

---

## LE POINT DE TORRICELLI D'UN TRIANGLE

---

Bernard BETTINELLI  
IREM de Besançon

### I. INTRODUCTION

Le triangle est la figure géométrique la plus étudiée de la géométrie. C'est l'instrument de base pour toutes les comparaisons de longueurs, aires et angles dans la géométrie grecque, en particulier à cause de ce critère fondamental qui affirme que 2 triangles sont semblables – c'est-à-dire ont mêmes angles, et toutes leurs longueurs correspondantes dans le même rapport – dès qu'ils ont 2 angles égaux. (Peut-être serait-il intéressant de reconsidérer l'importance et la simplicité toute perceptive de ce critère, plutôt que d'introduire des projections parallèles et homothéties dans une première approche de résultats capitaux comme les théorèmes de Thalès et Pythagore ?)

Une autre originalité des triangles tient au fait que n'ayant aucun centre

réel de symétrie ou rotation, les géomètres lui ont inventé une foule de centres différents : centre de gravité, orthocentre, centres des cercles inscrit et circonscrit pour les plus courants. Le centre de Torricelli - aussi nommé point de Fermat -, beaucoup moins commun, possède un ensemble de qualités remarquables, aux confins de la géométrie et de la physique, combinant des notions d'angles, de minimum de longueur, de forces et d'énergie, de calcul différentiel.

### II. ASPECT GÉOMÉTRIQUE

On trouve une excellente introduction à cette étude dans la construction suivante :

Autour d'un triangle ABC (direct) quelconque, on construit un triangle équilatéral sur chacun de ses côtés, comme sur la figure 1. Les segments  $[AA']$ ,  $[BB']$  et

**LE POINT DE TORRICELLI  
D'UN TRIANGLE**

[CC'] semblent avoir des relations d'une étonnante coïncidence :

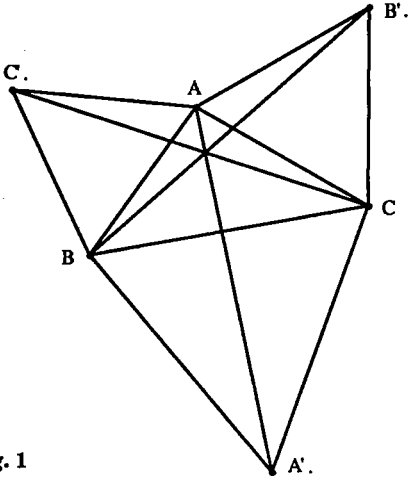


Fig. 1

- ils ont même longueur
- ils sont concourants
- ils découpent le plan autour de leur point commun T en 6 angles de  $\frac{\pi}{3}$ .

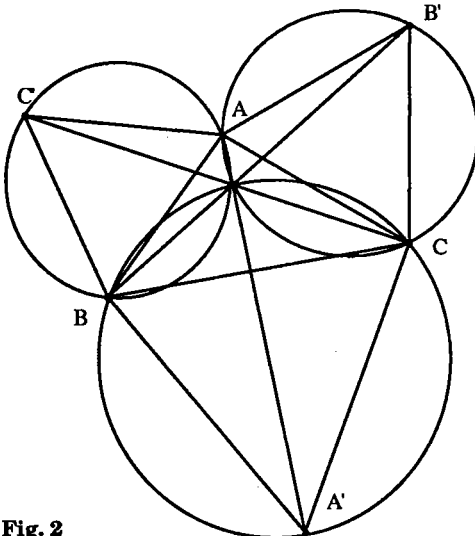


Fig. 2

On peut compléter cette figure de plusieurs façons. D'abord en construisant les 3 cercles circonscrits aux 3 triangles équilatéraux (Fig. 2) ; ensuite en construisant le triangle de sommets les centres des 3 triangles équilatéraux (Fig. 3).

