REPERES - IREM . N° 33 - octobre 1998

ÉTUDE DE FIGURES GÉOMÉTRIQUES EN LYCÉE AVEC LA TI92

Jean-Alain RODDIER
IREM de Clermont-Ferrand

L'introduction de calculatrices avec écran graphique dans les années 1980 a déjà soulevé de nombreuses questions, la plus "courue" d'entre elles étant certainement :

"Quelle utilisation raisonnable du graphique peut-on faire en Mathématiques ?"

Il semble que la seule façon de ne pas trop dénaturer notre discipline soit de se servir, uniquement, du graphique lorsqu'une courbe est "largement" au-dessus de l'autre (modulo une tacite continuité). L'usage du graphique par les élèves en tant qu'outil à conjecturer (voir d'outil pour répondre à la question posée) est un chemin de traverse auquel notre enseignement a su s'adapter, le réseau des Irem ayant fourni de multiples activités susceptibles de mettre les élèves en garde.

Ces quelques considérations nous laissent penser que l'utilisation de calculatrices intégrant des versions de Cabri-Géomètre et de DERIVE va apporter de nombreuses modifications dans nos modes d'enseignement :

– les fonctions *Locus* et *Animation* sont des outils puissants pour faire émerger des conjectures ; le fait de travailler au pixel prés amènera, très certainement, les mêmes débats que ceux cités plus haut avec des conclusions analogues ;
– les fonctions *Factor*, *Expand*, *Solve*, *Differentiate*... d'un logiciel de calcul formel ont en l'occurrence des incidences plus importantes, en effet, lorsque le logiciel de calcul formel donne une réponse en mode exact, l'exactitude des résultats avancés par la calculatrice peut être dans certains cas contrôlée.

Les objectifs de cet article sont multiples :

– montrer l'incidence de l'utilisation simultanée de Cabri-Géomètre et de DERIVE sur l'étude de figures à géométrie variable ;

– mettre en évidence que certains problèmes de recherches d'extremums éventuels de fonctions ne vont plus être traités de la même façon ;

– souligner le fait que des problèmes classiques ne vont pas être assez résistants, d'où la nécessité de trouver des exercices moins "solubles".

L'étude de figures à géométrie variable est un thème transversal du cours sur les fonctions. Ce type de problèmes fournit des situations facilement exploitables pour introduire la notion de fonction en classe de seconde, ou donner des exemples concernant l'utilisation de la fonction dérivée en première. Plusieurs générations d'élèves ont abordé des problèmes liés à ce type de figures en ayant, uniquement, une image mentale des modifications des formes géométriques considérées. Aujourd'hui, la TI92 permet – de façon non-exhaustive :

– de voir "bouger" la figure *cf.* la fonction *Animation* ;
– d'émettre des conjectures *cf.* la fonction *Lieu ;*
– de pouvoir transformer (*via* vérification) des expressions algébriques *cf.* les menus *Algèbre* et *Calculs.*

Nous allons analyser quelques situations concernant des problèmes d'extremums éventuels de fonctions, en proposant pour chaque exercice une solution élaborée à l'aide de la TI92. Les situations géométriques, mises en exergue, ont été choisies de façon à montrer l'incidence de la TI92 sur les modes de résolution, en particulier, nous montrerons que certains d'entre eux peuvent être traités en utilisant uniquement des factorisations – le cadre dans lequel est traité l'exercice ne concernant alors les fonctions que par leur nom.

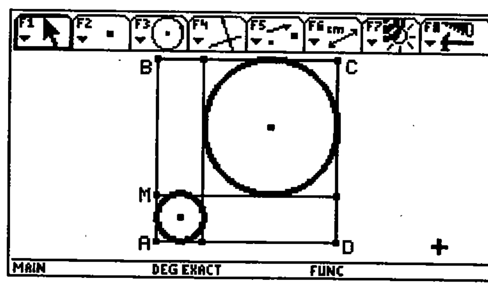
N.B. : La calculatrice est placée en mode de calcul exact (par opposition au mode de calcul en valeurs approchées), des explications précises et des mises en garde sur l'intitulé "mode de calcul exact" sont – face aux élèves – bien entendu nécessaires.

1. Problèmes d'extremums dans le cas de courbes admettant un axe de symétrie

a) Cas de fonctions polynômes

Problème n°1

Dans la figure ci-dessous ABCD est un carré.



Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires des deux disques est minimale ? Maximale ?

Si a désigne la distance AB et f la fonction qui à AM associe la somme des aires considérée, nous avons :

Pour tout x de l'intervalle [0,a], f(a – x) = f(x).

Cette propriété se justifie par l'observation de la *"pseudo-symétrie"* de la figure. Cette remarque étant faite, nul n'est alors besoin d'étudier la fonction f pour répondre à la question.

La propriété citée ci-dessus nous permet d'émettre des conjectures sur les extrêma de f, l'utilisation de la fonction *Factor* de la TI92 donne alors directement la solution de l'exercice :

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ $\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 \to f(x)$ Done

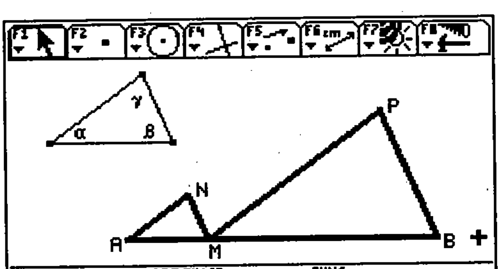
■ $\text{factor}\left(f(x) - f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ $\frac{\pi \cdot (2 \cdot x - a)^2}{8}$

■ $\text{factor}(f(x) - f(0))$ $\frac{\pi \cdot x \cdot (x - a)}{2}$

MAIN RAD EXACT FUNC 3/30

Problème n°2

Cet exercice est une version générale d'un problème classique proposé en Lycée dans le cas particulier de triangles isocèles, rectangles et isocèles, équilatéraux.



Dans la figure ci-dessus les triangles AMN et BMP sont semblables au triangle représenté en traits fins.

Existe-t-il une position du point M pour laquelle la somme des aires des 2 triangles AMN et BMP est minimale ? Maximale ?

Nous sommes là-aussi en présence d'une fonction dont la représentation graphique admet pour axe de symétrie la droite d'équation x = a/2 (si a désigne la distance AB), nous pouvons émettre des conjectures qui vont être confirmées par les calculs formels effectués par le logiciel DERIVE :

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ $\frac{1/2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \cdot \left(x^2 + (a - x)^2\right) \to f(x)$ Done

MAIN RAD EXACT FUNC 1/30

F1 | F2 Algebra | F3 Calc | F4 Other | F5 PrgmIO | F6 Clear a-z...

