fallait bien tenter de faire preuve d'originalité ! Nous avons donc profité d'un léger manque dans la

(9) Bien que la notion de propriété intellectuelle d'un algorithme ou d'un concept informatique ne soit pas bien définie. Sketchpad, en définissant ses scripts de manière absolument identique aux enregistrements de macros des logiciels de Microsoft n'a pas été, à ma connaissance, poursuivi pour plagiat.

définition de "macros" ou de "script" pour proposer un autre concept : celui de *greffe.*

Les procédures telles qu'elles sont définies par *Geometer's Sketchpad* et par *Cabri* apparaissent comme des "boîtes noires". L'utilisateur ne peut prévoir le résultat de sa construction, ce qui peut occasionner une gêne dans certains cas particuliers.

Exemple : une procédure "Carré" prend comme paramètres effectifs deux points A et B et construit un carré de côté AB. L'utilisateur ne peut prévoir *a priori* de quel côté du segment AB se construira le carré. Aussi, si l'on veut construire un carré à l'extérieur du triangle ABC, l'application du "script" ou de la "macro" a une chance sur deux de produire l'effet inverse de l'effet attendu (voir Figure 7). Il faut alors annuler la commande et recommencer en sélectionnant les paramètres A et B dans un ordre différent.

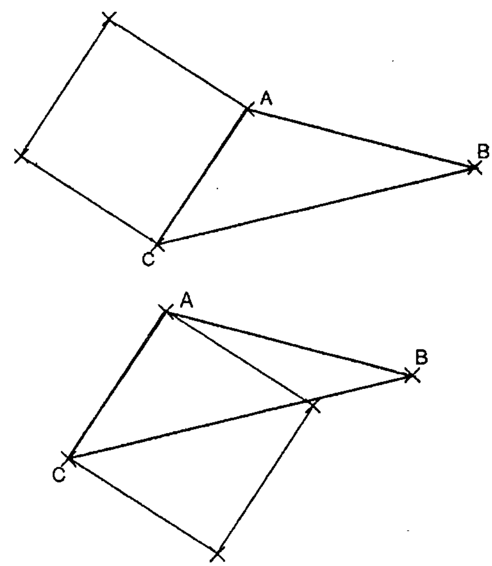


Figure 7. *Deux résultats possibles de la construction d'un carré sur le segment AB.*

La solution que nous avons adoptée dans *Calques* se veut plus visuelle. On insère la figure d'un carré (la sauvegarde d'une construction précédemment réalisée), puis on *greffe* les points libres de ce carré sur les points A et B. La commande « Greffer » permet, en amenant *a* et *b* à proximité de A et B, la « capture » de *a* et *b* par A et B (voir Figure 8).

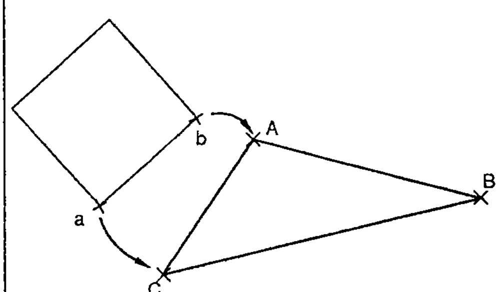


Figure 8. *Insertion puis greffe d'un carré de base ab.*

L'exemple de cette figure montre en particulier que pour obtenir le résultat souhaité, il suffit de *greffer a* sur B et *b* sur A.

Evolution de l'apprentissage

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré comment l'utilisateur peut réinvestir ses connaissances au fur et à mesure de leur apprentissage et ainsi se construire son propre micro-monde en y introduisant de nouveaux objets. L'usage du logiciel ainsi que les connaissances de base sur l'interaction avec la géométrie évoluent également. En reprenant la métaphore de l'étayage que nous avons déjà évoquée, il est indispensable, au début de l'apprentissage que l'élève prenne bien conscience de la nature de chaque objet qu'il doit manipuler. Le logiciel l'oblige alors à décomposer chaque action de construction en actions élémentaires. Mais, par la suite, ce type d'interaction peut être contraignant. Il faut alors enlever l'étayage afin de laisser davantage de liberté à l'élève.

Un exemple typique est le problème fortement discuté des implicites de construction tels que celui de *l'intersection de deux droites*. Voici un extrait d'un échange de messages électroniques courant mai 95:

> *Cabri* (10) *insists that the user explicitly constructs a point at the intersection of 2 objects. Whilst this can be a hassle compared with Sketchpad, and I have certainly watched newcomers to Cabri struggle with this, one thing that the user interface is forcing is an awareness of a point as being the intersection of 2 objects.*
>
> [..]*What might be the effects upon the learner, if any ?*
>
> *For example,* [..] *then Sketchpad will not, by its design, force this awareness in learners whilst Cabri will help to. To reiterate, I am not interested in a Cabri / Sketchpad is better debate, but in trying to identify differences such as these, so that, if they are important in some way, as a teacher I can use the software to help me to bring certain geometrical features to my students' attention, and if the software does not do certain things, then I can design other tasks which are likely to have this effect.*
>
> [..] *One reaction to «original» Cabri is that this is unnecessary hassle and the approach by GSP is much easier and quicker for the user.*
>
> *Another reaction is that it is a feature(!). It is useful pedagogically because it takes the learner's attention (at least while they are beginning to use program) to a geometrical issue.*
>
> *D.Wilson@mmu.ac.uk*

Cabri oblige l'utilisateur à construire explicitement l'intersection de deux droites, alors que dans *Sketchpad*, cette construction est implicite. Par exemple : soient deux segments [AB] et [CD]. Si l'on veut construire le cercle de centre l'intersection de ces segments et passant par B, il est nécessaire avec *Cabri* (ou *Calques*) de construire d'abord cette intersection par une commande spécifique, alors que dans *Sketchpad* il suffit, lors de la construction d'un cercle, de désigner une zone de l'écran proche de cette intersection potentielle puis de désigner le point B. Le logiciel crée alors un point possédant la propriété "intersection([AB],[CD])", puis le cercle de centre ce point et passant par B. D. Wilson considère que l'élève n'a pas alors nécessairement conscience de la propriété du point comme étant intersection des deux segments.

Un problème analogue apparaît pour la création « à la volée » d'un segment. Pour créer un segment, doit-on créer d'abord deux points puis le segment passant par ces deux points ? ou peut-on directement désigner des zones de l'écran laissant ainsi au logiciel le soin de créer simultanément le segment et ses extrémités ? Plutôt que d'imposer une solution, la version 2.2 de *Calques* laisse à l'utilisateur (ici l'enseignant) le choix du mode d'interaction le mieux adapté à la situation didactique à mettre en œuvre. Les différents modes d'interaction constituent ainsi des *variables* dont dépend la situation didactique. Les solu-

(10) Il s'agit ici de la version 1 de Cabri.

tions mises en œuvre dans les logiciels à usage pédagogique ne doivent pas privilégier systématiquement l'ergonomie. Contrairement aux logiciels de bureautique, l'utilisateur (ici l'élève) étant un novice dans le domaine de la géométrie, ne peut maîtriser parfaitement les concepts qu'il est censé découvrir. La prise en main du domaine enseigné doit être progressive et un logiciel pédagogique doit favoriser un apprentissage mesuré. Ceci explique en partie les difficultés liées à l'introduction dans l'enseignement d'un logiciel expert, tel qu'un système de calcul formel, et renforce la nécessité de réaliser des environnements spécifiques à l'enseignement.

