LES AIRES : OUTIL HEURISTIQUE OUTIL DÉMONSTRATIF

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
et le groupe d'Histoire des Mathématiques
de l'IREM de Strasbourg

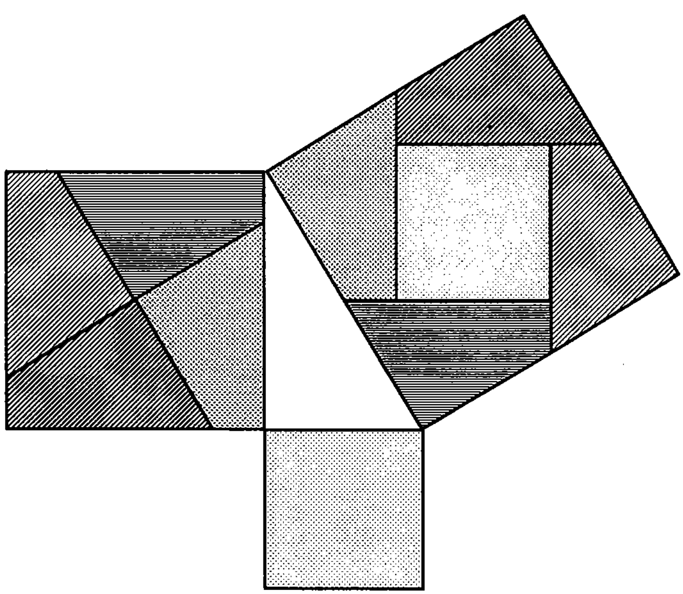
Avertissement

L'article qui suit est extrait d'une brochure en deux volumes, produite par le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg, sous le titre *Activités Géométriques pour le Collège et le Lycée, présentées dans une perspective historique.* Coupé de son contexte, il pourrait donner l'impression d'une "défense et illustration" d'un enseignement basé sur une sorte de "tout géométrique", en opposition à un "tout calcul", voire un "tout calculatrice" qui envahirait l'enseignement des mathématiques aujourd'hui. Je tiens à dissiper un tel malentendu.

Certes, les activités qui suivent privilégient le raisonnement sur des figures, en évitant au maximum le recours aux formules et au calcul numérique. Ce parti pris est la seule réponse que nous ayons trouvée à un défi que posent les mathématiques d'aujourd'hui à leur enseignement dans un niveau élémentaire tel que le collège. Aujourd'hui, une démonstration rigoureuse nécessite l'usage d'un langage extrêmement structuré et formalisé, ne s'appuyant sur aucun élément sensible. Cela n'est pas à la portée d'un élève de collège, et même rarement d'un élève de lycée. D'où l'idée que l'apprentissage des mathématiques ne pourrait s'y faire qu'au travers d'activités éparpillées de résolution de problèmes et d'une certaine initiation au calcul numérique et littéral. Le raisonnement lui-même ne pourrait guère y être appris car si c'est un raisonnement sur les nombres, c'est à dire en algèbre ou en analyse, il est beaucoup trop abstrait et difficile ; et si c'est un raisonnement sur les figures géométriques, il n'est pas rigoureux car s'appuyant sur des éléments sensibles : la géométrie n'aide pas l'élève à faire la différence entre le fait observé et le fait démontré. Nous pensons qu'il y a là un double malentendu, l'un portant sur le sens même de ce qu'est la géométrie, l'autre sur la notion de rigueur et de démonstration.

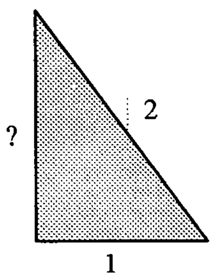
Le mot **géométrie** contient la racine μετρια, c'est-à-dire **mesure,** laquelle renvoit au **nombre** et donc au **calcul**. La géométrie est concernée par le numérique tout autant que par l'étude des propriétés de l'espace. D'ailleurs, historiquement, l'analyse s'est constituée et développée principalement autour du thème de la mesure des grandeurs. La notion d'irrationnalité, de réel, le calcul différentiel et intégral, sont nés de problèmes de mesure de longueur, d'aire, de volume. Ces problèmes ont leur ancrage dans une réalité physique, mais ont conduit très tôt à des découvertes qui dépassent très largement la simple intuition. Ils sont donc exemplaires pour mettre en évidence la frontière entre le fait constaté et le fait démontré : leur ancrage dans la réalité physique les rend accessibles à l'intuition de l'élève, mais l'incapacité de cette intuition à rendre compte de la situation et à résoudre le problème, l'oblige à dépasser le stade empirique pour accéder au stade théorique de la démonstration mathématique.

C'est en se heurtant aux problèmes de l'incommensurabilité (littéralement : impossibilité de mesurer ensemble certaines grandeurs) que les Grecs ont élaboré tout un pan de géométrie (recouvrant en gros les quatres premiers livres des *Eléments* d'Euclide). Surpris par l'irruption de l'irrationnel αλογον, les Grecs ont inventé le raisonnement mathématique pour rendre compte en termes **rationnels**, même de ce qui est irrationnel (par exemple le rapport de la diagonale d'un carré à son côté). Selon la formule de J.T. Desanti : les Grecs ont réussi *faute de calculer "l'impensable" à penser "l'incalculable" et l'intégrer à l'univers normé des*



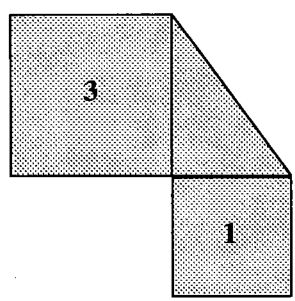
objets maniables selon les règles strictes et compatibles du "jeu mathématique". (1)

Ainsi, je ne peux pas mesurer exactement le troisième côté d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés mesurent



une et deux unités de longueur. Vais-je en rester à ce constat d'échec avec mes élèves de collège ? Suis-je obligé d'attendre qu'ils disposent du symbole √ pour pouvoir dire quelque chose de juste concernant ce troisième côté ? Et même alors, quel sens cela a-t-il de dire qu'il mesure $\sqrt{3}$ unités de longueur ? Euclide et les activités qui suivent nous prouvent que cette attente frustrante n'est nullement nécessaire. Je peux démontrer que le carré construit sur ce troisième côté mesure exactement trois fois plus que le carré construit sur l'autre côté de l'angle droit, ce qui nous débloque une situation d'impuissance calculatoire, mais en plus donne sens à ce fameux $\sqrt{3}$ qui sans cela reste bien abstrait.

Le second malentendu, celui de la rigueur démonstrative, tombe alors de lui même. Car jamais une observation, une mesure au sens pratique du terme, aussi fine soit-elle, ne me permettra d'affirmer la valeur exacte qui mesure le carré construit sur le troisième côté. Les mathématiques commencent là, dans le fait de dire quelque



chose de juste, une vérité incontestable sur les objets qui nous entourent, et c'est la seule ambition de ce qui suit.