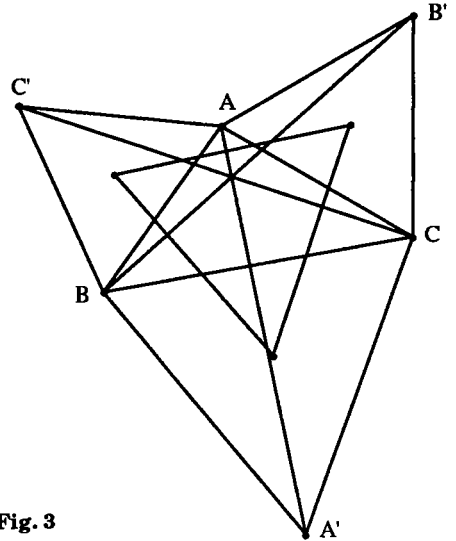


Fig. 3

Les 3 cercles semblent passer au point de concours des 3 segments [AA'], [BB'], [CC'] ; le triangle de sommets les centres des 3 triangles équilatéraux – dit triangle de Napoléon du triangle ABC – semble être équilatéral.

Ces constats se réalisent-ils dans tous les cas de figure ? Non, dans le cas d'un triangle « très plat » (Fig. 4), les 3 segments ne sont plus concourants.

Cependant il semble que les droites (AA'), (BB'), (CC') le soient toujours ; et de même pour les cercles circonscrits et le triangle de Napoléon de ABC est toujours équilatéral (Fig. 5 et 6)

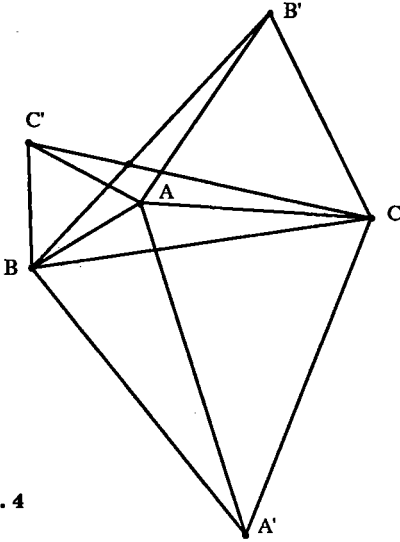


Fig. 4

Les raisons de ces coïncidences sont les suivantes :

1) La rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$  déplace B' en C et B en C', donc [B'B] en

[CC'] ; et de même pour les rotations de centres B et C et de même angle. Donc les 3 segments ont même longueur et ont deux à deux un angle de  $\frac{\pi}{3}$ .

2) Si T est le point commun à (BB') et (CC'),  $(\vec{TC}, \vec{TB}) = (\vec{TC}, \vec{TB}') = \frac{\pi}{3} (\pi)$ . Par le théorème de l'angle inscrit, les cercles circonscrits aux triangles ABC' et AB'C se coupent en T.

L'angle  $(\vec{TB}, \vec{TC}) = (\vec{TB}, \vec{TA}) + (\vec{TA}, \vec{TC}) = \frac{\pi}{3} (\pi)$  ; donc T est sur le cercle circonscrit à A'BC.

3) Le fait que les 3 cercles sont concourants entraîne que les 3 droites (AA'), (BB'), (CC') le sont aussi (par permutation de A, B, C).

4) Les 3 segments [AA'], [BB'], [CC'] sont alors concourants lorsqu'ils passent tous trois à l'intérieur du triangle ABC, donc lorsque les 3 quadrilatères ABCB', BCAC', CABA' sont convexes ; ou encore lorsque les

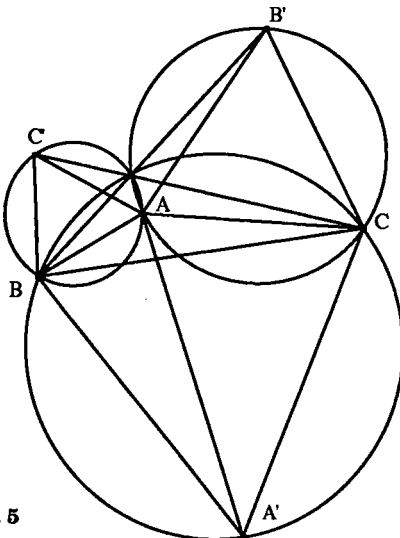


Fig. 5

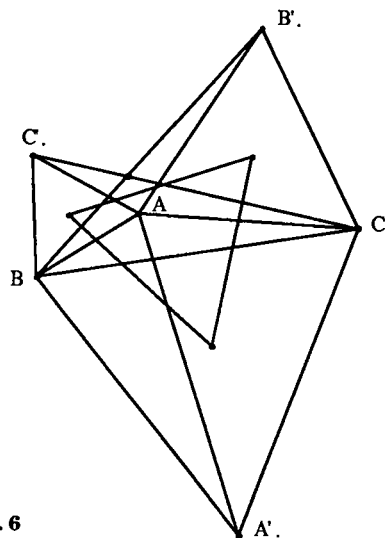


Fig. 6

**LE POINT DE TORRICELLI  
D'UN TRIANGLE**

3 angles du triangles ABC sont inférieurs à  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ .

5) Les côtés du triangle de Napoléon se déduisent chacun d'un des 3 segments [AA'], [BB'], [CC'] par une similitude directe de centre un des sommets de ABC, d'angle  $\frac{\pi}{6}$  et de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  ; ils ont donc même longueur.

Une définition s'en déduit :

**Le point de Torricelli - ou de Fermat - de ABC est le point de concours des droites (AA'), (BB'), (CC') ou encore celui des cercles circonscrits à ABC', BCA', CAB'.**

**Ce point est intérieur au triangle si et seulement si ses 3 angles sont inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$  et, dans ce cas, c'est celui d'où on voit les 3 côtés d'un triangle sous le même angle (de  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ ).**

**III. ASPECT PHYSIQUE**

Lorsqu'on dispose 2 poulies et qu'on pend aux 2 extrémités d'un fil 2 masses égales, l'équilibre est indifférent :

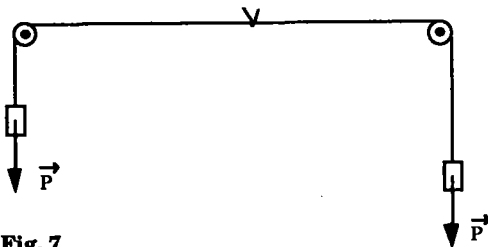


Fig. 7

Si on fait 3 trous en triangle dans une table horizontale, et que d'un nœud,

partent 3 ficelles passant dans les trous aux extrémités desquelles sont suspendues des masses égales, le nœud se stabilise au point de Torricelli du triangle des 3 trous, lorsque ce point est intérieur au triangle (et en supposant qu'il n'y ait aucun frottement) :

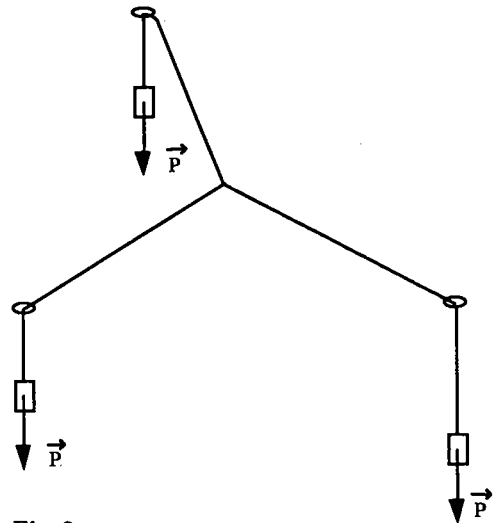


Fig. 8

La raison tient dans la construction vectorielle simple des 3 forces s'exerçant sur le nœud, de même module et dont la somme est nulle en un point d'équilibre.

Le parallélogramme de 2 des 3 forces est un losange dont une diagonale est égale aux côtés, donc un double triangle équilatéral. Ce qui impose que les 3 ficelles font entre elles des angles de  $\frac{2\pi}{3}$  (Fig. 9)

Si l'un des angles (en A) est supérieur à  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ , le nœud se stabilise en A. (Si le nœud est tiré vers un point quelconque de la table, il revient en A ; s'il descend dans le trou A, les masses en B et C exercent une