Etendre le domaine représenté

La géométrie ne se limite pas à la géométrie des constructions à la règle et au compas. Nous avons déjà parlé de la géométrie des systèmes articulés. La géométrie du quadrillage est souvent utilisée au collège pour introduire des transformations géométriques simples telles que la translation ou l'homothétie. Au lycée, la géométrie fait usage des nombres complexes. Il est très tentant d'introduire toutes ces géométries dans un logiciel. La géométrie hyperbolique, par exemple, peut facilement se modéliser sous un environnement de géométrie dynamique [Thibaut & Labarre 96]. La version 2.2 de *Calques* permet d'aborder la *géométrie fractale* (voir annexe). *Sketchpad* et *Cabri* autorisent la *géométrie du quadrillage*. Ces logiciels permettent également l'étude de la *géométrie analytique*. Dans *Cabri II*, les coniques et leurs équations font partie intégrante de l'environnement. *Géoplan* permet de construire, dans l'environnement de géométrie, toute courbe représentative d'une fonction. On peut se féliciter de voir les barrières entre géométrie et analyse s'effacer aussi facilement, mais une telle confusion n'est pas sans poser des problèmes épistémologiques.

Bien des enseignants n'ont pas conscience de le coexistence de ces différentes géométries et les confondent parfois maladroitement. Ainsi, dans un document édité par une grande surface de vente, un enseignant proposait une correction informatisée d'un exercice de géométrie du Bac série S (1996). Cet exercice nécessitait une figure construite à partir d'un carré quelconque. L'enseignant construisait le « carré » en s'appuyant sur la géométrie du quadrillage : les sommets du carré sont construits aux nœuds d'une grille. L'orthogonalité des côtés du carré et leur longueur étaient obtenus par référence aux points de la grille... Malheureusement, la figure ainsi obtenue n'est pas un carré, puisqu'il est possible de la déformer en modifiant la grille utilisée : la seule contrainte sur les sommets est en effet de rester sur les nœuds (c'est-à-dire d'être à coordonnées entières), alors que ceci ne garantit un carré que lorsque le repère est orthonormé... Cette solution montre une méconnaissance du statut de la figure dans un environnement dynamique et surtout une méconnaissance de la spécificité de la géométrie dynamique.

De nouvelles capacités

Les versions 1 et 2.1 de *Calques* n'autorisaient pas l'usage direct d'un outil de l'analyse. Cependant, les demandes furent si pressantes que nous avons récemment rajouté un certain nombre de fonctionnalités. Cette extension des capacités du logiciel peut modifier profondément la perception que les élèves auront de la géométrie. L'enseignant qui prépare une leçon intégrant l'outil informatique doit être conscient des phénomènes que nous allons présenter ici.

Calques version 2.2 autorise les calculs numériques élémentaires sur la mesure d'une distance et d'un angle, la mesure des coordonnées d'un point ou de son affixe. Les valeurs numériques peuvent alors être réutilisées pour créer un point d'après ses coordonnées ou son affixe et il est aussi possible de reporter une longueur ou un angle, de translater un point par un vecteur d'affixe donnée. L'origine du repère ainsi que l'unité peuvent être redéfinis.

Il est indéniable que de telles fonctionnalités augmentent considérablement la puissance [11] du logiciel. Les problèmes d'optimisation peuvent être rendus plus compréhensibles par l'affichage d'une courbe représentant les variations de la variable à optimiser (Figure 9).

La dynamique de *Calques* peut aussi être mise à contribution pour animer des courbes telles que les *courbes de Lissajou* (Figure 10 page suivante). Les principes de manipulation directe propres à un logiciel de géométrie peuvent dès lors s'appliquer à des objets de l'analyse...

Il devient également facile d'étudier des transformations géométriques définies à l'aide de nombres complexes (Figure 11).

D'autres applications dans des domaines très variés peuvent facilement être mises en œuvre : courbe représentative des solutions d'une équation différentielle du second ordre à coefficients directement manipulables, champs de vecteurs, calcul vectoriel, etc.

Ces possibilités sont très encourageantes pour un enseignant qui peut ainsi explorer de nombreux domaines restés jusque là très théoriques. Les élèves profiteront également de nouvelles visualisations qui leur feront sûrement mieux comprendre certains phénomènes dynamiques. Cependant, les expériences menées avec les outils de calcul for-

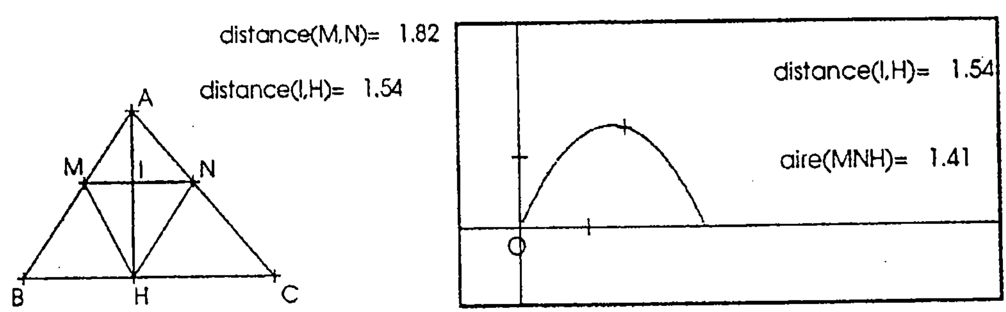


Figure 9. *Un problème d'optimisation : recherche de l'aire maximale du triangle MNH. La courbe représentative de l'aire y en fonction de x, longueur de IH est obtenue comme lieu d'un point de coordonnées (x,y) lorsque I parcourt le segment [AH].*

(11) On pourrait définir la puissance comme étant la quantité de constructions de natures différentes réalisables avec le logiciel.