■ $\text{factor}\left(f(x) - f\left(\frac{a}{2}\right), x\right)$ $\frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot (2 \cdot x - a)^2}{4 \cdot \sin(\gamma)}$

■ $\text{factor}(f(x) - f(0), x)$ $\frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot x \cdot (x - a)}{\sin(\gamma)}$

MAIN RAD AUTO FUNC 2/30

Dans tous les cas où f est une fonction polynôme et quel que soit le réel x0, l'expression f(x) – f(x0) est "factorisable" par (x – x0), le polynôme quotient est de degré (d°f – 1) ; ceci rend l'étude pratiquement immédiate lorsque d°f<4 ; ainsi toutes ces situations de fonctions *"pseudo-symétriques"*, lorsque ce sont des fonctions polynômes, vont autoriser la même procédure :

– élaboration de conjectures (avec l'appui éventuellement des fonctions d'animation et de mesure de Cabri-Géomètre) ;
– utilisation de la fonction *Factor* du logiciel DERIVE.

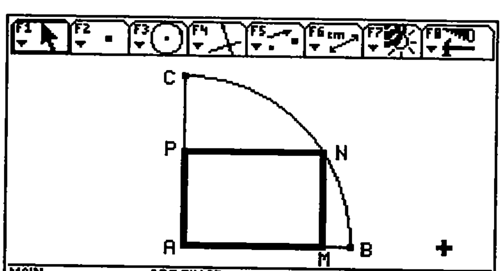
N.B. : Le fait que la représentation graphique d'une fonction f soit symétrique par rapport à la droite d'équation x = a n'implique pas que la fonction f admette un extremum en a, c'est la raison pour laquelle, en présence d'une situation *"pseudo-symétrique"*, seules des conjectures peuvent être émises.

b) Cas d'une fonction non-polynomiale

Problème n°3

Cet exemple permet d'étudier une situation où interviennent des fonctions trigonométriques.

Dans la figure ci-dessous le quadrilatère AMNP est un rectangle.

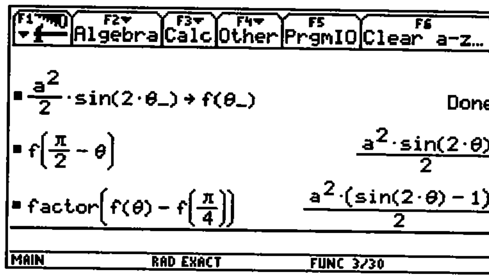


Existe-t-il une position du point M pour laquelle l'aire du rectangle AMNP est maximale ?

Considérons la fonction f qui à $\widehat{BAN}$ associe l'aire du rectangle AMNP, cette fonction est, elle aussi, *"pseudo-symétrique"*, en effet :

Quel que soit x appartenant à $[0,\pi/2]$, $f(\pi/2 - x) = f(x)$.

Nous pouvons conjecturer que le maximum va être atteint en $\pi/4$, l'écran ci-dessous nous en apporte la démonstration :



La résolution de cet exercice peut donc se faire uniquement par factorisation, cela rend superflue toute étude concernant les fonctions qui pourrait être menée à partir de ce problème.

2. Problèmes d'extremums dans le cas de courbes n'admettant pas d'axe de symétrie

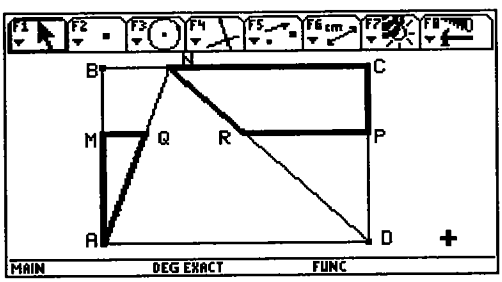
Dans ce paragraphe, nous considérons des fonctions qui ne sont pas *"pseudo-symétriques"*, la méthode décrite au 1) s'applique seulement dans le cas où les conjectures sont assez fines pour "entrevoir" la valeur exacte de l'extremum cherché, la factorisation de f(x) – f(x0) permet ensuite d'accéder au résultat.

a) Cas d'une fonction polynôme

Problème n°4

Enoncé élève

Dans la figure ci-dessous ABCD est un rectangle, AB = 4, AD = 6,
M ∈[AB], N ∈ [BC] et BM = BN,
P est le point d'intersection de la droite (CD) et de la parallèle à (BC) passant par M,
La droite (MP) coupe les segments [NA] et [ND] respectivement en Q et en R.



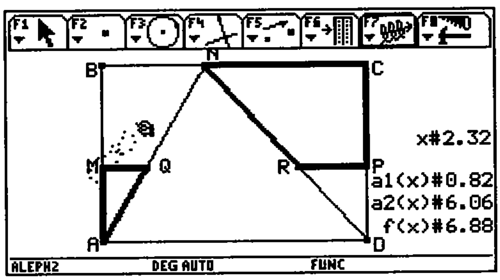
Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires du triangle AMQ et du trapèze RNCP est minimale ? Maximale ?

Elaboration de conjectures

Nous considérons la fonction f qui à BM associe la somme des aires considérée, cette fonction n'est pas *a priori "pseudo-symétrique"*.

α) *A partir de la mise en mouvement de la figure et de l'observation des valeurs des aires affichées à 10^{-2} près.*

Nous pouvons faire afficher des valeurs approchées des aires considérée, puis à l'aide de l'option d'animation mettre la figure en mouvement comme l'indique l'écran suivant :

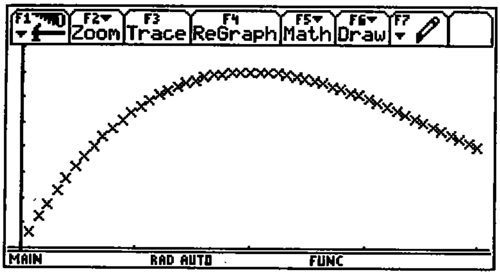


Un relevé de ces valeurs approchées dans un tableau conduit à l'obtention d'un nuage de points :

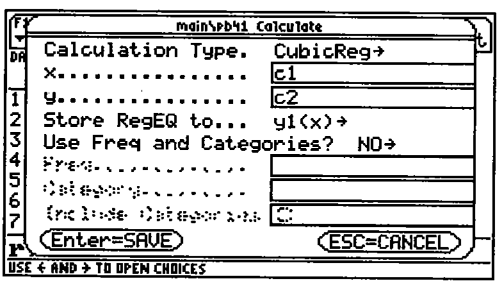
DATA	x#	f(x)#
	c1	c2
39	.96	5.37
40	.88	5.08
41	.80	4.77
42	.72	4.43
43	.64	4.06
44	.56	3.66
45	.48	3.23

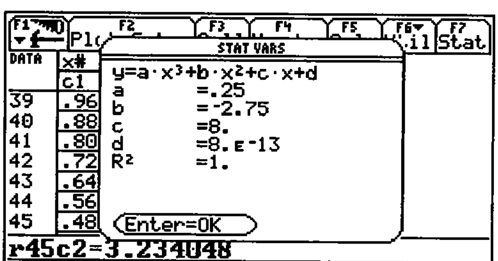
r45c2=3.234048

xmin=⁻.1
xmax=4.1
xscl=1.
ymin=⁻.1
ymax=8.
yscl=1.
xres=1.