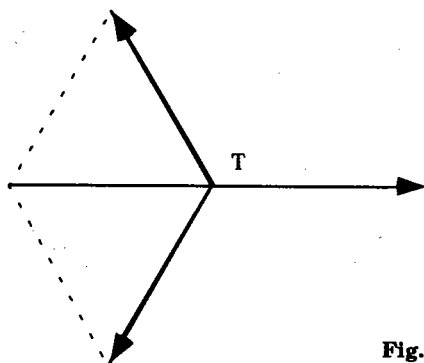


Fig. 9

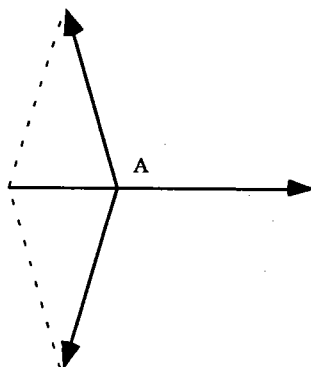
force verticale ascendante de  $2\vec{P}$  contre la force descendante  $\vec{P}$  et le nœud remonte). L'équilibre fait intervenir une réaction de la table au niveau où le nœud touche le bord du trou pour que la somme des forces soit  $\vec{0}$ .

Une autre constatation s'impose : une position d'équilibre est une position d'énergie minimale. Donc l'équilibre des 3 masses égales se fait lorsque l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire lorsque les masses sont globalement le plus bas possible, donc lorsque la somme des 3 longueurs de fil intérieures au triangle est minimale.

#### IV. MINIMUM DE LA SOMME DES LONGUEURS : $MA + MB + MC$

Le résultat principal lié au point de Torricelli et que nous venons d'apercevoir est que :

**Si 3 points A, B, C du plan sont donnés (tels que les 3 angles du triangle ABC soient inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$ ), l'unique point pour lequel la somme**



**des distances aux points A, B, C :  $f(M) = MA + MB + MC$  est minimale, est le point de Torricelli du triangle ABC.**

En voici une démonstration géométrique simple qui m'a été proposée par M.-J. Perrin :

On suppose que les angles de ABC sont tous inférieurs à  $\frac{2\pi}{3}$ . Pour tout point M du plan, on appelle  $M'$  son image par la rotation de centre B et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . Par rotation,  $AM = C'M'$  et le triangle  $BMM'$  étant équilatéral,  $BM = MM'$ . Donc :  $f(M) = AM + BM + CM = CM + MM' + M'C'$  est la longueur de la ligne brisée  $CMM'C'$  ; et cette longueur est au moins égale à  $CC'$  par l'inégalité triangulaire (Fig 10).

$f$  est minimale pour tout point M, s'il existe, tel que M et  $M'$  soient alignés dans cet ordre entre C et  $C'$ . Or T est sur  $[CC']$  ; T est aussi sur  $[AA']$ , donc T est sur  $[CC']$  ; et c'est le seul point M du plan tel que M et  $M'$  soient sur  $[CC']$ . De plus, les mesures principales des angles  $(\vec{BC}, \vec{BM})$ ,  $(\vec{BC}, \vec{BM})$ ,  $(\vec{BC}, \vec{BC})$  sont en ordre croissant entre 0 et  $\pi$  ; donc les points C, M,  $M'$ ,  $C'$  sont

**LE POINT DE TORRICELLI  
D'UN TRIANGLE**

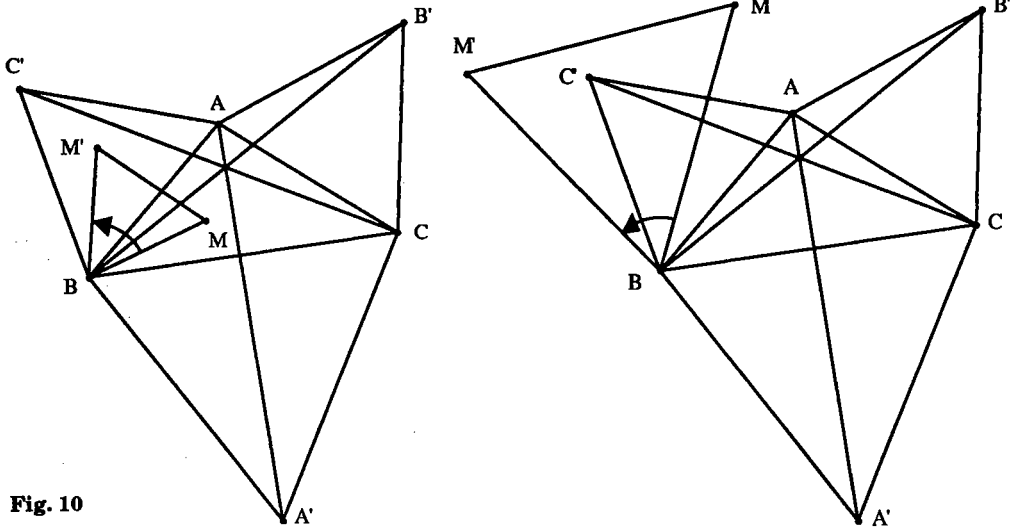


Fig. 10

ordonnés sur  $[CC']$  et T est donc l'unique point pour lequel f est minimale (Fig 11).