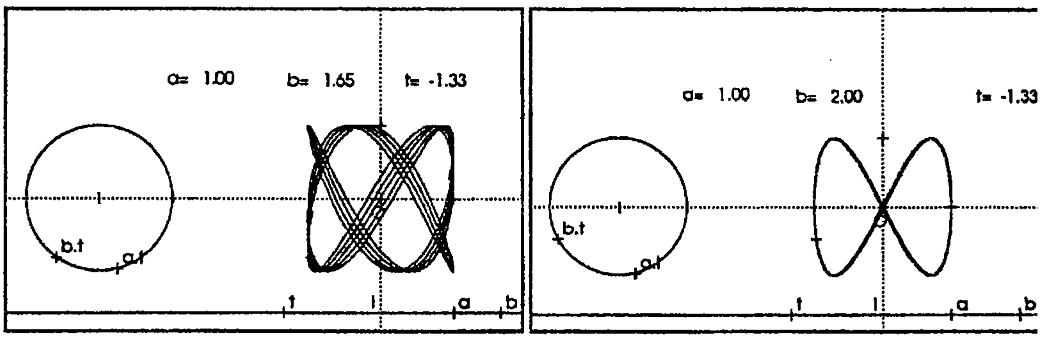


Figure 10. *A partir de l'abscisse des points t, a et b construits sur une droite (D), on calcule a.t et b.t. Ces valeurs sont reportées sur un cercle trigonométrique. On construit un point M de coordonnées (sin(at),sin(bt)). La courbe de Lissajou est le lieu du point M, lorsque t parcourt la droite (D). En déplaçant les point a et b, on fait varier la courbe.*

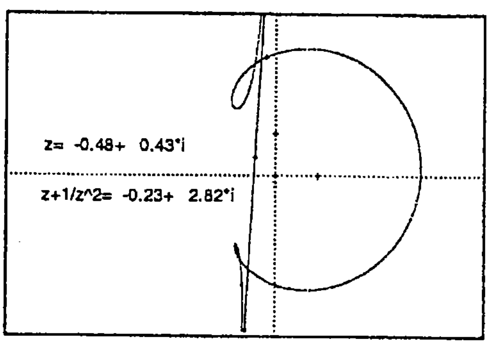


Fig. 11. *On construit un point* M *sur une droite* (D). *On calcule son affixe z puis* $z+\frac{1}{z^2}$. *On construit le point* M' *d'affixe* $Z=z+\frac{1}{z^2}$. *Le transformé de la droite* (D) *par la transformation* $z \mapsto z+\frac{1}{z^2}$ *est le lieu du point* M' *lorsque* M *parcourt* (D). *On peut ensuite déplacer la droite* (D) *pour observer les variations de la courbe.*

mel montrent qu'un outil performant d'un point de vue calculatoire n'est pas forcément un environnement bien adapté à l'enseignement [Artigue 95], [Canet & al. 96]. Les logiciels de constructions géométriques ont parfois tendance à privilégier les performances mathématiques et à devenir davantage des outils pour le mathématicien ou l'enseignant averti que des moyens au service de la pédagogie.

Quelles sont les conséquences pour l'enseignement ?

L'ajout des nombres dans *Calques* et surtout la possibilité d'utiliser ces nombres pour des constructions géométriques peut être un facteur de confusion quant à la compréhension de la place du nombre dans la géométrie. Le nombre peut être la mesure d'une longueur, d'un angle, d'une surface ou un rapport d'homothétie. Tant que l'on ne disposait pas des nombres pour effectuer une construction, la réponse aux questions suivantes se réalisait de manière presque naturelle :

— *Construire un cercle de rayon donné ?*

Le rayon du cercle est défini par un segment (et non par un nombre) que l'on reporte (Figure 12) :

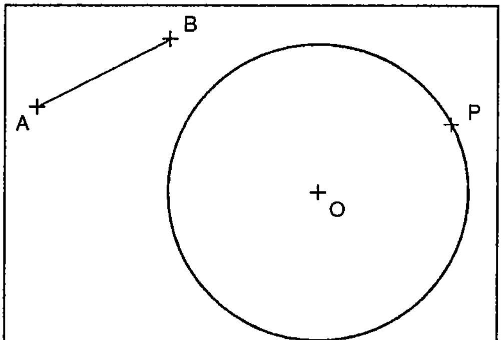


Figure 12. *Le cercle de centre* O *est construit en translatant le segment* AB *en* OP. *On modifie le rayon du cercle en agissant sur le segment* AB.

— *Construire le point* I *divisant le segment* [AB] *dans le rapport* a *?*

Le nombre a est défini comme rapport de longueurs (Figure 13) :

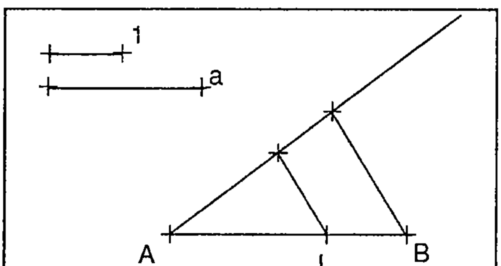


Fig. 13. *Le nombre* a *est défini comme rapport des longueurs du segment noté* a *et d'un segment choisi comme unité, noté* 1. *Ces longueurs sont ensuite reportées et le point* I *est construit en application du théorème de Thalès, tels que* IA/IB = a. *Le nombre* a *peut être modifié en agissant sur le segment* a.

En offrant la possibilité d'utiliser directement des nombres pour réaliser des constructions, il devient facile de construire un cercle de rayon k, où k est une constante ou le résultat d'un calcul. Le rayon d'un cercle peut alors être défini comme résultat du calcul d'une surface ou du produit d'une surface par un angle. Dans ces conditions, quel est le statut exact du nombre ? On perd surtout une notion fondamentale : la mesure de la longueur d'un segment se définit relativement à une unité. Le rapport de deux longueurs est sans unité. Ces nuances peuvent aider à la compréhension de la différence entre rapport d'une homothétie et puissance d'une inversion et d'éviter l'erreur fréquente de parler de rapport d'une inversion.

Dans *Calques*, nous avons essayé de minimiser cette ambiguïté. En particulier, nous n'avons pas voulu définir d'unité de longueur telle que le centimètre, le pouce ou le pixel. Plus simplement, l'*unité de longueur* est définie comme une distance de référence entre deux points. Elle peut être modifiée, les distances affichées sont alors modifiées en conséquence. Les unités telle que le centimètre n'ont pas de statut en mathématiques. L'unité est 1. La norme d'un vecteur unitaire est 1, le produit scalaire de deux vecteurs ne s'exprime pas en centimètres carrés.