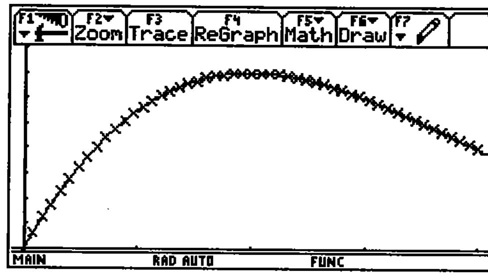


L'option **3 : CubicReg** du menu **F5** dans l'application d'éditeur de données peut être lancée de manière à obtenir l'équation d'une courbe cubique qui passe "au plus prés" des points du nuage, toutes les explications préalables au lancement de cette option devront être fournies aux élèves (forme du nuage, choix d'une régression cubique, résultats donnés par la calculatrice).

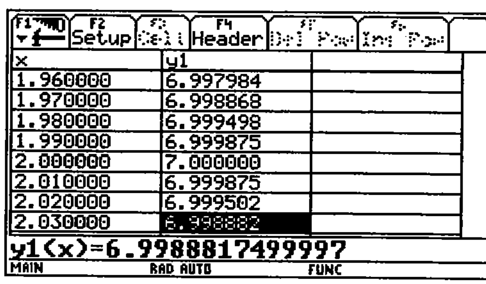


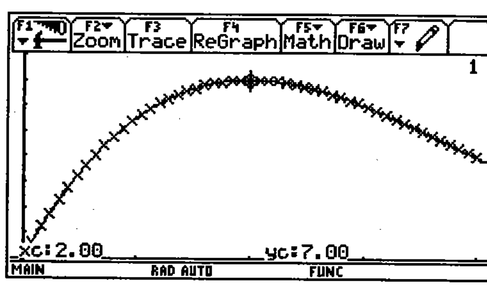


Le passage du "discret " (abscisses des points obtenus lors de l'expérience) au "continu " (polynôme défini sur un intervalle) mérite des explications et à cette occasion des arguments liés à la figure et au déplacement du point M sur le segment [AB] pourront être développés.



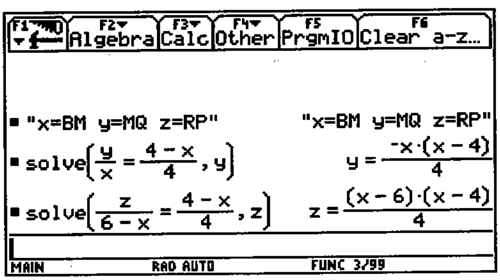
Cette étude expérimentale nous permet d'envisager une étude locale autour de la valeur 2 de la variable x ; des tableaux de valeurs du polynôme du troisième degré ainsi que l'option **F3 Trace** vont nous permettre d'émettre une conjecture quant au maximum de la fonction f.

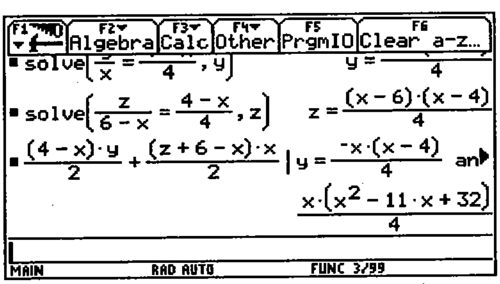


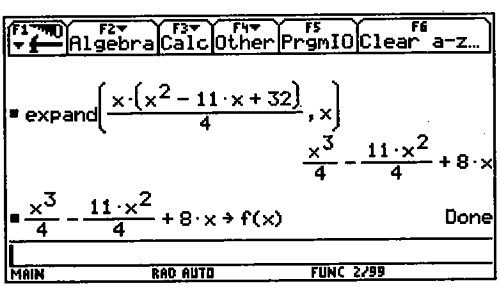


β) A partir de la représentation graphique de la fonction f

Des calculs simples permettent de déterminer l'expression algébrique de la fonction f nous pouvons ainsi construire sa représentation graphique :



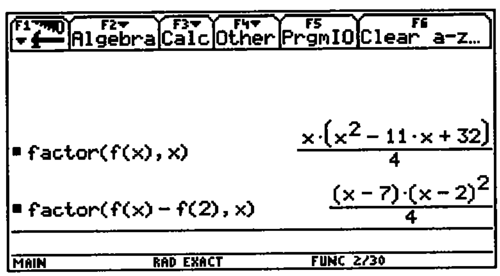




Nous pouvons confronter les résultats de ce calcul à l'expression que nous avions obtenue lors de l'expérimentation, ceci vient conforter la conjecture avancée dans le paragraphe précédent.

Résolution effective du problème

Le fait que f s'annule en 0 et qu'elle prenne des valeurs toujours positives, ainsi que les conjectures établies en α et β amènent à construire l'écran suivant qui résout le problème :



N.B. : Le fait que le logiciel nous donne ce résultat en ce qui concerne la factorisation de f(x) dans l'ensemble des réels – et que le coefficient de x^2 soit strictement positif – nous permet d'affirmer directement que :

Pour tout réel x, $x^2 - 11x + 32 > 0$.

Nous proposons en Annexe 2 la construction de la figure du problème n°4 à partir de l'application **Geometry** de la TI92, ainsi qu'une activité développée pour des élèves de Seconde à partir de ce problème.

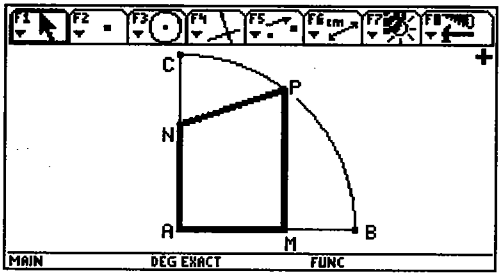
b) Cas d'une fonction non-polynomiale

Problème n°5

> Les procédures pour faire émerger des conjectures employées dans les exemples précédents ne vont rien apporter à la résolution de ce problème.

Enoncé élève

Dans la figure ci-dessous, AM = AN :



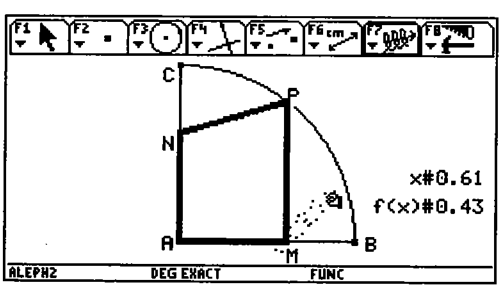
Existe-t-il une position de M pour laquelle l'aire du trapèze AMPN est minimale ? Maximale ?