LES AIRES. OUTIL HEURISTIQUE - OUTIL DÉMONSTRATIF

Dans un article récent intitulé *"Un apprentissage des aires en sixième."* M.A. Egret mettait en évidence le rôle heuristique des figures, expliquant que :

"L'ambiguïté du statut des figures pèse lourdement sur les premiers apprentissages de la géométrie. Elle enferme souvent l'enseignement dans un dilemme : ou l'on s'en tient à l'évidence visuelle (c'est souvent le cas en primaire) et on reste en-deça des traitements mathématiques, ou on se réfère en priorité aux traitements mathématiques (à partir du collège, bien souvent) et on perd l'apport intuitif et heuristique des figures (2)."

(1) J.T. Desanti *Une crise de développement exemplaire : la "découverte des nombres irrationnels* , Logique et connaissance scientifique, Pleïade, 1967, p. 446.

(2) Marie Agnès Egret, *Un apprentissage des aires en sixième*, Mission laïque française, 1992, IREM de Strasbourg.

Nous voudrions dans les pages qui suivent prolonger et développer ce thème, au delà de la sixième. Nous tenterons de montrer combien le thème des aires est un outil performant et irremplaçable tant dans l'apprentissage de la démonstration géométrique, que pour une compréhension claire de ce qui dans un problème relève du géométrique, et de ce qui relève du numérique. La tendance est aujourd'hui au *"tout calcul"* (qu'il soit numérique ou algébrique), au point de considérer qu'il n'y a pas de démonstration **rigoureuse** sans une traduction numérique et un recours au calcul du moins tant que les élèves ne disposent pas de l'outil des vecteurs et des transformations. D'où deux conséquences négatives importantes :

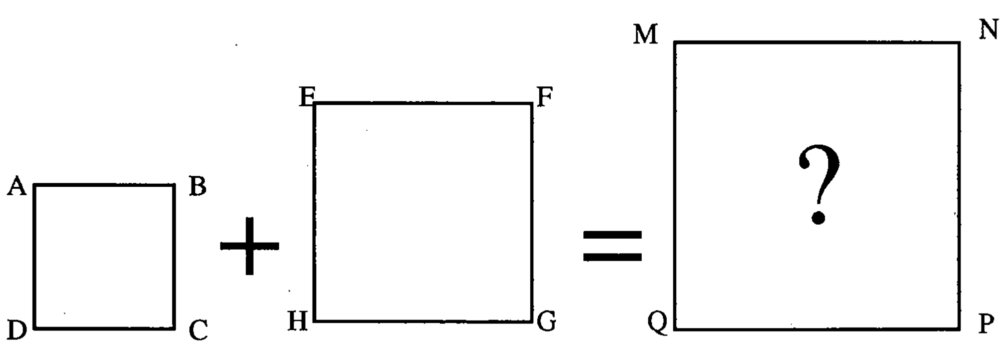
1) un éventail restreint de configurations géométriques pour les élèves, tant que le champ des nombres disponibles et l'outil algébrique ne sont pas suffisamment développés. C'est ainsi qu'on ne pourra guère parler du théorème de Pythagore avant l'introduction des radicaux, si l'on traite ce théorème sous sa forme numérique (relation entre les mesures des côtés).

2) un apprentissage retardé de l'étude des configurations, qui fait que beaucoup d'élèves perdent l'habitude acquise en primaire d'observer les figures géométriques, et sont incapables quelques années plus tard de faire une démonstration géométrique, ou de résoudre un problème de géométrie. Rappelons les résultats d'une enquête auprès d'élèves de collège, déjà évoquée par M.A. Egret et montrant *"une régression en géométrie, liée à une perte de spontanéité pour exploiter les possibilités offertes par une figure"*. Par exemple, il m'est arrivé de poser à des élèves de Première le problème suivant : on se donne deux carrés ABCD et EFGH, construire un carré MNPQ dont l'aire soit égale à la somme des deux carrés donnés (figure ci-dessous).

Longue perplexité des élèves. *M'sieur, combien ils mesurent, les carrés ABCD et EFGH ?*

Ce que vous voulez, ça n'a pas d'importance. Je voudrais justement une méthode de construction qui ne dépende pas des carrés donnés. Mais si ça peut vous aider, mettons que le premier carré mesure 5 cm de côté, et le second 10 cm. Un élève : *alors ça va ; le carré cherché a* $\sqrt{5^2+10^2} \approx$ 11,18cm *de côté !*

Aucun élève n'a le réflexe de construire un triangle rectangle dont les côtés de



l'angle droit soient les côtés des carrés donnés, l'hypoténuse donnant alors directement le côté du carré cherché. Même difficulté avec des S.T.S. (Sections de Techniciens Supérieurs – BAC+2) et même type de réponse pour un problème un tout petit peu plus élaboré.

On se donne deux triangles équilatéraux ABC et EFD, construire un triangle équilatéral MNP dont l'aire soit égale à la somme des aires des deux triangles donnés. Ou bien on se donne deux cercles de diamètres [AB] et [CD] respectivement, construire un cercle de diamètre [EF] dont l'aire soit égale à la somme des aires des deux cerles donnés.

Voici trois groupes d'activités qui peuvent introduire à des méthodes véritablement géométriques sans nécessiter un outillage algébrique développé et qui, à notre avis, peuvent aider les élèves de collège à s'entraîner à la démonstration :

I. Les principes de la démonstration euclidienne.
II. La multicongruence des polygones.
III. La quadrature des polygones.

I. Les principes de la démonstration euclidienne

Problème. Soit à démontrer l'égalité des aires de deux parallélogrammes ayant une base commune AB et les autres bases CD et EF sur une même parallèle à AB (Figure 1).

Facile, dira l'élève : les deux parallélogrammes ont même base et même hauteur. L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur. Donc ABCD et ABEF ont même aire. Mais d'où sait-il que l'aire du parallélogramme est égale au produit de la base par la hauteur ? Au pire c'est une formule qu'il aura apprise par cœur. Au mieux un professeur la lui aura démontrée par la figure suivante ramenant le problème à celui de l'aire du rectangle DHKC (Figure 2).