Dans d'autres logiciels, tels que *Sketchpad*, les distances sont affichées en centimètres ou en pouces. Ce résultat correspond à la longueur mesurable sur une copie imprimée du dessin. Les calculs effectués avec ces mesures tiennent compte de ces unités. En multipliant deux longueurs, vous obtenez des cm^2. Des résultats plus surprenants peuvent être obtenus, par exemple des cm^4 et même des cm par degrés au carré (*cm-degrees*^{2}) dont on cherche bien le sens (12)... Les résultats avec

(12) Par contre, Sketchpad refuse d'afficher l'unité de la racine carrée de 4 cm.

unités peuvent malgré tout être utilisés comme nombres sans unité ou avec des unités différentes. On comprendra qu'une telle liberté ne facilitera pas la compréhension. D'autre part, dans *Sketchpad*, il n'y a pas de relation directe entre l'unité du repère cartésien et les longueurs. Un segment peut ainsi mesurer 5cm ou 3 (unités mathématiques). La modification de l'unité du repère, ne modifie pas la longueur exprimée en centimètres, ce qui est logique. Mais, quelle va être l'attitude d'un élève à qui on demande de calculer la distance entre les points A(1,2) et B(2,-1) et qui expérimentalement obtient 4,3 (cm) ? Va-t-il comprendre que ce résultat, que l'on peut qualifier de "physique", n'a pas de relation directe avec le résultat mathématique demandé ?... Les nombres autorisent des constructions nouvelles. Le problème de la quadrature du cercle ou celui de la trisection de l'angle ont alors une solution immédiate. Pour construire un carré de même aire que le cercle, il suffit de mesurer le rayon du cercle, de calculer son aire et de construire un carré de côté la racine carrée du dernier résultat. La *cycloïde*, qui est inconstructible à la règle et au compas, peut être obtenue par approximation (Figure 14) ou par report d'une longueur sur un cercle (Figure 15). Comment, dans ces

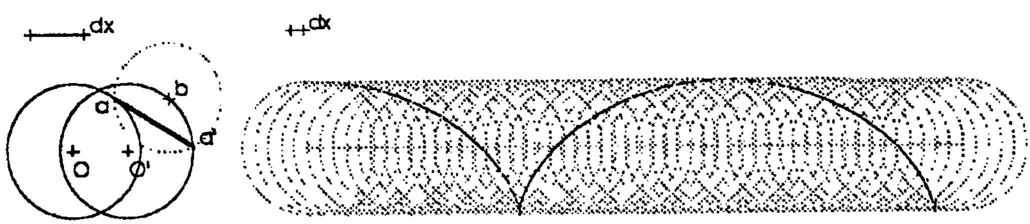


Figure 14. *Construction récursive de la cycloïde. Le cercle avance d'une longueur* dx. *Le point* a *se déplacerait en* b *si le cercle glissait. Comme le cercle tourne, on construit le point* a', *situé sur le cercle, tel que* a'b = dx. *Si* dx *est suffisamment petit, l'arc* a'b *et la corde* a'b *ont à peu près la même longueur. On réitère cette construction en appliquant récursivement* a *sur* a' *et* O *sur* O'.

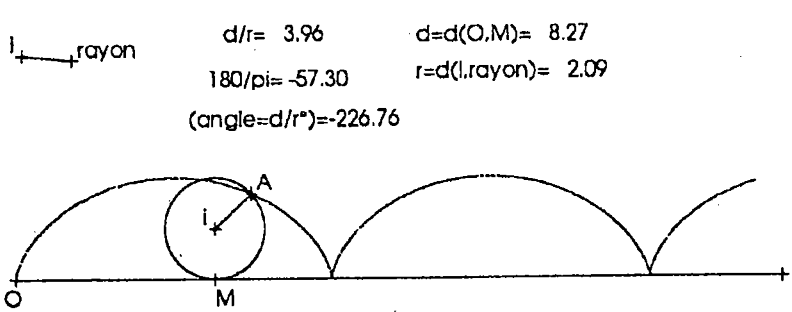


Figure 15. *Construction calculée de la cycloïde. On mesure la longueur* OM *et on calcule, à partir de cette longueur, l'angle* (iM,iA) *qui nous permet de placer le point* A. *La cycloïde est le lieu géométrique de* A *lors du déplacement de* M.

conditions, peut-on justifier à un élève l'impossibilité d'une telle construction ? Il faut définir ce que le terme « construction » signifie : construction à la règle et au compas *versus* construction avec *Calques*. Il faut lui faire admettre — et en cas d'échec lui imposer l'idée ! — que la solution d'un exercice de construction n'a pas à faire intervenir des outils tels que le report de longueur ou le report de la mesure d'un angle.

L'introduction des nombres dans la géométrie ne peut, ou ne devrait, se faire que si les notions de base sont bien acquises. Ainsi, une introduction prématurée du report d'un angle défini par sa mesure risque de rendre vain tout discours sur une définition purement géométrique du concept d'angle ([13]). Pour une « bonne » utilisation d'un logiciel pédagogique, l'enseignant doit donc pouvoir inhiber certaines fonctions et choisir entre différents modes d'interaction. Dans tous les cas, l'enseignant doit avoir conscience de la situation créée par l'introduction d'un tel environnement et être capable d'identifier les choix didactiques à effectuer afin d'adapter l'environnement.

Le problème des "objets"

L'exemple de la cycloïde nous ramène pour conclure au *problème de fond* de tout logiciel de GD : quels sont les *objets mathématiques* sur lesquels travailler et, par conséquent, faire travailler les élèves ?

Notons tout d'abord que, dans *Calques*, les deux cycloïdes des figures 14 et 15 (qu'elles aient été obtenues par l'intermédiaire d'une *construction récursive* ou comme le résultat de *calculs autorisés* par le logiciel), n'ont pas véritablement le statut d'*objets géométriques*, au même titre, par exemple, que les droites et les cercles. Il s'agit bien d'objets *dynamiques* au sens où les modifications de la figure (par action sur les données initiales) entraîneront effectivement le mouvement ou la transformation de ces cycloïdes. De même que tous les *lieux géométriques* ont cette propriété... Mais ces lieux ne sont pas devenus pour autant des "objets" totalement utilisables dans le "micro-monde" offert à l'élève : il est impossible par exemple de *choisir un point qui soit contraint* à rester sur un tel lieu ou même de demander au logicile de *construire son intersection* avec une droite, un cercle ou une autre courbe. Ce sont, en d'autres termes, des *objets visuels*, mais *Calques* ne permet pas de les *intégrer à la géométrie initiale* de manière à l'enrichir par de nouvelles notions.

Les auteurs de logiciels de GD sont de façon cruciale confrontés en permanence à ce genre de problèmes. Ils relèvent évidemment de choix pédagogiques mais passent aussi par le franchissement d'obstacles d'ordres mathématiques et informatiques... Pas plus que d'autres je ne connais de réponse parfaitement légitime ou convaincante à ces questions, mais je voudrais, pour terminer, indiquer quelques aspects de la réflexion qui est à l'origine de *Calques* et de son évolution.

Il est clair tout d'abord que le corpus de constructions et de propriétés géométriques liées à un "univers" dont les objets de base sont les droites et les cercles n'est rien d'autre que ce qu'il convient d'appeler la "géométrie élémentaire" et constitue, d'une certaine manière, un micro-monde très riche et relativement clos. Il suffit pour s'en convaincre de noter que toutes les transformations habituelles (y compris l'inversion) n'obligent pas à sortir de cet environnement. En première analyse, cet aspect des choses justifie donc à lui seul d'envisager un logiciel de GD qui soit limité aux constructions classiques liées à l'usage de la règle et du compas.

(13) Rappelons que la mesure d'un angle est une fonction qui ne peut se définir sans avoir recours à l'analyse.