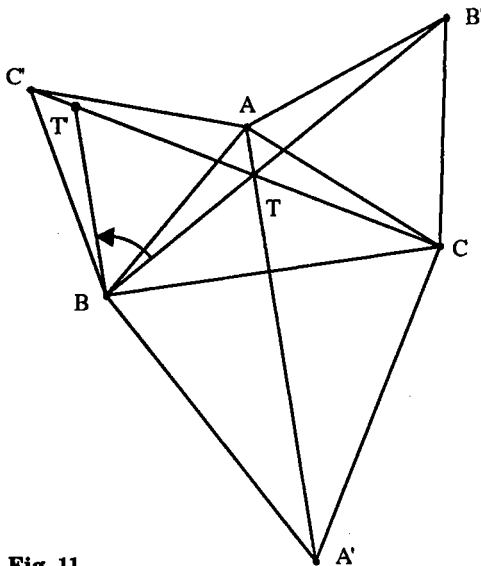


Fig. 11

Une solution étonnante et remarquablement concise de ce problème est offerte par la traduction du problème dans le plan complexe :

On suppose que les angles de ABC sont tous inférieurs à  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ . Dans le repère orthonormal direct  $(T; \vec{u}, \vec{v})$  où  $\vec{AB} = TA \cdot \vec{u}$ , et a, b, c sont les affixes de A, B, C, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |a| + |b| + |c| \leq |z-a| + |z-b| + |z-c|$$

Voici la raison. Parce que T est le point de Torricelli :

$$a = |a| ; b = |b|j ; c = |c|j^2$$

1, j,  $j^2$  étant les 3 racines cubiques de l'unité vérifient :  $1 + j + j^2 = 0$

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= a + b.j^2 + c.j \quad (|b| = b.j^2 ; |c| = c.j) \\ &= a + b.j^2 + c.j - (1 + j + j^2).z \\ &= (a - z) + j^2.(b - z) + j.(c - z) \\ &= |(a - z) + j^2.(b - z) + j.(c - z)| \\ &\quad (\text{car } |a| + |b| + |c| \in \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

Et l'inégalité triangulaire appliquée au second membre permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &\leq |a - z| + |j^2.(b - z)| + |j.(c - z)| \\ &\leq |a - z| + |j^2| . |b - z| + |j| . |c - z| \\ &\leq |a - z| + |b - z| + |c - z| . \end{aligned}$$

L'apparition de  $z$  tient du miracle et la manipulation algébrique d'un réel pris comme complexe est d'une finesse rare.

Ce résultat algébrique s'interprète géométriquement par le fait que  $T$  est l'unique point où la fonction  $f : M \mapsto MA + MB + MC$  atteint son minimum.

**V. ASPECT DIFFÉRENTIEL**

L'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $M \mapsto MA$ , est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , différentiable sauf en  $A$  et sa différentielle en  $M \neq A$  est l'application :  $\vec{v} \mapsto \frac{\vec{MA}}{MA} \cdot \vec{v}$ .

L'application  $f$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $M \mapsto MA + MB + MC$ , est continue sur  $\mathbb{R}^2$ , différentiable sauf en  $A, B, C$  et sa différentielle en  $M \notin \{A, B, C\}$  est l'application :

$$\vec{v} \mapsto \left( \frac{\vec{MA}}{MA} + \frac{\vec{MB}}{MB} + \frac{\vec{MC}}{MC} \right) \cdot \vec{v} .$$

D'après l'inégalité triangulaire, pour tout point  $M \in \mathcal{T}$ , il existe un point du triangle fermé  $\mathcal{T}$  tel que :  $f(M') \leq f(M)$ . Donc si le minimum de  $f$  est atteint, c'est en un point de  $\mathcal{T}$  (Fig. 12).