Sans insister sur le fait que la formule donnant l'aire d'un rectangle n'est pas du tout simple à démontrer (songez au cas où

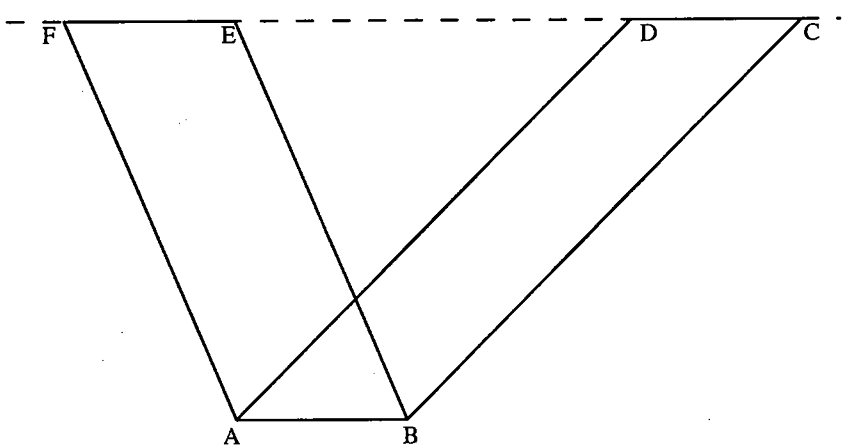


Fig. 1

ses côtés sont incommensurables), comment démontrera-t-on la formule de l'aire d'un parallélogramme dans le cas où H ne tombe pas entre A et B ? (Figure 3).

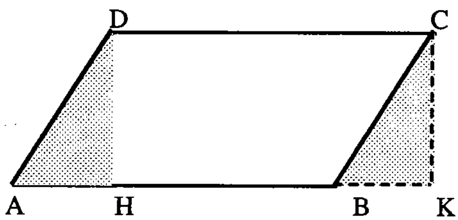


Fig. 2

Voici une première démonstration de la propriété énoncée à l'occasion du Problème I. C'est celle d'Euclide qui développe tout au long du Livre I des *"Éléments"* des méthodes de démonstrations basées sur l'égalité d'aires, sans aucun recours au numérique. Une autre démonstration est basée sur la notion de **multicongruence** qui théorise le principe du découpage et de la superposition et que nous étudierons plus loin.

La démonstration d'Euclide

Elle est basée sur ce que l'on appelait autrefois le *"Premier cas d'égalité des triangles"* :

> *"Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement égaux, alors ils sont égaux."* (Proposition I_4 chez Euclide).

Cette proposition qu'Euclide déduit de l'axiome de superposition *"Les grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales entre elles"*, donne alors la clef de la démonstration. Soit G le point d'intersection de (BE) et (AD). Ce point G existe toujours, car sinon les parallélogrammes ABCD et ABEF seraient confondus. Mais il peut être entre A et D (Figure 4) ou à l'extérieur du segment [AD] (Figure 5).

Activité 1 (3)

Démontrer l'égalité (4) des parallélogrammes ABCD et ABEF dans chacun des cas de Figure 4 et 5 (page suivante).

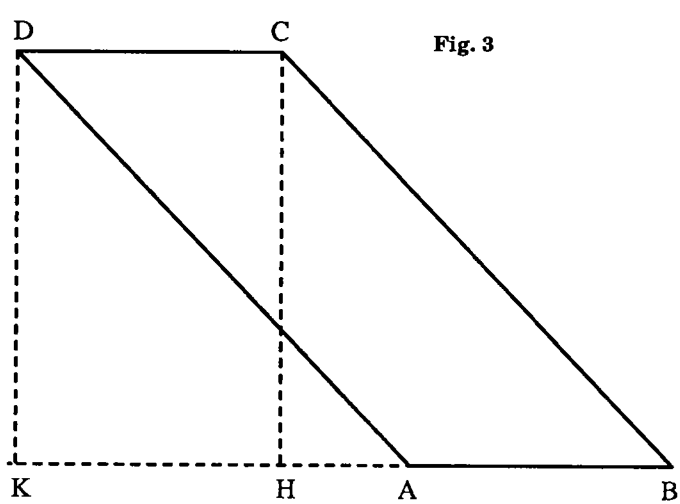


Fig. 3

Plaçons nous d'abord dans le cas où G est entre A et D (Figure 4). Alors AF = BE ; AD = BC et $D\hat{A}F = C\hat{B}E$. Donc les triangles DAF et CBE sont égaux (proposition I_4). Ajoutons à chacun de ces triangles le triangle ABG et retranchons leur le triangle DGE. Nous en

(3) Il s'agit de la proposition I_{35} des *"Eléments"* d'Euclide, I signifiant Livre I, 35 désignant le numéro de la proposition. Nous adopterons ce système de référence dans la suite.
(4) Egalité en aire.

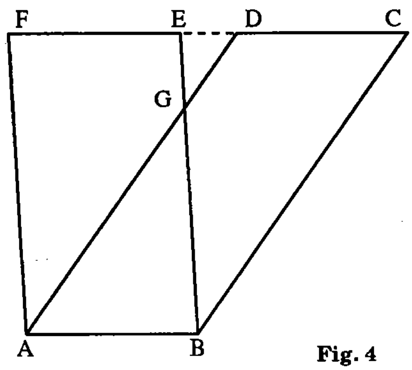


Fig. 4

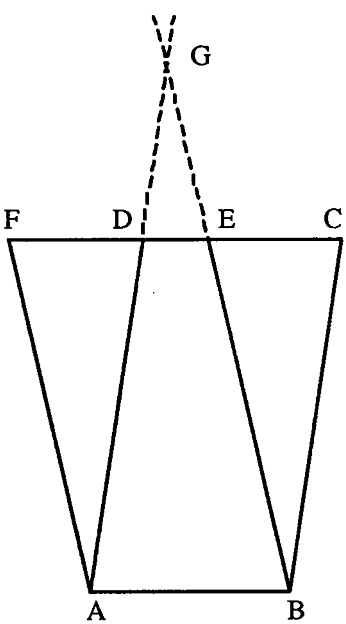


Fig. 5

déduisons l'égalité des parallélogrammes ABCD et ABEF. Le lecteur adaptera facilement cette démonstration au cas de la figure 5.

On nous dira que ceci n'est pas une véritable démonstration rigoureuse, car elle repose sur un élément sensoriel, la figure, ce que le calcul permet d'éviter. Nous croyons qu'il y a là un malentendu sur les caractères d'une démonstration, et sur ce qu'il faut entendre par démonstration rigoureuse. Euclide a été pendant vingt siècles la référence absolue pour la rigueur en géométrie. Celle-ci réside dans l'articulation logique des affirmations successives la vérité de chacune s'appuyant de façon indubitable sur la vérité des précédentes, jusqu'aux axiomes, définitions et postulats. Les arguments visuels n'interviennent vraiment qu'au niveau des axiomes ou des postulats qui eux peuvent effectivement être contestés et remplacés par d'autres (c'est ce qui est fait dans les géométrie non euclidiennes). Voici sept axiomes pris parmi les 9 que contient le Livre I des *"Éléments"* énoncés par Euclide [5], et qui sous-tendent la démonstration précédente, ou les propositions qui suivent ultérieurement :

1. Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.
2. Et si, à des choses égales des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.
3. Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.
5. Et les doubles du même sont égaux entre eux.
6. Et les moitiés du même sont égales entre elles.
7. Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.
8. Et le tout est plus grand que la partie.