Il n'en reste pas moins que, même très élémentaire, la géométrie conduit à l'utilisation des *lieux géométriques* qui apportent à leur tour des notions nouvelles : il suffit par exmple de penser à l'introduction des *coniques*, mais aussi à toutes les courbes de degré supérieur ou même aux courbes "transcendantes" telles que la cycloïde... Et cet enrichissement de l'univers des objets n'est en fait rien d'autre que le destin naturel de tout apprentissage de la géométrie !

Mais l'exemple d'un logiciel de GD montre précisément en quels termes se pose le problème de l'introduction progressive de cette nouveauté : *dans quelle mesure des objets rencontrés tout d'abord comme des lieux géométriques plus ou moins compliqués doivent-ils et peuvent-ils acquérir un statut analogue aux objets initiaux ?* Or la réponse à cette question est malheureusement fort décevante : *il n'y a pratiquement aucune chance de parvenir un jour à un tel résultat*, du moins avec une efficacité "épistémologique" qui soit équivalente à ce que l'on attend généralement lorsque l'on envisage le problème comme je l'ai posé jusqu'ici. Prenons quelques exemples...

a) le cas où le lieu est une droite où un cercle

Considérons un problème simple où nous savons que le lieu obtenu est une droite où un cercle. Dans la mesure où il s'agit ici *d'objets de base*, on peut sans conteste trouver naturel que le logiciel considère ces "vrais-faux" nouveaux objets au même titre que les anciens et permette par conséquent de "choisir un point" sur ceux-ci, voire de définir leur intersections avec une autre droite ou un autre cercle.

Mais la question qui se pose est immédiatement celle-ci : comment le logiciel peut-il savoir,

— qu'il a affaire à une droite ou à un cercle,

— qu'il peut remplacer ce "lieu" rencontré en réalité "point par point" par une définition classique de la droite ou du cercle équivalents ? Nous en arrivons donc à la nécessité de répondre à cette question, c'est-à-dire à l'obligation suivante : le logiciel doit disposer d'un "résolveur" de type "intelligence artificielle" capable de "démontrer" que le lieu cherché est bien ce que l'on croit, ou bien le logiciel doit être capable de reconnaître "analytiquement" le genre de courbe simple avec laquelle il est mis en présence...

L'exemple très simple proposé par la figure suivante montre à l'évidence que ce problème est en fait très compliqué, même sans sortir des situations propres à la géométrie élémentaire...

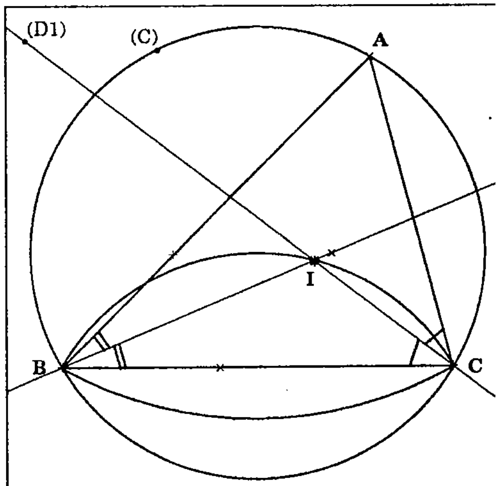


Figure 16. *Lorsque A parcourt le cercle (C), le lieu du centre du cercle inscrit au triangle ABC est constitué de deux arcs...*

b) le cas des coniques

Le problème lié à l'introduction des coniques parmi les *objets de base* est posé (indépendamment du problème précédent) comme un problème de fond constituant une étape vers l'enrichissement de l'univers élémentaire initial. Il est clair que, de même que les droites et les cercles sont "dans la machine" sous forme d'équations, rien n'interdit d'accroître le *corpus* d'objets en y ajoutant toutes les courbes possédant une représentation algébrique (ou analytique) suffisamment maniable. Le problème des coniques montre déjà les limites imposées par les possibilités de *définition* offertes à l'élève : alors qu'un cercle peut naturellement être introduit par son centre et par un de ses points (voire comme le cercle passant par trois points donnés), les multiples façons possibles pour caractériser une conique dans un contexte quelconque conduisent à franchir le pas vers ce qu'il est convenu d'appeler la "géométrie supérieure".

Il nous a semblé jusqu'ici que *Calques* n'était pas prêt à évoluer vers ce domaine dont l'utilité vis-à-vis de l'élève ne nous paraît pas encore manifeste... mais les deux exemples précédents montrent bien que ces questions constituent un important défi pour l'avenir.

Conclusion

Les logiciels de géométrie dynamique (GD) ont été conçus pour *l'enseignement* de la géométrie. Ils offrent de réelles possibilités afin de construire des situations d'enseignement qui mettront en valeur les aspects dynamiques de la géométrie. Cependant, après une période enthousiaste de découverte du logiciel, il convient de s'interroger sur l'impact réel de cet environnement sur l'apprentissage de la géométrie. Ainsi, s'il est possible, dans un but publicitaire, d'insister surtout sur l'ensemble des fonctionnalités nouvelles d'une version à l'autre, une évaluation approfondie doit également porter sur l'adéquation aux différentes périodes du cursus scolaire. Pour que le logiciel ne crée pas de difficultés conceptuelles, les connaissances mises en oeuvre doivent être adaptées et adaptables. Certaines connaissances nécessaires en début d'apprentissage pourront évoluer ou être abandonnées. A contrario, des connaissances trop expertes ne devront pas être accessibles à des débutants.

Les différents logiciels de géométrie dynamique définissent chacun plusieurs géométries qui ne sont pas toujours compatibles entre elles, parfois par les résultats produits, mais surtout par les interactions didactiques qu'elles induisent. Si les logiciels de GD permettent de relier facilement les aspects numériques et géométriques, l'enseignant qui veut utiliser un tel logiciel doit prévoir, pour chaque séquence pédagogique envisagée, quels sont les aspects à mettre en œuvre et quels sont les effets d'un jeu de changement de cadre mal maîtrisé.

La discussion sur la GD semble dérisoire quand on constate la situation en calcul formel. Les outils de calcul formel (CF) n'ont pas été conçus pour l'enseignement. Ce sont des outils destinés, pour les plus puissants d'entre eux, aux mathématiciens. Leur fiabilité vis à vis des mathématiques enseignées peut être très facilement prise en défaut, beaucoup plus facilement que dans le cas de la GD. Les études sur les outils de CF doivent servir de référence à des études analogues en GD. Elles montrent en particulier la nécessité pour l'enseignant de savoir contrôler la situation didactique en restreignant si nécessaire l'espace de liberté offert par le logiciel [Artigue 95]. Cependant, la situation est plus saine en GD : les risques d'induire des représentations fausses ou des conceptions erronées sont moindres car le fonctionnement de type « boîte noire » est relativement réduit. Un outil de CF produit en effet des résultats incontrôlables par l'utilisateur qui n'a pas connaissance de l'algorithme mis en oeuvre. En GD, la plupart des résultats sont compréhensibles car les actions de construction sont décomposées et chaque action est élémentaire. L'apport de la GD est surtout une réalisation plus rapide et plus précise de chaque construction que la même réalisation dans un environnement papier/crayon.