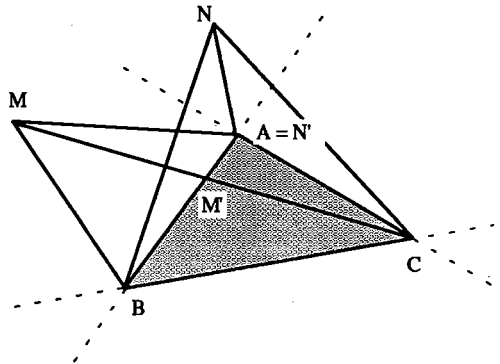


Fig. 12

Mais  $\mathcal{T}$  étant compact et  $f$  continue, il est atteint en au moins un point de  $\mathcal{T}$ . Ce point ne peut être que  $T$  en lequel la différentielle de  $f$  est nulle ou  $A, B, C$ .

Lorsque  $T$  est intérieur à  $\mathcal{T}$ ,  $T$  est effectivement l'unique point où  $f$  atteint son minimum. Sinon, par exemple si l'angle en  $A$  est supérieur à  $\frac{2 \cdot \pi}{3}$ ,  $T$  est extérieur, donc ne peut être le minimum ; ni  $B$  ni  $C$  ne le sont, ce qu'on vérifie en prenant des points voisins de  $B$  sur  $(AB)$  (ou de  $C$  sur  $(AC)$ ). Donc  $f$  atteint son minimum en  $A$ .

**VI. EXTENSION**

Steinhaus (1) propose une extension

(1) H. Steinhaus : *Mathématiques en instantanés*, Ed. Flammarion.

**LE POINT DE TORRICELLI  
D'UN TRIANGLE**

intéressante de ce problème de minimum : si, aux 3 ficelles de l'expérience physique de la partie III, on pend 3 masses  $m_1, m_2, m_3$ , le nœud se stabilise en général en un point U qui est une sorte de « barycentre » ou plutôt « centre d'attraction » des 3 points (Fig. 13).

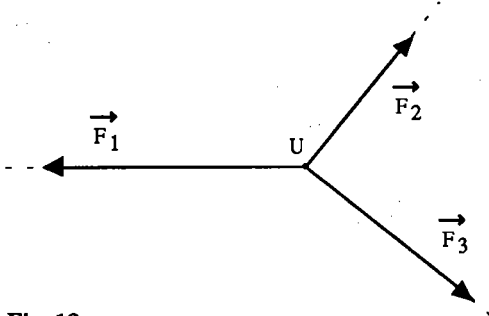


Fig. 13

U est caractérisé par le fait que les forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  ont des modules proportionnels à  $m_1, m_2, m_3$  et :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

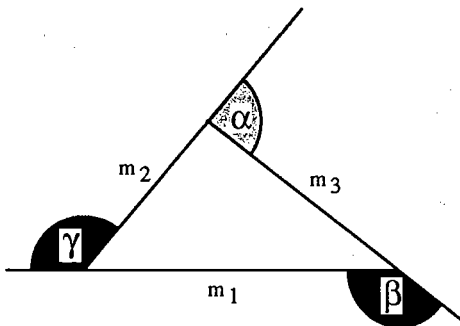


Fig. 14

Pour construire le point U, on construit un triangle à partir de 3 longueurs proportionnelles à  $m_1, m_2, m_3$  dont les côtés représenteront les 3 forces et dont les angles extérieurs seront les angles formés par les 3 forces (Fig. 14).

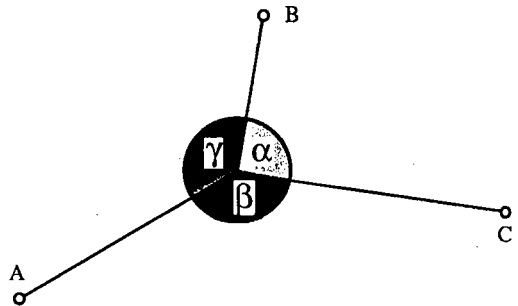
Pour déterminer la position de U dans le triangle ABC, on peut :

- soit dessiner sur un calque 3 demi-droites de même origine faisant entre eux les angles  $\alpha, \beta, \gamma$  du triangle (semblable à la figure 13), et déplacer le calque pour que chaque demi-droite passe par le sommet correspondant,

- soit déterminer les « cercles capables » de deux des trois angles tels qu'on voie [BC] sous  $\alpha$ , [CA] sous  $\beta$ , [AB] sous  $\gamma$  ; U sera leur point de concours.