Donnons encore la proposition I_{34} :

"Les côtés et les angles opposés des

(5) Dans la version de Vitrac : Euclide, *Les Eléments*, Vol. 1, Livre I à IV, Bibliothèque d'Histoire des Sciences, PUF, 1990.

aires (6) *parallélogrammes sont égaux entre eux, et la diagonale les coupe en deux parties égales."*

Les propositions suivantes pourront alors se démontrer aisément à partir de ce qui précéde. Nous vous les proposons sous forme d'activité.

Activité 2 : Démontrer chacune des propositions suivantes :

I36 : Les parallélogrammes construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux (Figure 6).

Indication : utiliser le parallélogramme intermédiaire ABGH.

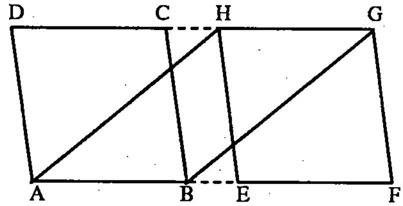


Fig. 6

I37 Les triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux (Figure 7).

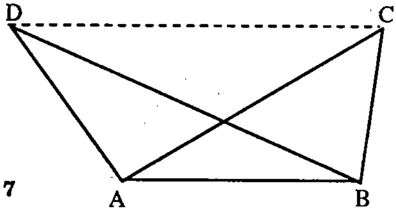


Fig. 7

(6) Le mot *"aire"* ne désigne pas ici une mesure mais l'étendue intérieure d'une figure à deux dimensions susceptible d'être évaluée, le mot *"surface"* étant réservé à la limite d'un solide ! [Vitrae I ; p. 259].

Indication : prolonger CD de part et d'autre de C et D d'une même longueur égale à CD et considérer les parallélogrammes de base AB ainsi construits.

Remarque : Cette propriété a une traduction importante pour le produit vectoriel : Pour tout point D tel que (CD) soit parallèle à (AB) on a l'égalité

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{AB} \wedge \vec{AD}.$$

I38 Des triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux.

Indication : utiliser une construction semblable à celle proposée pour I37.

I39 Les triangles égaux construits sur la même base et placés du même côté, sont compris entre les mêmes parallèles (Figure 7).

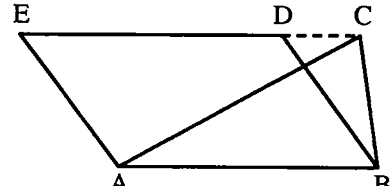


Fig. 8

Indication : faire un raisonnement par l'absurde.

I40 Les triangles égaux construits sur des bases égales et du même côté, sont entre les mêmes parallèles.

Indication : faire un raisonnement par l'absurde.

I41 Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle et est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est le double du triangle (Figure 8).

Indication : utiliser le triangle ABD.

L'ensemble de ces propositions et axiomes permet alors la démonstration suivante du théorème de Pythagore qui conclut le Livre I d'Euclide (Proposition I_{47}) et dont il me paraît difficile de contester tant la logique et la rigueur, que la clarté.

Activité 3

Soit ABC un triangle rectangle en A, et ABDE, ACFG, BCHI les carrés construits (à l'extérieur) sur les côtés du triangle ABC (Figure 9). Démontrer que la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale au carré construit sur l'hypoténuse.

Voici les grandes lignes de la démonstration(*cf.* figure 9) :

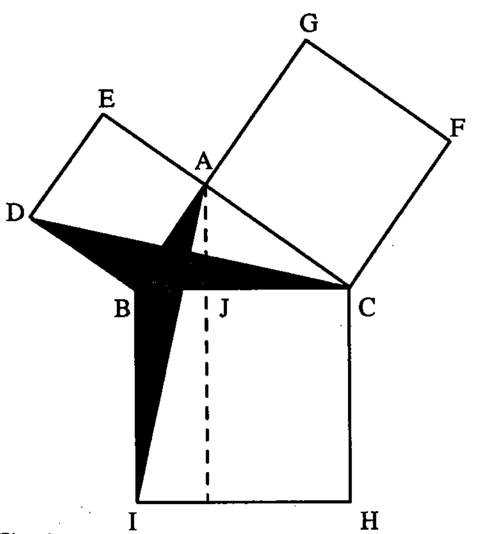


Fig. 9

1) Les angles $D\hat{B}C$ et $A\hat{B}I$ sont égaux (Axiome 2).

2) Les triangles DBC et ABI sont égaux (Proposition I_4).

3) Le carré ABDE est le double du triangle DBC et le rectangle BJKI est le double du triangle ABI (Proposition I_{41}).

4) Donc le carré ABDE est égal au rectangle BJKI (Axiome 6).

5) De même le carré ACFG est égal au rectangle CJKH. Donc la somme des carrés ABDE et ACGF est égale au carré BCHI.

Cette logique impeccable n'est évidemment pas la seule possible. A l'autre bout du monde, en Chine, un mathématicien du nom de Liu Hui donne cette autre démonstration du théorème de Pythagore, dans un livre intitulé *"Neuf livres sur l'art du calcul"* (≈ 260 ap. J.C.). La démonstration de Liu Hui repose sur l'idée simple suivante : pour démontrer que deux figures ont des aires égales, il suffit de montrer qu'elles peuvent être décomposées en les mêmes morceaux, deux à deux superposables (Figure 10). Construisons sur les