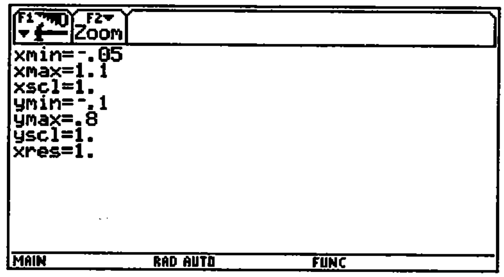
Elaboration de conjectures

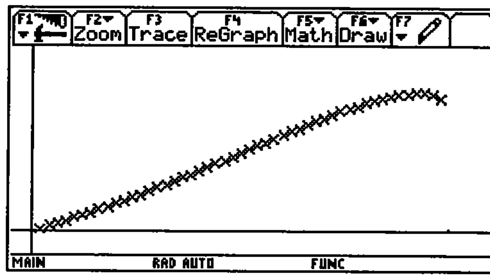
Nous allons – modulo un changement d'unité – poser AB = 1.Soit f la fonction qui à AM associe l'aire de la figure AMPN, cette fonction n'est pas *"pseudo-symétrique"*.

α) Mise en mouvement de la figure

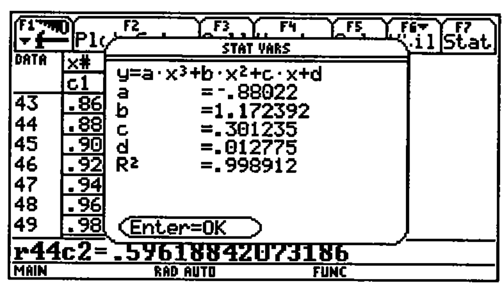
Les fonctions d'animation et de mesure de la TI92 nous permettent d'obtenir l'écran suivant :

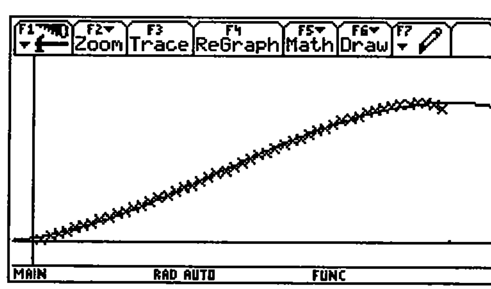




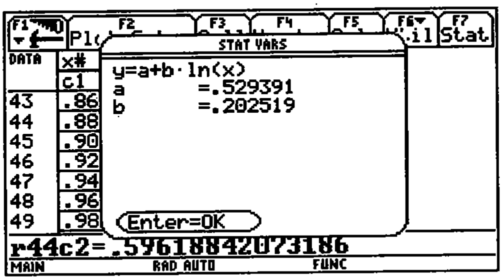


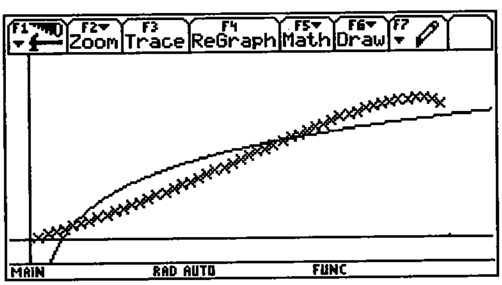
Le lancement de la régression cubique nous permet des valeurs approchées des coefficients d'un polynôme du troisième degré dont la courbe passe au plus "prés " de chaque point du nuage.





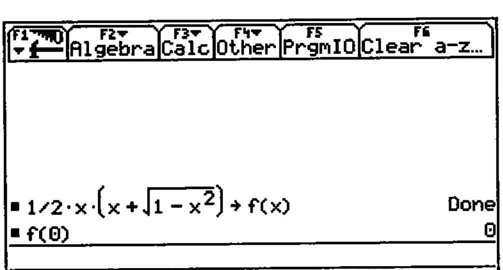
La courbe “s’écarte” nettement du nuage dans la zone qui nous intéresse, ceci nous invite à essayer une autre régression (logarithmique cette fois-ci).

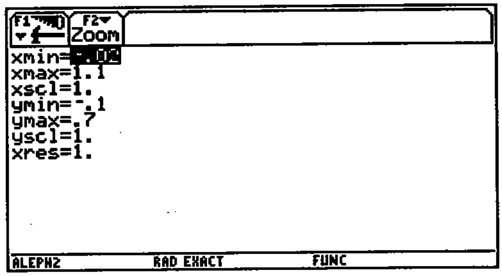


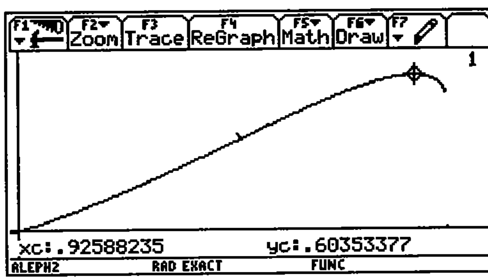


La courbe obtenue est là aussi inutilisable.

β) Représentation graphique de la fonction f



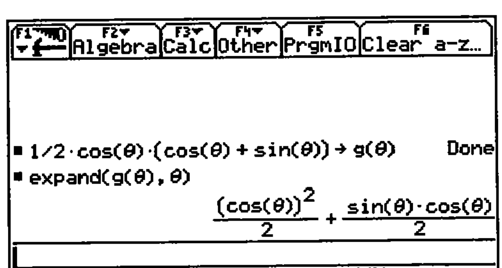


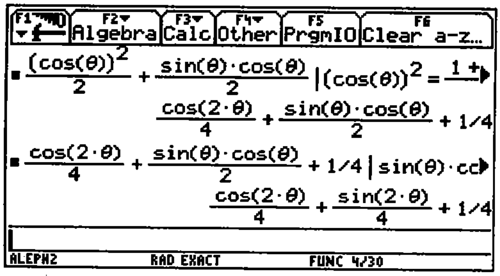


Ces écrans ne permettent pas d’obtenir de conjectures assez fines pour poursuivre les calculs en ce qui concerne la recherche d’un maximum éventuel.