Apparemment, les logiciels de CF apportent quelques solutions mais posent beaucoup de problèmes [Canet & al. 96]. Les logiciels de GD posent quelques problèmes mais apportent beaucoup de solutions principalement grâce à l'aspect dynamique impossible à réaliser dans un environnement papier/crayon. Tous ces environnements créent cependant de nouveaux besoins et induisent une nouvelle conception de l'enseignement des mathématiques. Il convient en tout cas de former ou au moins d'informer les enseignants sur la particularité des connaissances mathématiques contenues dans les environnements de géométrie et dans les outils de calcul formel.

Bibliographie

[Artigue 95] Artigue M., *Un regard didactique sur l'utilisation des outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques,* Repères-Irem n°19, Topiques Ed., p.77-108, 1995

[Balacheff 91] Balacheff N., *Contribution de la didactique et de l'épistémologie aux recherches en EIAO.* C. Bellisant (Ed.) Actes des XIII° Journées Francophones de l'Informatique, Grenoble, IMAG-CNRS, 1991

[Canet & al. 96] Canet J.F.- Delgoulet J. - Guin D. - Trouche L., *Un outil personnel puissant qui nécessite un apprentissage et ne dispense pas toujours de réfléchir,* Repères-Irem n° 25, p.65-81, 1996

[Cuppens 96] Cuppens R., *Quelques réflexions sur le logiciel Cabri-Géomètre,* Bulletin APMEP n°402, p.5-20, 1996

[Edgar 92] Edgar G.A., *Measure, Toplogy and Fractal Geometry,* Springer-Verlag, 1992

[Goldenberg & Cuoco 96] E. Paul Goldenberg and Al Cuoco, *What Is Dynamic Geometry ?* in *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space,* Lehrer, R. and D. Chazan, eds. Hillsdale, NJ: Erlbaum. (to appear)

[Hirlimann 92] Hirlimann A. (ed.)*Activités mathématiques avec imagiciels,* CRDP de Poitiers, 1992

[Laborde 96] Laborde C., *Toward a New Role of Diagram in Dynamic geometry ?,* in *Proceedings of the European Conference of Artificial Intelligence in Education,* P. Brna A. Paive J. Self (Eds), 1996

[Lagrange & Drouhard 95] Lagrange J.B., Drouhard J.P., *L'intégration du système de mathématiques symboliques DERIVE,* Actes des Ive Journées EIAO de Cachan, Guin,D, Nicaud, J.F., Py, D. (Eds), Ed. Eyrolles, Paris, p.327-338, 1995

[MEN 93a] Ministère de l'Education Nationale, *Enseignement des mathématiques et logiciels de calcul formel : Dérive, un outil à intégrer,* Paris : MEN, 1993. - 199 p.

[MEN 93b] Ministère de l'Education Nationale, *Faire des mathématiques au collège avec l'ordinateur,* Paris : MEN, 1993. - 169 p.

[MEN 93c] Ministère de l'Education Nationale, *Faire des mathématiques au lycée avec l'ordinateur,* Paris : MEN, 1993. - 171 p.

[Papert 81] Papert S., *Le Jaillissement de l'esprit.* Flammarion, 1981

[Parzysz 88] Parzysz B., *Knowing vs seeing, problems of the plane representation of space geometry figures,* Educational Studies in Mathematics 19(1), p.79-92, 1988

[Rideau 89] Rideau F., *Les systèmes articulés, Pour la Science* n°136, p. 94-101, 1989

[Thibaut & Labarre 96] Thibaut M.F., Labarre R., *Some Hyperbolic Geometry with Cabri-géomètre,* in *Intelligent Learning Environments, the Case of Geometry,* J.-M. Laborde (Ed)., ASI Series, F vol. 117, Springer Verlag, p. 218-230, 1996

ANNEXE : Géométrie fractale

Nous allons décrire dans cette annexe la réalisation d'un fractal dans un environnement de géométrie dynamique : le *triangle de Sierpinski.*

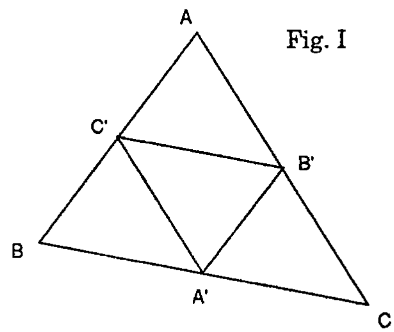


Fig. I

Le triangle de Sierpinski (14) est défini à partir d'un triangle ABC. On construit les milieux A', B' et C' de [BC], [CA] et [AB]. On réitère la construction sur chaque triangle BC'A', AC'B' et C B'A' (Fig. I).

Plus formellement, le fractal est une fonction f des points A, B et C solution de :

$$f(A,B,C)=\left\langle f\left(A,\frac{A+B}{2},\frac{A+C}{2}\right),f\left(B,\frac{B+C}{2},\frac{B+A}{2}\right),f\left(C,\frac{C+A}{2},\frac{C+B}{2}\right),\right\rangle$$

Cette fonction est le plus petit point fixe de la fonctionnelle τ telle que :

$$\tau(f)(A,B,C)=\left\langle f\left(A,\frac{A+B}{2},\frac{A+C}{2}\right),f\left(B,\frac{B+C}{2},\frac{B+A}{2}\right),f\left(C,\frac{C+A}{2},\frac{C+B}{2}\right),\right\rangle$$

On peut donc l'approcher par $\tau^n(f_0)$ avec $f_0(A,B,C)=triangle(A,B,C)$.

Aussi, la représentation informatique de ce fractal est souvent écrite en définissant la fonction récursive f, dépendant d'un paramètre entier n par :

$f(n,A,B,C)=$ si (n=0), alors triangle (A,B,C)

sinon $\langle f(n-1,A,B',C'),f(n-1,B,A',C'),f(n-1,C,B',A')\rangle$

où A', B' et C' sont les milieux des côtés du triangle ABC. L'entier n est la *profondeur de la récursivité*.

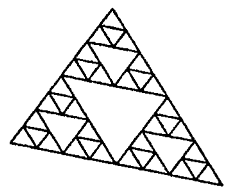
Le fractal peut alors être réalisé par un programme Logo [Edgar 92]. En géométrie dynamique, on peut également réaliser ce fractal, à la profondeur n, en définissant éventuellement, à l'aide de macro-constructions, chacune des fonctions $f(i,a,b,c)$ avec $0 \le i < n$ (voir Fig. II page suivante). Cependant, une telle représentation ne rend pas bien compte de la nature d'un fractal. En effet, en changeant la taille du fractal (en déplaçant les sommets du triangle initial), on *modifie l'échelle*, mais on *ne modifie pas* la forme visible du fractal (Fig. III). On néglige ainsi une caractéristique importante de ce type de fractal : celle de *dimension d'homothétie* (similarity dimension [Edgar 92]). Plus précisément, en doublant la taille du fractal (la longueur des côtés du triangle initial), on obtient un nouveau fractal comportant 3 copies du fractal initial. On dit que le fractal est *homothétique interne* (self-similarity) et que sa *dimension d'homothétie* (15) est $\frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,58496$.