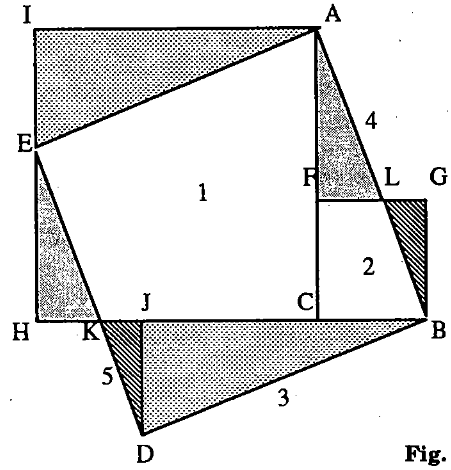


Fig. 10

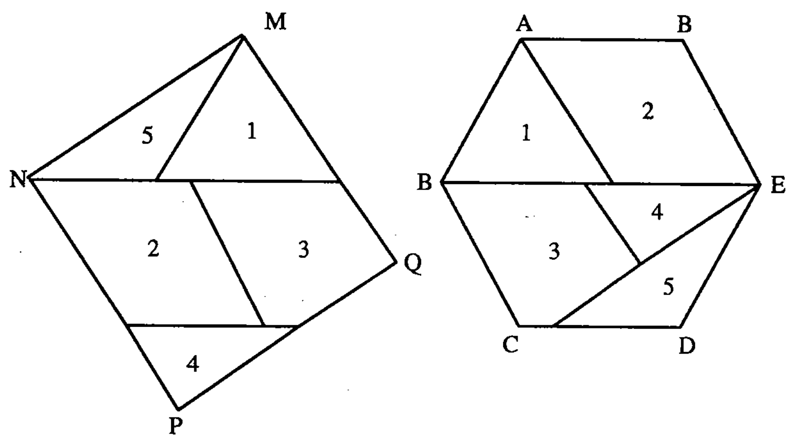


Fig. 11

côtés du triangle ABC les carrés ACHI extérieurement et le carré BCFG intérieurement. Prenons sur HI le point E tel que (AE) soit perpendiculaire à (AB). Alors les triangles ABC et AEI sont égaux (triangles rectangles ayant un côté égal : AI = AC et un angle autre que l'angle droit égal : $\widehat{CAB} = \widehat{EAI}$). Et donc AE = AB. Complétons alors le carré BAED en construisant (ED) perpendiculaire à (EA) et (BD) perpendiculaire à (AB). Ainsi le carré ABDE est la réunion des polygones numérotés 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 qui recomposés autrement donnent le polygone AFGBHI réunion des carrés ACHI et FCBG. La démonstration repose donc sur celle de l'égalité respective des triangles AFL et EHK ; LGB et KJD ; BJD et AEI qui se déduit elle même de l'égalité de deux triangles rectangles ayant un côté égal et un angle (non droit) égal. Cette méthode est basée sur l'idée de multicongruence. Expliquons-la.

II. La multicongruence des polygones

Pour éviter l'ambiguïté du mot *"égal"* que nous avons utilisé principalement (avec Euclide) dans le sens *"égal en aire"*, appelons **congruentes** deux figures qui sont superposables. Ainsi dans la proposition d'Euclide I_4 nous devrions parler de triangles congruents plutôt que de triangles égaux. C'est ce que nous ferons dorénavant. Nous dirons alors que deux polygones P et Π (comme par exemple le carré ABDE et le polygone AFGBHI de la figure 10) sont **multicongruents** si l'on peut décomposer P en un nombre fini de polygones $p_1, p_2, \dots, p_n$ disjoints [7] et Π en le même nombre n fini de polygones $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$ disjoints tels que pour tout indice i le polygone p_i est congruent (superposable) au polygone π_i. Par exemple l'hexagone ABCDEF et le carré MNPQ de la figure 11 sont multicongruents. Deux polygones multicongruents sont évidemment égaux en aire, sans avoir besoin d'être eux-mêmes congruents. D'où une nouvelle méthode de démonstration pour l'égalité en aire de deux figures : il suffit de mettre en évidence leur multicongruence.

(7) On entend par polygones disjoints des polygones n'ayant aucune surface commune, bien que les bords puissent être communs, en tout ou en partie.

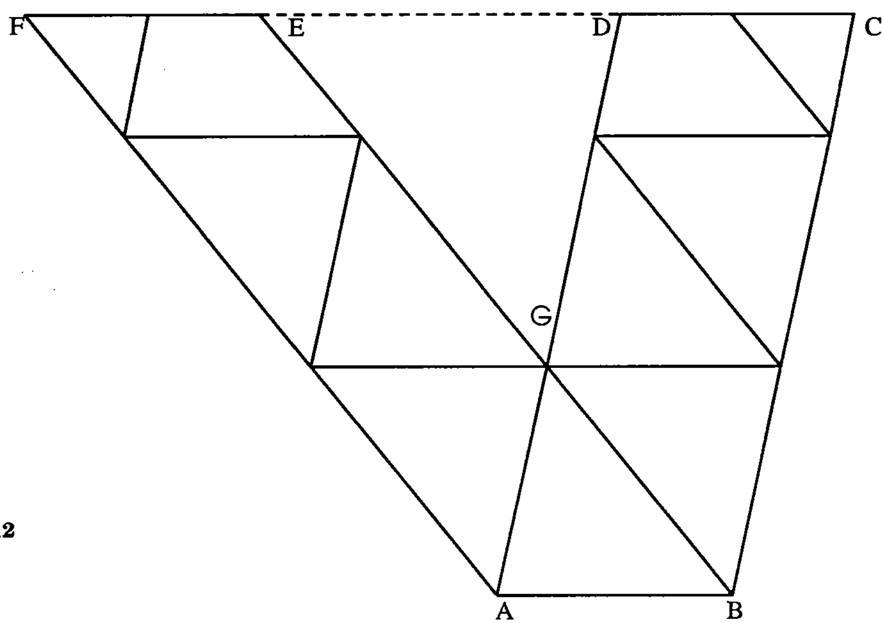


Fig. 12

Activité 4

Démontrer l'égalité (en aire) de deux parallélogrammes ABCD et ABEF ayant une base AB commune et les deux autres, CD et FE sur une même parallèle (*cf.* problème I – figure 1), en utilisant la méthode de multicongruence.

Le résultat est immédiat dans le cas où l'intersection de (AD) et (BE) se fait à l'extérieur du segment [AD] (figure 5). Dans l'autre cas la figure 12 donne la décomposition, dont le lecteur trouvera la justification.

Activité 5

Démontrer qu'un triangle quelconque ABC a même aire que le rectangle BCDE où (DE) coupe [AB] et [AC] en leurs milieux, en utilisant la méthode de multicongruence. Deux cas peuvent se présenter, selon que la hauteur issue de A se projette entre B et C, ou à l'extérieur de [BC] (Figure 13 et 14)

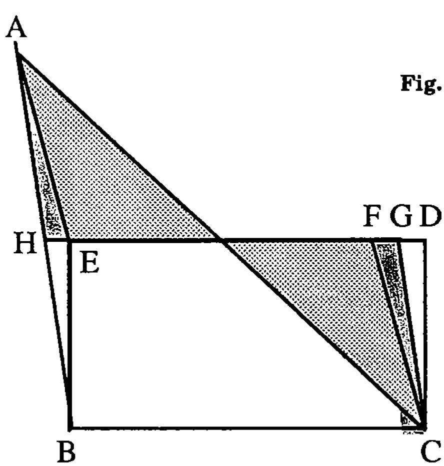


Fig. 13

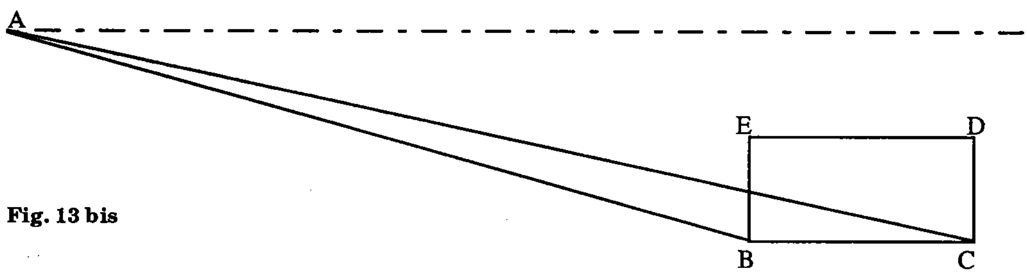


Fig. 13 bis

Mais le problème se complique si le point A est très éloigné (*cf.* figure 13bis) [8].