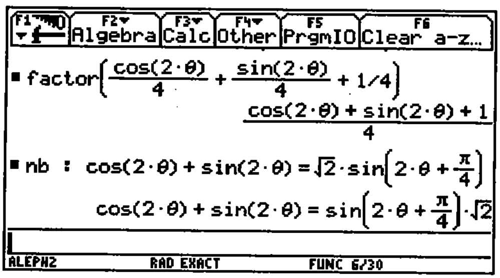
γ) Définition d’une nouvelle fonction g

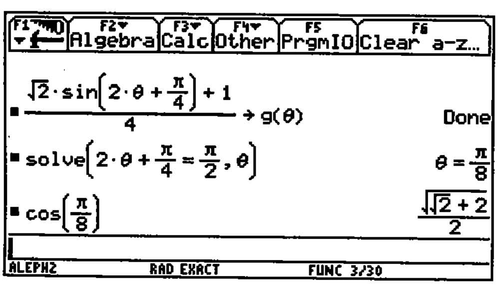
Le problème peut être résolu directement à partir de la définition de la fonction g qui à $\widehat{MAP}$ associe l’aire du trapèze AMPN (N.B. : g = f o cos), les écrans suivants montrent les transformations progressives de g(θ) à partir des relations trigonométriques concernant cos(2θ) et sin(2θ) :





La nouvelle expression que nous allons obtenir nous permet de conclure :





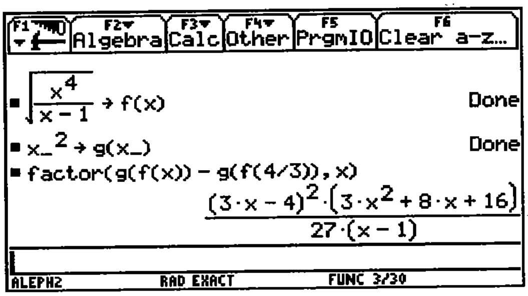
Les exemples, que nous venons de présenter, peuvent être résolus de multiples façons ; nous ne faisons pas abstraction du fait que pour développer les réponses, que nous avons exposées, une certaine "habitude" des Mathématiques est nécessaire, en particulier dans le choix du cadre de résolution. Il ne faudrait pas laisser penser que la séquence *Factor(f(x) – f(x0),x)* permet de résoudre ce type de problème systématiquement, ainsi la présentation d'une telle procédure en "cours"(*cf.* annexe 2) nécessite par la suite l'étude de fonctions où, par exemple, un extremum est atteint pour une valeur non-explicite de la variable.

La procédure, qui consiste à établir des conjectures a priori (à partir de l'analyse de la situation, d'une expression, d'une courbe), évite le recours à l'étude complète de la fonction ; un certain nombre de calculs vont d'autres part pouvoir être élaguer ce qui permet de réaliser des tests pour savoir si les conjectures avancées sont exactes.

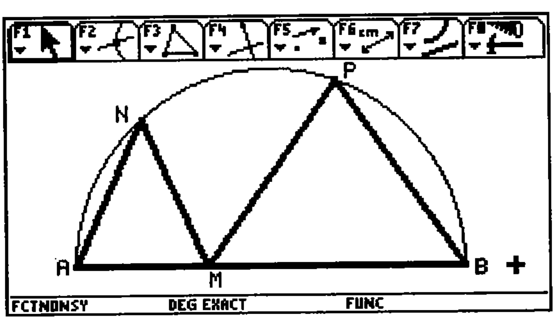
L'apport essentiel de la calculatrice est de pouvoir apporter par de multiples changements de cadre une certaine dynamique à la résolution de ce type de problème.

ANNEXE 1

La manipulation de quantités positives (distances, aires) autorise, dans certains cas, l'utilisation de calculs formels de la forme : *Factor(g(f(x)) – g(f(a)),x)* où f désigne la fonction mise en jeu et g est une fonction strictement monotone sur l'ensemble des réels positifs, par exemple :

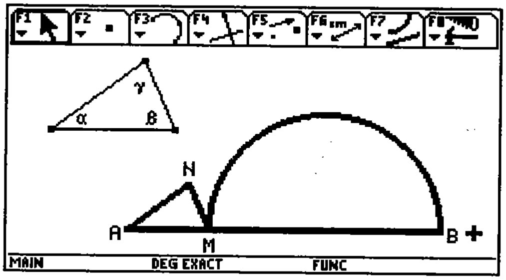


Nous présentons ici d'autres exemples de problèmes d'extremums éventuels qui peuvent être résolus en élaborant des conjectures et en utilisant la TI92.

Enoncé	**Fonction "*pseudo-symétrique*" ?**
Dans la figure ci-dessous les triangles AMN et BMP sont isocèles.  *Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires des 2 triangles est minimale ?*	Oui

<table>
<tr>
<td>

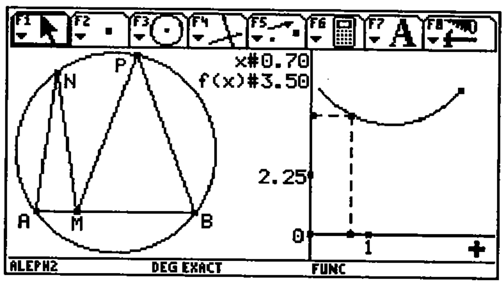
Dans la figure ci-dessous, les réels α et β sont donnés et le triangle AMN est semblable au triangle représenté en traits fins.



Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires des 2 triangles est minimale ?

</td>
<td>Non</td>
</tr>
<tr>
<td>

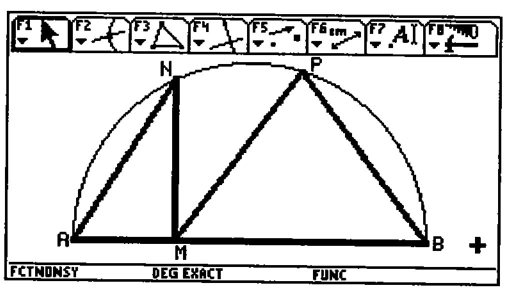
Dans la figure ci-dessous, les triangles AMN et MBP sont isocèles.



Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires des 2 triangles est minimale ? Maximale ?

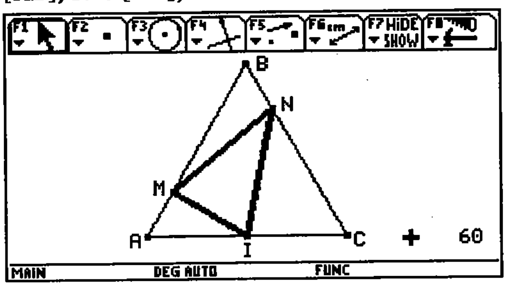
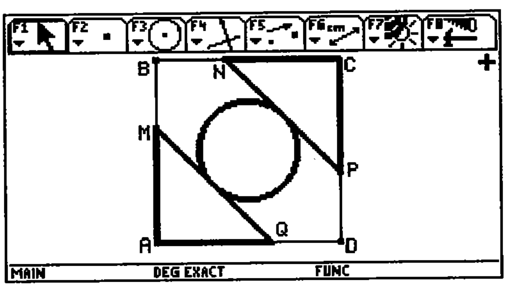
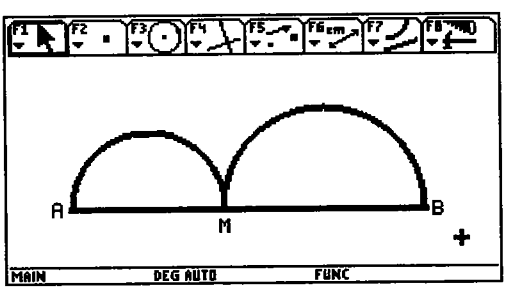
</td>
<td>Oui</td>
</tr>
<tr>
<td>