La relation « attractive » (différentielle et équilibre physique des forces) peut se traduire par :

$$m_1 \cdot \frac{\vec{UA}}{UA} + m_2 \cdot \frac{\vec{UB}}{UB} + m_3 \cdot \frac{\vec{UC}}{UC} = \vec{0}$$





et le principe de l'équilibre à énergie potentielle globale minimale par :

$$\forall M \in \mathcal{P}, m_1.UA + m_2.UB + m_3.UC \leq m_1.MA + m_2.MB + m_3.MC .$$

La traduction et la démonstration par nombres complexes est copiée sur la précédente, dans un repère orthonormal direct d'origine U :

$$\forall z \in \mathbb{C}, m_1.|a| + m_2.|b| + m_3.|c| \leq m_1.|z - a| + m_2.|z - b| + m_3.|z - c|$$

Il suffit de poser :

$$p = \frac{a}{|a|}; q = \frac{b}{|b|}; r = \frac{c}{|c|}$$

et la position de U se traduit par :

$$m_1.p + m_2.q + m_3.r = 0.$$

La suite est identique :

$$|a| = a.\bar{p}; |b| = b.\bar{q}; |c| = c.\bar{r}$$

$$\begin{aligned} m_1.|a| + m_2.|b| + m_3.|c| &= m_1.a.\bar{p} + m_2.b.\bar{q} + m_3.c.\bar{r} \\ &= m_1.a.\bar{p} + m_2.b.\bar{q} + m_3.c.\bar{r} \\ &\quad - (m_1.\bar{p} + m_2.\bar{q} + m_3.\bar{r}).z \end{aligned}$$

...

Malheureusement, ce centre d'attraction ne bénéficie pas de la propriété d'associativité qui donne son caractère d'outil au barycentre.

Il reste à voir à quelles conditions U existe et, s'il existe quand il est intérieur au triangle. U existe si le triangle des forces existe, c.-à-d. si chaque masse est inférieure à la somme des deux autres, par l'inégalité triangulaire. (Dans le cas

contraire, la plus grande entrainera le nœud dans son trou !)

U est intérieur si  $\hat{A} < \alpha; \hat{B} < \beta; \hat{C} < \gamma$ . A ces deux conditions U est le point d'équilibre de l'expérience physique et le point où la fonction  $g : M \mapsto m_1.MA + m_2.MB + m_3.MC$  atteint son minimum.

L'application amusante qu'en fait Steinhilber est le problème des 3 écoles :

3 villages A, B, C ayant respectivement a, b, c enfants à scolariser décident de construire un groupe scolaire commun. Où doivent-ils le placer pour que l'ensemble des trajets des enfants soit minimal ?

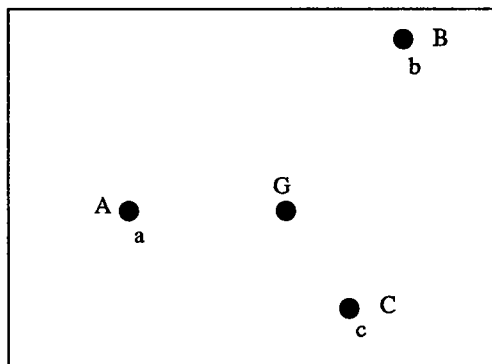


Fig. 15

C'est, bien sûr, le centre d'attraction défini ci-dessus avec des masses proportionnelles à a, b, c qui constitue la réponse et dont j'ai donné la construction.

Une autre matérialisation du problème consiste à rechercher où placer un central téléphonique (ou une station d'épuration) desservant 3 villages afin d'avoir une longueur minimale de fils (de tuyaux) à installer.

---

LE POINT DE TORRICELLI  
D'UN TRIANGLE

---

## VII. CONCLUSION

Ce thème d'étude m'a intéressé d'abord par son aspect pluridisciplinaire et la variété des points de vue qu'il offre, mais aussi par l'intervention sophistiquée des nombres complexes comme outil de démonstration.

J'espère, par ce texte, communiquer un étonnement qui me semble, pour des étudiants, un moyen affectif et quasi esthétique d'ouvrir une relation positive avec l'activité mathématique.