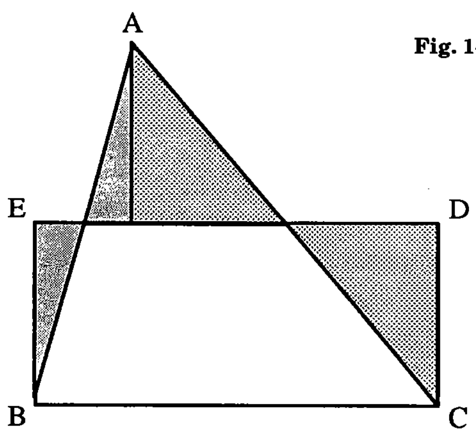


Fig. 14

Activité 6

Démontrer la multicongruence de deux triangles ABC et DBC de même aire, ayant une base commune BC et A et D de part et d'autre de (BC) de façon que AD coupe le segment [BC] (Figure 15).

Il suffit de mener des parallèles aux côtés par le point E intersection de (BC) et (AD).

(EF) // (CD) et (EH) // (AB)
(EG) // (BD) et (EI) // (AC)

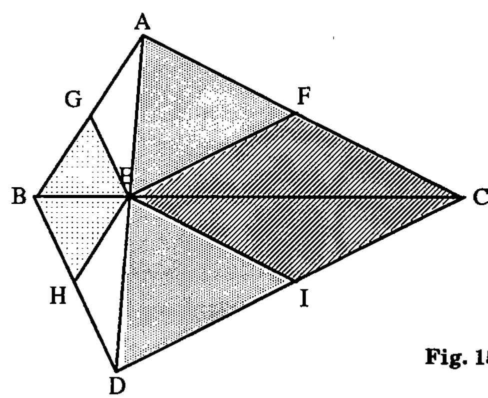


Fig. 15

Ici également le problème est plus difficile si (AD) ne coupe pas le segment [BC] et nous ne nous y engagerons pas. D'une façon générale, on aura perçu le lien de cette problématique avec celle des constructions de Tangram, illustrée par exemple par la figure 11. Nous donnerons en annexe, à la fin, les moyens de construire les 5 morceaux qui constituent ce Tangram là. Comme on le voit sur ces trois exemples, mettre en évidence la multicongruence de deux figures n'est pas toujours très simple. Est-elle seulement toujours possible pour deux figures de

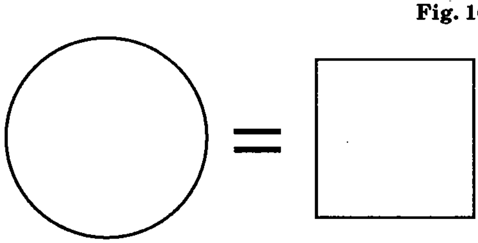
(8) Pour la solution on pourra s'inspirer de l'article "Equidécomposabilité de deux triangles de même base et dont les sommets se trouvent sur une même parallèle à la base", *Activités Géométriques*... Vol. 1, p. 87.

même aire ? Oui, pour les polygones : deux polygones de même aire sont toujours multicongruents. Deux mathématiciens ont démontré de façon indépendante cette propriété au début des années 1830 : F. Bolyai et P. Gerwien. Ce n'est pas le lieu ici de développer leurs méthodes. Mais elles posent le problème suivant : comment mettre en évidence l'égalité en aire de deux polygones ? Il y a bien sûr la méthode qui consiste à mesurer l'aire de chaque polygone au moyen de formules, ce qui n'est pas toujours très simple si le polygone a une forme tant soit peu élaborée et qui, rappelons-le, met presque toujours en jeu des nombres irrationnels. Il existe une autre méthode purement géométrique, élaborée également par Euclide dans les livres I et II des *"Éléments"* et qui est la **quadrature**.

III. La quadrature des polygones

Le mot *"quadrature"* est l'un des rares mots du vocabulaire mathématiques à être passé dans le langage courant, par l'intermédiaire de l'expression *"quadrature de cercle"* pour désigner un problème impossible à résoudre. Mais à l'origine, la **quadrature** d'une surface désignait la construction géométrique, à la règle et au compas, d'un carré égal en aire à cette surface. Réaliser la quadrature du cercle consiste donc à construire un carré de même aire qu'un cercle donné, à la règle et au compas (Figure 16).

Fig. 16



On utilisait aussi autrefois le mot *"quarrer"* une surface, du latin *"quadrare"* : rendre carré.

Dans ses *"Éléments"*, Euclide nous apprend à *"quarrer"* n'importe quel polygone convexe ou non, comme par exemple celui de la figure 17.

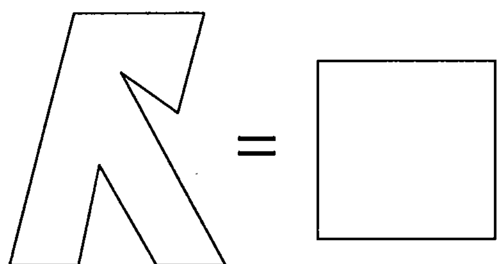


Fig. 17

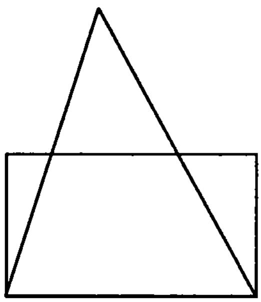
La quadrature permet ainsi de comparer deux polygones quelconques par la comparaison des carrés qui réalisent leur quadrature. En ce sens, la quadrature représente l'étape préliminaire à la mesure des aires au moyen d'un carré étalon pris comme unité.

Pour réaliser la quadrature d'une figure polygonale il suffit de suivre trois étapes que nous noterons construction C_1, C_2, C_3 :

Construction C_1 : décomposer le polygone en triangles, puis les triangles en rectangles par la construction C_1 (Figure 18) ou C'_1 (Figure 19) (*cf.* Activité 5).

Construction C_2 : Par la construction C_2 (Figure 20), transformer chacun des rectangles ainsi obtenu en un rectangle ayant un côté fixé, le même pour tous, de façon à pouvoir les accoler pour réaliser un seul rectangle. Le rectangle ABCD de côtés a × b est égale au rectangle CEFG de côté

Fig. 18



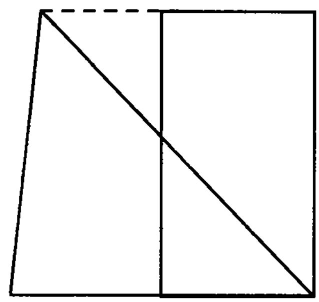


Fig. 19

imposé c, le second, x étant construit en prenant l'intersection de la diagonale (KC) avec (AB). On démontrera facilement que les rectangles ABCD et CEFG ont même aire. Ce résultat correspond à un résultat plus général qui fait l'objet de la proposition I_{43} des *"Éléments"* d'Euclide (Figure 21). Voici cette proposition I_{43} :

> *"Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux"*

Soit ABCD un parallélogramme, (EF) et (GH) deux parallèles aux côtés, se coupant sur une diagonale en I. Alors les parallélogrammes BFIG et HDEI ont la même aire. Ce sont ces parallélogrammes qu'Euclide nomme *"compléments"* (Il suffit de considérer les deux triangles ABC et ACD auxquels on retranche chaque fois deux triangles respectivement égaux).