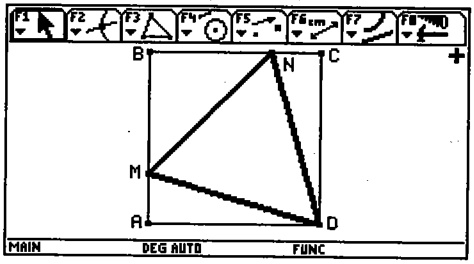
Dans la figure ci-dessous le triangle AMN est rectangle en M et le triangle BMP est isocèle de sommet principal P.



Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires des 2 triangles est maximale ?

</td>
<td>Non</td>
</tr>
</table>

Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est équilatéral, I est le milieu de [AC], M ∈ [AB], N ∈ [BC], AM = BN.  ***Existe-t-il une position de M pour laquelle l'aire du triangle IMN est minimale ? Maximale ?***	Oui
Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré, M ∈ [AB], N ∈ [BC], P ∈ [CD] et Q ∈ [AD] de plus AM = AQ = CN = CP. *Le cercle représenté en traits renforcés a pour centre le milieu de [AC] et pour diamètre MN.*  ***Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires des surfaces représentées en traits renforcés est minimale?***	Non
Existe-t-il une position de M pour laquelle la somme des aires des 2 demi-disques est minimale ? Maximale ?  	Oui

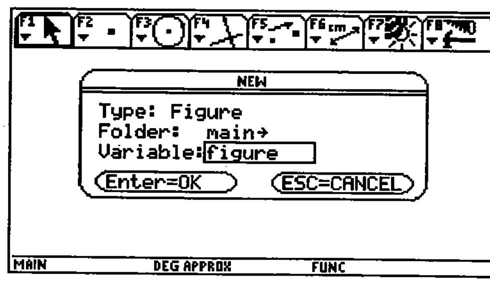
Dans la figure ci-dessous, ABCD est un carré, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$ et $BM = BN$.  *Existe-t-il une position de M pour laquelle l'aire du triangle DMN est maximale ?*	Non

ANNEXE 2

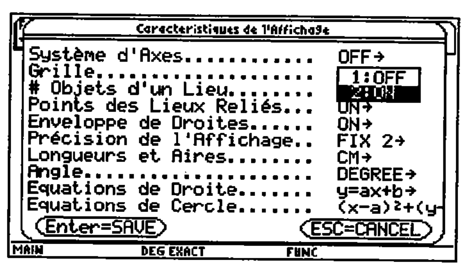
Nous proposons dans cette annexe une activité construite à partir du problème n°4 et qui peut être abordée en classe de 2^{nde} lors de l'introduction de la notion de fonction.

1^{re} partie : Construction de la figure sur la TI92

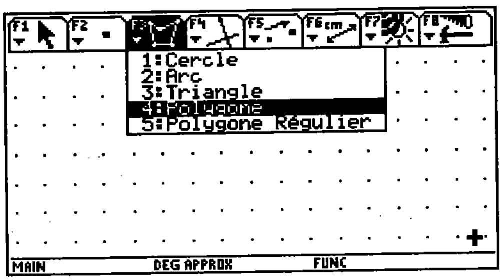
Dans l'application **Geometry** (APPS 8), nous ouvrons un nouveau fichier et nous le nommons Figure.

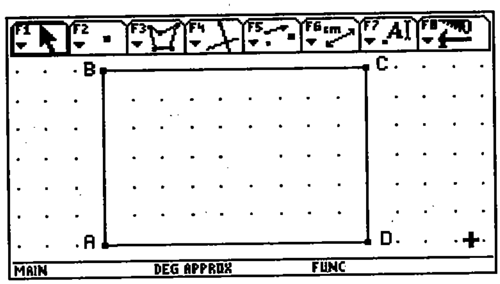


Nous ouvrons le menu **F8** et choisissons dans celui-ci l'option **9** : **FORMAT**, nous sélectionnons alors l'option ON sur la ligne **GRILLE** :

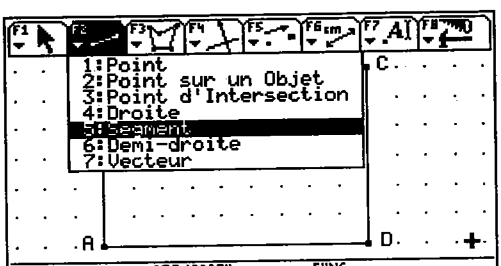


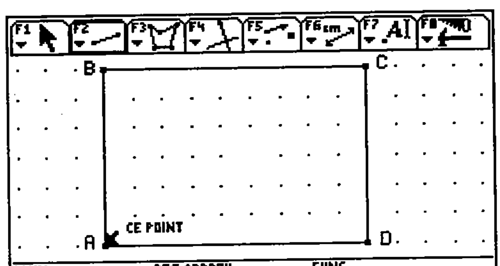
Dans le menu **F3** choisir l'option **4 : POLYGONE**, puis tracer le rectangle ABCD comme ci-dessous (on pourra nommer les points dès à présent) ; le rectangle est tracé de façon à ce que AB/AD = 2/3 :

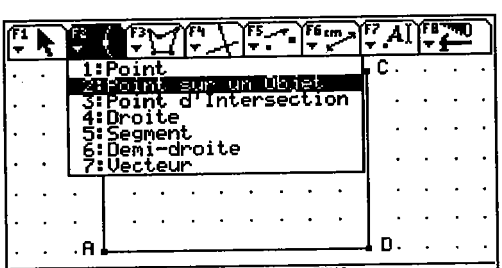


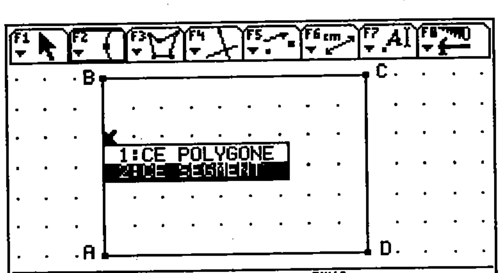


Définissons à présent le segment [AB] et un point M (à nommer en même temps) sur ce segment :