(14) Ce fractal est aussi connu sous le nom de « joint de culasse de Sierpinski » (Sierpinski gasket).

(15) La dimension d'homothétie d'un carré est d=2, car en doublant un carré, on obtient un carré contenant 4 copies du carré initial: $2^d=4$. Celle d'un cube est d=3, car en doublant les côtés d'un cube, on obtient un cube contenant 8 copies du cube initial : $2^d=8$. La dimension d'homothétie du triangle de Sierpinski est d, tel que $2^d=3$.

Fig. II, III, IV : différence entre les deux types de constructions. *Lorsque le triangle de Sierpinski de la figure II est grossi, il subit une simple homothétie dans une définition standard (Fig. III) alors qu'il s'enrichit en profondeur dans une définition récursive (Fig. IV).*

Fig. II.



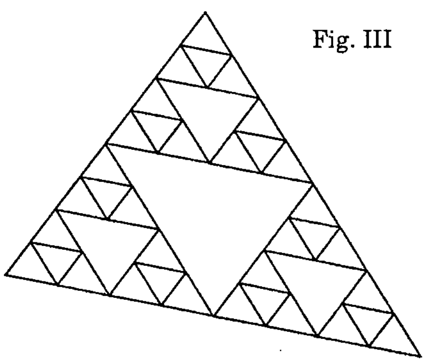
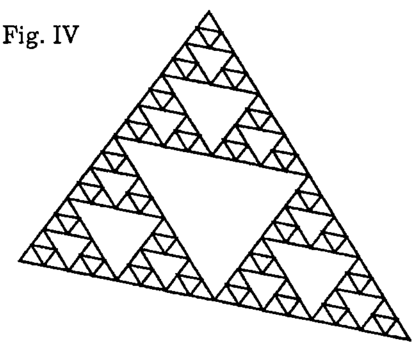


Fig. III

Fig. IV



Il existe en fait trois homothéties ([16]) du fractal sur une partie stricte de lui-même et la dimension d'homothétie (comprise entre 1 et 2) indique que le fractal a des propriétés intermédiaires entre les propriétés d'un segment et celles d'un carré. Pour visualiser cette propriété d'homothétie interne, il faudrait remplacer le test d'arrêt de la récursivité « si n=0 » par un test portant, non sur la profondeur de la récursivité, mais sur la taille du plus petit triangle visible. On peut en effet considérer que l'on a une vision fidèle du fractal, si les seuls segments non dessinés sont ceux dont la longueur est inférieure à une valeur ε assez petite (correspondant par exemple au pouvoir de séparation de l'œil).

La définition du fractal serait alors :

$f(A,B,C) =$ si inf(AB,BC,CA) < ε alors triangle (A,B,C)

sinon $\langle f(n-1,A,B',C'), f(n-1,B,A',C'), f(n-1,C,B',A')\rangle$

La version 2.2 de *Calques* accepte les constructions récursives. La condition d'arrêt d'une construction récursive définie par :

f(x) := si *condition* alors y sinon *f(a)*

est *l'impossibilité de la construction* de f(a). C'est-à-dire que si la fonction f n'est pas définie pour a, la récursivité s'arrête. Il suffit donc de construire les milieux des côtés du tri-

(16) Le terme similitude serait mieux adapté car plus général et correspondrait d'ailleurs à une traduction plus fidèle de l'anglais.

angle ABC de telle sorte que ces milieux n'existent pas si l'un des côtés a une longueur inférieure à ε. La Fig. V donne une idée de cette construction bien qu'elle ne soit pas exactement conforme à la définition proposée.

On définit ensuite trois récursions en appliquant A et C sur C' et A', puis B et C sur C' et B' et enfin A et B sur B' et A'. Cette définition de la récursion se fait très simplement, par manipulation directe, en saisissant les points et en les amenant sur leurs correspondants. Le résultat de la Fig. II dépend de ε, visualisé par la longueur du segment [Oe].

La Fig. IV montre alors le fractal défini avec la même valeur de ε, *pour un triangle initial de taille double*.

Cette réalisation modélise assez fidèlement l'homothétie interne du fractal. De plus, en diminuant la valeur de ε, on obtient une représentation du triangle de Sierpinski à une profondeur de récursivité supérieure... et on augmente sensiblement le temps de calcul [17].

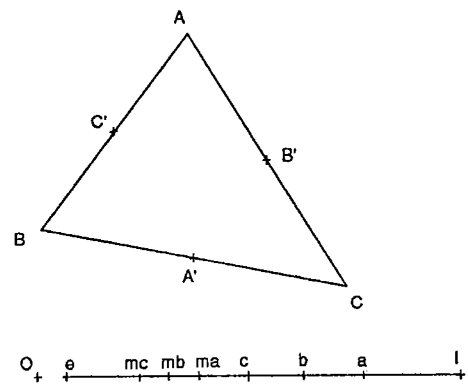


Fig. V. On définit la valeur limite ε, en plaçant un point e sur un segment [OI]. ε =Oe. On efface le segment [OI] et on trace le segment [eI]. Pour construire le milieu de [AB], dépendant de la condition AB > ε, on reporte le segment AB en Oc en translatant en O le segment, puis en construisant le point c comme intersection d'un cercle de centre O passant par le point ainsi translaté et le segment [eI]. Le point c est ainsi défini par Oc=AB et Oc > ε. On construit ensuite le milieu mc de [Oc]. Ce point n'existe donc que si AB > ε. On reporte ce point sur le segment [AB]. On construit de la même manière les milieux des deux autres côtés.

(17) A une profondeur n, le nombre de triangles construits est de l'ordre de 3^n. Ce résultat peut se déduire par récurrence de l'algorithme récursif dépendant de n.

Post-Scriptum
(par Philippe Lombard)

Accepté par Repères en décembre dernier, cet texte sera malheureusement le dernier article de Philippe Bernat : il nous a quittés le premier janvier 1997, emporté par une hémorragie interne à l'âge de 49 ans.