Activité 7 :
Quadrature d'un rectangle = Transformation d'un rectangle en carré

Construction C_3 Nous disposons donc maintenant d'un seul rectangle que nous allons transformer en carré par la construction c_3 suivante (Figure 22).

Soit ABCD un rectangle. Prolongeons AB selon AE = AD et soit I le milieu de [EB]. Le demi cercle de diamètre [EB] coupe (DA) en H. Alors le carré de côté [AH] a même aire que le rectangle ABCD. C'est

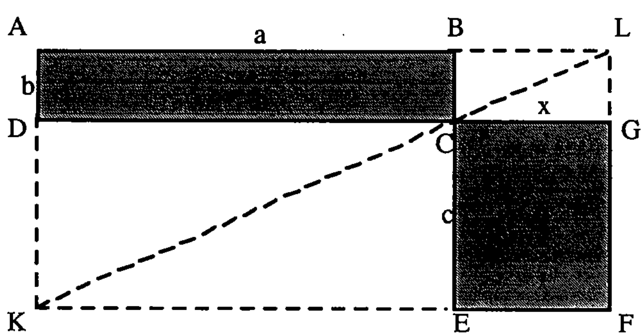


Fig. 20

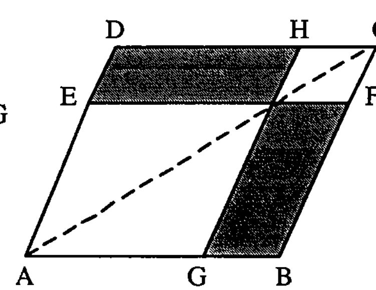


Fig. 21

la proposition 14 du Livre II des *"Éléments"* d'Euclide. En voici la démonstration, toujours purement géométrique.

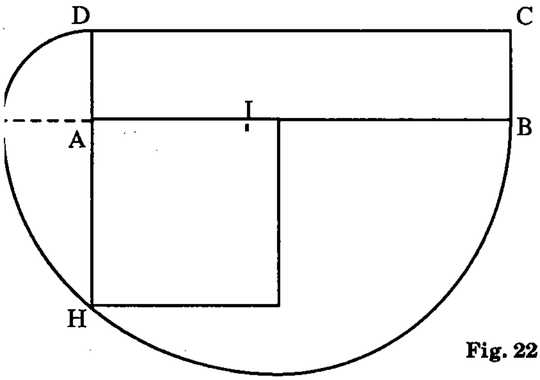


Fig. 22

Activité 8 : Démonstration de la proposition II_{14} des *"Éléments"*

Elle se fait en trois étapes, illustrées par trois propriétés et trois figures.

1) Soit un segment AB et un point C entre A et B (Figure 23). Alors le carré de côté AB est la somme des carrés de côtés AC et CB et du double du rectangle CA × CB.

2) Soit un segment AB, son milieu C, et D un point quelconque entre A et B distinct de C (Figure 24). Alors la somme du rectangle ADJF (égal à DA × DB) et du carré KJIH de côté CD (partie hachurée) est égale au carré de côté CB.

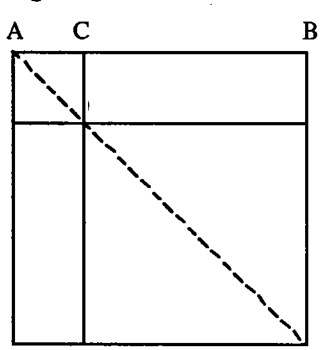


Fig. 23

Démonstration :

D'après 1) le carré de côté AC, ou BC, est la somme des carrés BDJE et HIJK et des rectangles DCKJ et IJEG. Or la somme de BDJE et DCKJ donne CAFK, donc l'aire limitée par AFKHID qu'Euclide appelle un *"gnomon"* est bien égale au carré de côté BC.

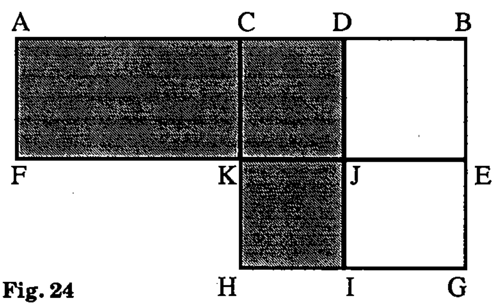


Fig. 24

3) Reprenons alors la figure 22 (figure 22bis). En appliquant le résultat 2) précédent au segment [EB] de milieu I, le rectangle AB × AD augmenté du carré de côté AI est égal au carré de côté IB ou IH.

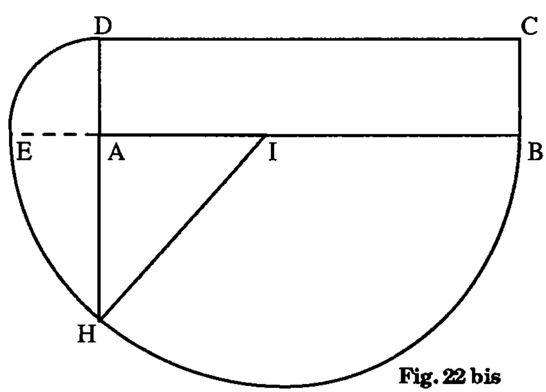


Fig. 22 bis

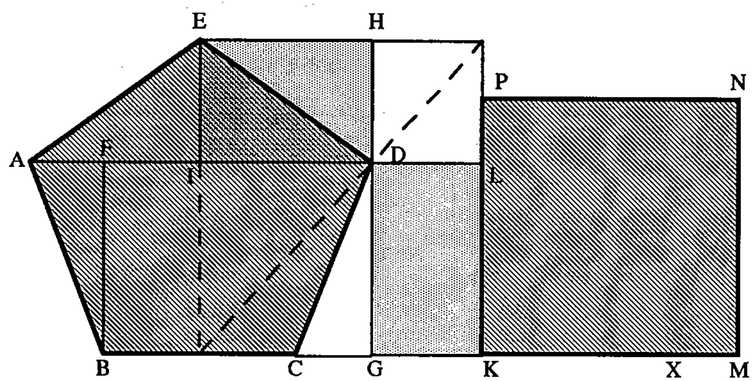


Fig. 25

Mais par Pythagore, le carré de côté IH est la somme des carrés de côtés AI et AH. Retranchant le carré de côté AI de part et d'autre, il reste que le rectangle AB × AD est égal au carré de côté AH.