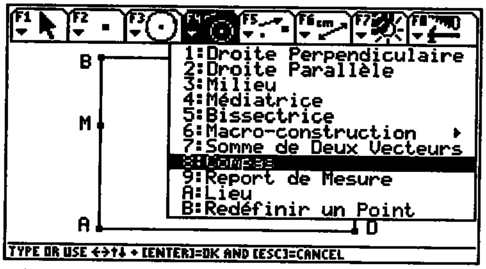


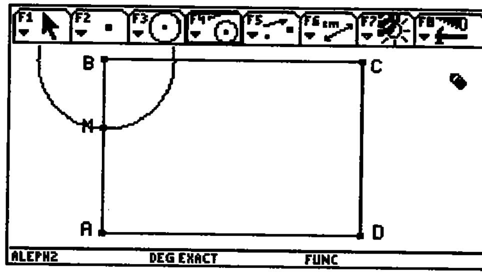


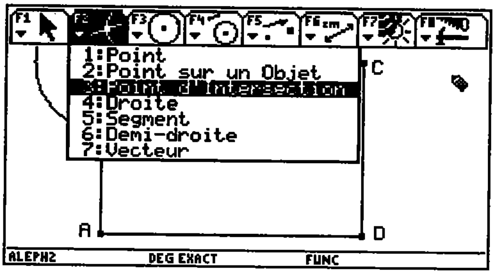


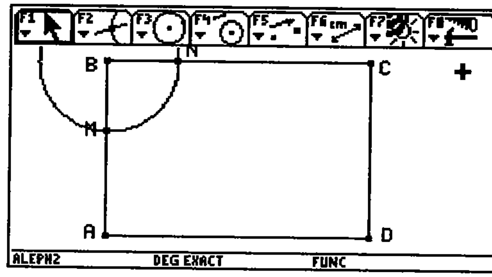


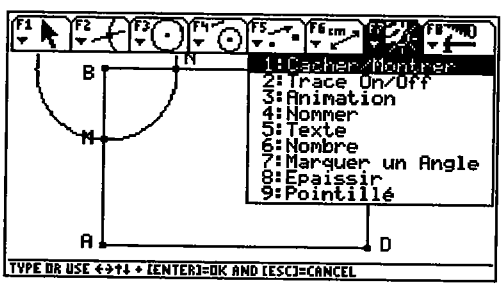
Nous enlevons la grille à l'aide du menu **F8**, en choisissant l'option **9 : FORMAT**, nous allons construire le point N à l'aide de l'option **8 : COMPAS** du menu **F4**, nous reportons pour cela la distance MB sur le segment [BC] en partant du point B :

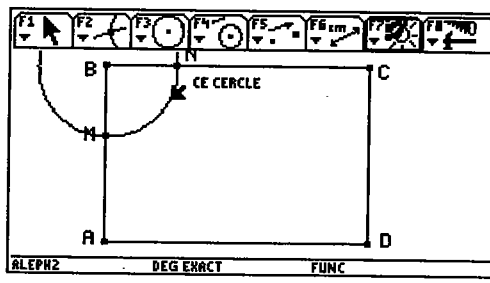




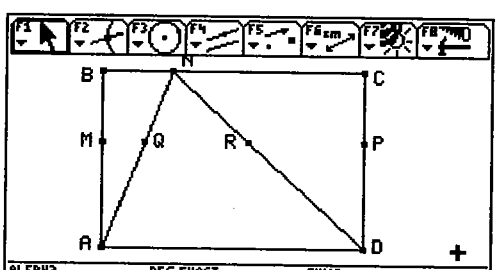




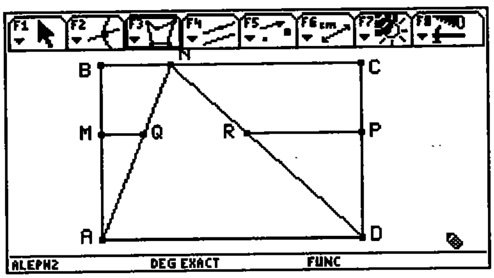




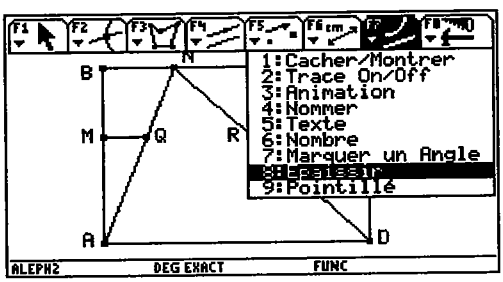
Nous construisons alors les segments [AN], [DN] et la droite parallèle à (BC) passant par M, les points P, Q et R sont construits en prenant l'option **3** : **Point d'Intersection** du menu **F2**, nous cachons ensuite la droite (MP) :

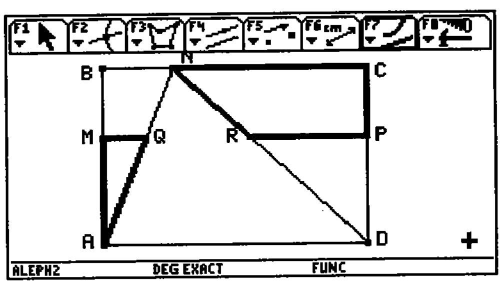


Définissons à présent le triangle AMQ et le trapèze RNCP à l'aide des options 3 et 4 respectivement du menu **F3** :

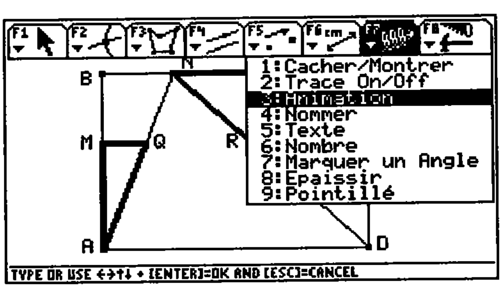


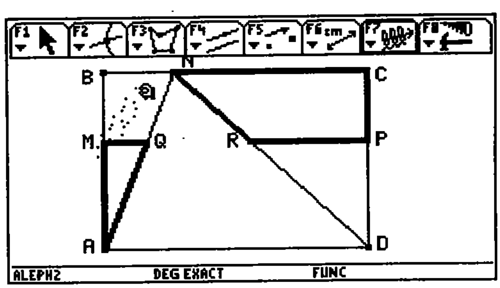
L'option **8** : **EPAISSIR** du menu **F7** nous permet de faire mieux apparaître sur notre figure les surfaces à considérer :





Nous pouvons à présent mettre le point M en mouvement en utilisant l'option **3** : **ANIMATION** du menu **F7** :

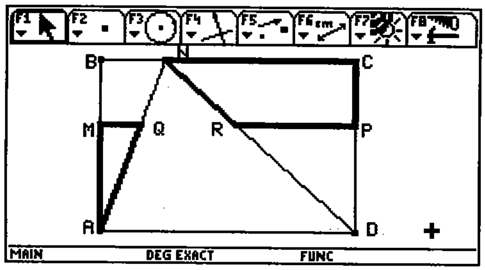




La calculatrice est prête à être utilisée, l'écran avec animation du point M, que nous venons de construire, sera le point de départ de l'activité proposée aux élèves.