Bien sûr, les mots ne consolent guère, même s'ils parviennent quelquefois à exprimer la tristesse, et les hommages posthumes nous font souvent prendre le risque de la maladresse, car ils nous obligent à tenter d'expri-

mer tout haut ce qui faisait de celui qui nous manque brusquement un agréable compagnon de tous les jours... Un peu comme si la vague que nous suivons parfois longuement du regard, depuis le rivage — tout simplement parce qu'elle nous semble plus belle, plus changeante, plus haute ou plus forte que les autres — ne se mettait à acquérir de sens qu'à partir du moment où elle viendrait s'échouer sur la grève... en ne nous laissant déjà plus que quelques images gravées dans la mémoire... télescopées par la tristesse... et qu'il nous faille les rassembler pour les dire... Permettez-moi cependant d'écrire ici, en quelques lignes, l'émotion suscitée par cette disparition chez les nombreux amis de l'Irem de Lorraine ou de la Commission Inter-Irem Informatique que lui avaient valu sa modestie, son intelligence et sa gentillesse, et d'essayer de traduire ce que Philippe Bernat représente pour nous tous, ce qu'il nous a appris depuis qu'il a commencé à s'investir dans la création de logiciels destinés aux élèves, et ceci dans un parcours peu commun mais sous-tendu par une passion que nous connaissons bien puisque c'est celle de l'enseignement des mathématiques.

Il est, en effet, peu courant de découvrir l'informatique au début des années quatre vingt avec l'apparition des premiers To7 et autres Mo5, pour en arriver à soutenir, en 1995, une thèse d'Université fondée sur un logiciel d'aide au raisonnement et à la démonstration en géométrie élémentaire... Mais je laisserai à d'autres le soin de dire en quoi ce "Grand-Œuvre" est particulièrement original en matière de réflexion sur ce qu'il est convenu d'appeler un peu vite "l'intelligence artificielle", et aussi combien de difficultés techniques il a dû surmonter peu à peu, ne serait-ce que par la nécessité d'intégrer à la partie consacrée à la démarche de démonstration, rien moins qu'un logiciel complet de constructions géométriques. Je voudrais surtout m'attacher à ce dont les utilisateurs, les zélateurs, ou même les détracteurs, de telles expériences sont généralement moins conscients : la dose d'intelligence, d'astuce permanente et d'ouverture d'esprit qui sont nécessaires pour progresser dans ce genre de recherches.

Ceux qui ont déjà tenté un tant soit peu de créer d'un bout à l'autre le moindre petit programme savent ce que peuvent signifier les heures passées devant son écran ou sa feuille de papier pour surmonter les obstacles qui surgissent à chaque pas ; pour éliminer les fameux "bugs", pour mettre au point les "procédures", pour ruser à chaque instant avec tous les paramètres, pour prendre en compte tous les cas de figures, pour optimiser un algorithme, etc., etc. Ils savent les déceptions face aux caprices apparents d'un programme qui se refuse obstinément à fonctionner comme on le souhaiterait — tout bonnement parce que l'on a oublié un détail et que l'informatique est une technique qui ne supporte pas les à-peu-près — ils savent aussi, à l'inverse, le plaisir si difficilement communicable qui les envahit lorsque le travail accompli se trouve récompensé par un logiciel qui "veut bien tourner" et accepter enfin de traduire une partie de tout ce que l'on aurait désiré, au départ, lui voir capable de réaliser...

Ils savent tout cela, mais ils savent surtout que le travail apparent de ces alchimistes du vingtième siècle que sont les créateurs de programmes n'est en réalité que la surface des choses, l'écume visible à la crête de la vague... Certes, les milliers d'heures apparemment consacrées à l'ordinateur, les longs moments de méditation pendant lesquels le monde extérieur ne semble plus exister qu'à l'aune d'un point de syntaxe négligé, d'une boucle qui s'ingénie à se "planter" ou d'un appel récursif qui détruit obstinément les données que l'on voudrait conserver, et toute cette "alchimie" impénétrable aux profanes font irrésistiblement songer à ces amoureux de science qui passaient leurs nuits dans leur laboratoire à surveiller leurs fourneaux en compagnie de leurs *cornues et de leurs mortiers : une alchimie moderne où les vases, les alambics et les creusets de jadis auraient laissé la place aux "pixels", aux "octets", aux "pointeurs", aux "piles", aux "interfaces", aux "commandes"... et où tous les grimoires d'antan ne prendraient plus la forme que de disquettes, de CD-ROM ou de listings...*

Mais l'objectif ultime de l'alchimie "opératoire" n'était-il pas la transformation de l'alchimiste lui-même ? Le Grand-Œuvre qui était censé couronner le labeur n'avait-il pas précisément pour but de révéler à l'adepte la "connaissance" de toute chose ?

Les quelques passionnés d'informatique qui ont suivi la voie choisie par Philippe Bernat ne se contenteraient donc pas de la description superficielle que j'ai pu en donner jusqu'à présent. Ils savent que l'essentiel de leur quête n'est rien d'autre que d'avancer sur le chemin de cette "connaissance" qui, pour eux comme pour beaucoup d'entre nous, s'appelle parfois "culture", "progrès", "science", "mathématiques", "géométrie"... mais qui, quel que soit le nom sous lequel on cherche à la délimiter, motive les heures passées à son amélioration et à son enseignement. Ils savent que, contrairement aux sciences occultes comme l'alchimie, qui se piquaient d'ésotérisme, d'élitisme et de secret, le moteur du progrès est précisément ici dans la transmission des connaissances et des méthodes. Celui qui cherche à plier la machine à son savoir-faire pour lui donner un semblant d'esprit ne cherche rien d'autre qu'à comprendre lui-même, en définitive, les arcanes de la pensée, afin de pouvoir transmettre aux autres ce qui pourrait le mieux les aider à comprendre et découvrir à leur tour... Et c'est au travers de cette quête de l'esprit — de son fonctionnement, de son éducation — qu'ils trouvent un accomplissement pour eux-mêmes, et que leur œuvre nous conserve une parcelle de leurs avancées, dont il convient à chacun de profiter, qu'il convient à chacun de saisir et de prolonger...

Autodidacte de l'informatique, Philippe Bernat a réussi dans cette quête, car il a su satisfaire sa passion et nous laisser les traces d'un travail créateur que je souhaiterais à chacun de pouvoir apprécier à sa juste valeur. D'autres — ses fils peut-être — ne manqueront pas, je l'espère, d'en tirer profit ; ils apporteront à leur tour leur pierre à l'édifice, tout en sachant que celui-ci, malheureusement, ne saurait jamais être complètement achevé, mais que sa construction ne saurait encore moins s'interrompre, poursuivie sans cesse des parents aux enfants, des maîtres aux élèves...

Parce que — tout comme celles que nous suivons avec attachement du regard — les vagues ne meurent jamais...

Qu'elles hésitent et se fragmentent contre les rochers, qu'elles se brisent en ricochant sur les falaises, qu'elles semblent arrêter leur course en déferlant par dessus les jetées ou qu'elles s'étirent lentement, comme épuisées, sur le sable de la plage ; toujours celles que nous croyons voir disparaître ne sont qu'une infime parcelle des vraies qui les animent et les dirigent... De celles qui, par delà les brisants et les caps bordant notre vue, poursuivent inlassablement leur course, au delà des jetées, au delà des falaises ou des continents, au delà de l'horizon,... là-bas, au loin...

A jamais.