2^e^ PARTIE : FICHE-ÉLÈVE

Dans la figure ci-dessous ABCD est un rectangle, AB = 4, AD = 6,
M ∈ [AB], N ∈ [BC] et BM = BN,
P est le point d'intersection de la droite (CD) et de la parallèle à (BC) passant par M,
La droite (MP) coupe les segments [NA] et [ND] respectivement en Q et en R.



Existe-t-il une position du point M pour laquelle la somme des aires du triangle AMQ et du trapèze RNCP est maximale ?

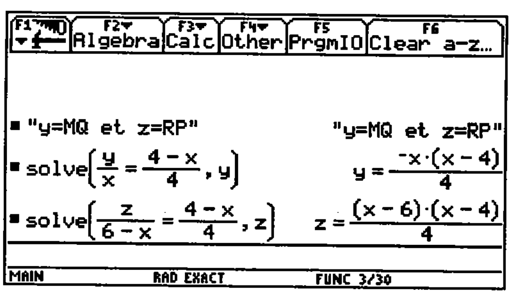
Posons x = BM, et considérons la fonction f qui à x associe la somme des aires considérée.

1) Expression de f(x) en fonction de x

a) Aire du triangle AMQ en fonction de x.
Exprimer MQ en fonction de x, en déduire l'aire du triangle AMQ en fonction de x.

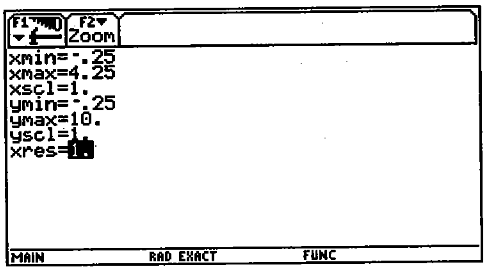
b) Aire du trapèze RNCP en fonction de x.
Exprimer NC et RP en fonction de x, en déduire l'aire du trapèze RNCP en fonction de x.

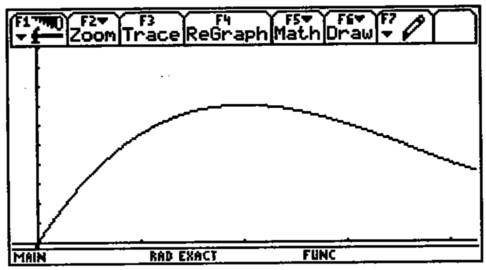
c) Après avoir contrôlé vos résultats à l'aide de l'écran ci-dessous, déterminez l'expression de f(x) en fonction de x.



2) Représentation graphique de f.

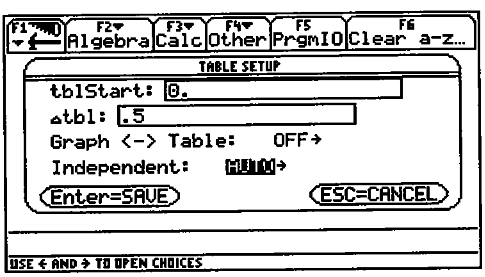
a) L'écran de droite ci-dessous donne la représentation graphique de f :

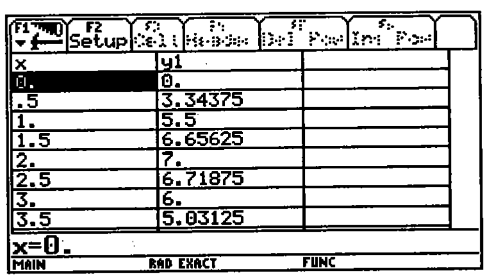


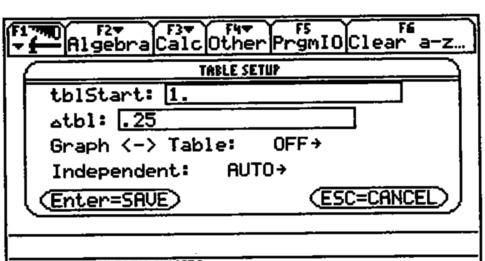


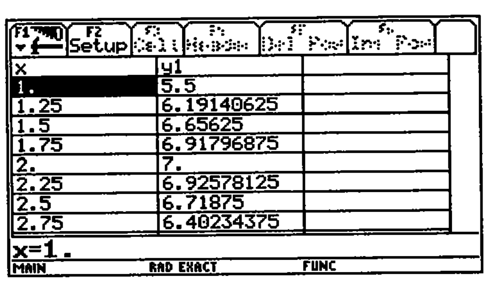
Cette courbe nous amène à faire une étude plus locale de la fonction autour d'une valeur, laquelle ?

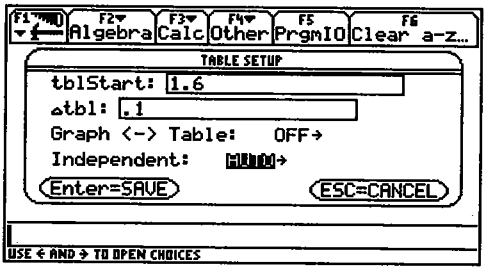
b) Analysez les tableaux de valeurs ci-dessous, ces derniers nous apportent-ils des informations supplémentaires, si oui, lesquelles ? Nous permettent-ils de conclure ?

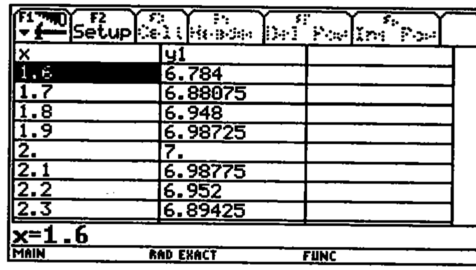








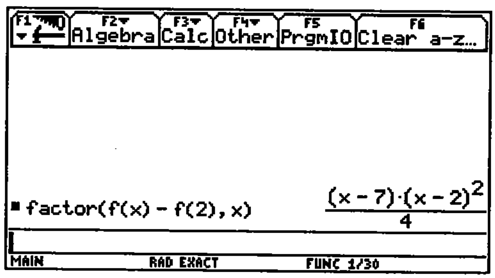




3) Etude analytique de f

Nous allons dans cette partie comparer f(x) et f(2), pour cela considérons leur différence.

a) Justifier l'égalité donnée par l'écran ci-dessous :



b) Dresser le tableau de signe de l'expression ainsi trouvée. Conclure.