Activité 9

Illustrons les trois étapes de la quadrature en réalisant la quadrature du pentagone régulier ABCDE (Figure 25).

1) Ce pentagone est la somme des rectangles BFDG et EHDI.
2) Le rectangle EHDI (construction c_1) est égal en aire au rectangle DGKL (construction c_2). Le pentagone a donc même aire que le rectangle BFKL.
3) Le rectangle BFLK est transformé en le carré KMNP par la construction c_3.

Les lunules d'Hippocrate [9]

Les grecs ont bien sûr cherché à réaliser également la quadrature de surfaces autres que polygones, et donc limitée par des lignes courbes, en particulier la célèbre quadrature du cercle, mais aussi la quadrature de la parabole, et d'autres encore.

Hippocrate de Chios réussit ainsi à démontrer l'égalité de certaines surfaces limitées par deux arcs de cercle (lunules) avec certains triangles, ce qui permet leur quadrature.

Activité 10 : Soit ABCD un carré de centre O et (L) la lunule définie par le cercle (γ) de centre O de rayon OA et le cercle (Γ) de centre C de rayon CD.

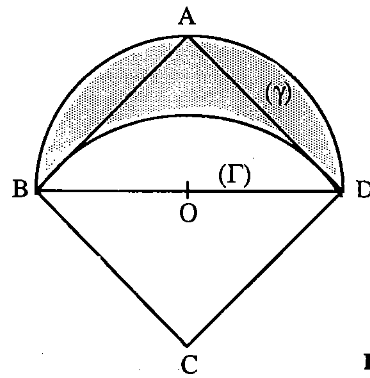


Fig. 26

(9) On trouvera une étude plus détaillée des lunules dans le Volume II des *Activités Géométriques...* Brochure IREM de Strasbourg mentionnée plus haut.

Comparer les quarts des aires des disques (γ) et (Γ). On utilisera le théorème suivant :

Euclide XII$_2$: *"Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres."*

Donc le quart de cercle BCDB est le double du quart de cercle BOAB

En déduire que l'aire de la lunule (L) est égale à l'aire du triangle ABD (figure 26).

EXERCICES

Le lecteur qui souhaiterait tester la bonne compréhension des méthodes développées ci-dessus peut traiter les problèmes suivants.

Activité 11

Généralisation du théorème de Pythagore par Pappus d'Alexandrie ($\approx$ 300 ap.J.C.). Soit ABC un triangle quelconque ABDE et ACFG deux parallélogrammes construits extérieurement sur les côtés AB et AC, et soit H l'intersection de (DE) et (FG). Les parallèles à (AH) menées par B et C coupent (DH) et (FH) respectivement en M et N (Figure 27).

Démontrer que BCNM est un parallélogramme et que son aire est la somme des aires des parallélogrammes ABDE et ACFG.

Indication : comparer les parallélogrammes BDEA, BMHA, BMLK.

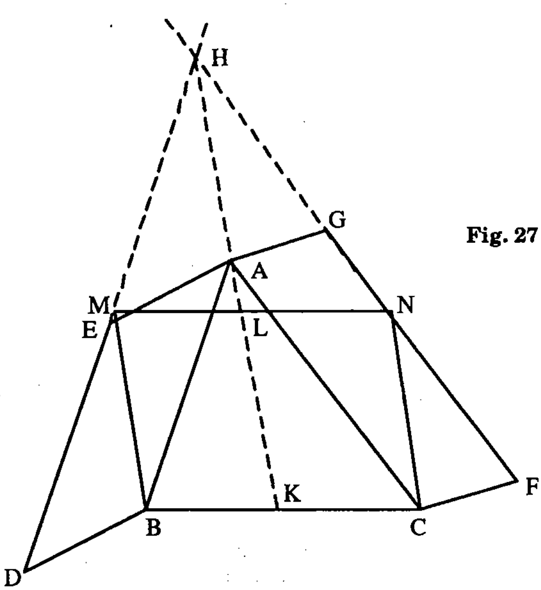


Fig. 27

Activité 12

Soit ABC un triangle quelconque. Trouver un point M intérieur au triangle, tel que les aires des triangles MAB, MAC, MBC soient respectivement la moitié, le tiers et le sixième de l'aire de ABC (Figure 28).

Indication : prendre sur [BC] des points N et P tels que N soit au milieu de [BC] et P

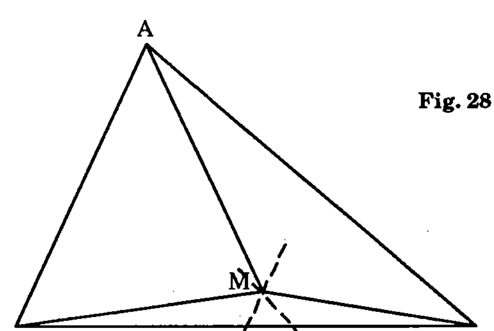


Fig. 28

au tiers de [BC] à partir de C. Puis considérer l'intersection des parallèles à (AB) et (AC) respectivement, passant par N et P. Les triangles ABM et ACM sont respectivement égaux aux triangles ABN et ACP.

Activité 13

Réalisez la quadrature de la figure limitée par les 2 carrés ABCD et EFGH (Figure 29) (partie ombrée).

Indication : se ramener à la quadrature d'un unique rectangle, par la construction c_3 (solution p. 59).

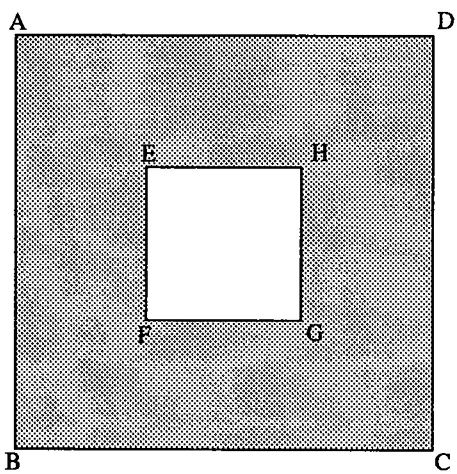


Fig. 29

Activité 14

Expliquez et justifier la figure de la page de titre présentant le théorème de Pythagore sous la forme d'une multicongruence. On remarquera que le carré moyen est partagé en quatre morceaux congruents par deux droites perpendiculaires passant par le centre du carré, l'une des droites étant parallèle à l'hypoténuse du triangle rectangle. Déplaçons ces morceaux selon la figure 30 pour entourer le petit carré. Démontrer que la figure ainsi obtenue est un carré de côté égal à l'hypoténuse du triangle rectangle (solution p. 60).

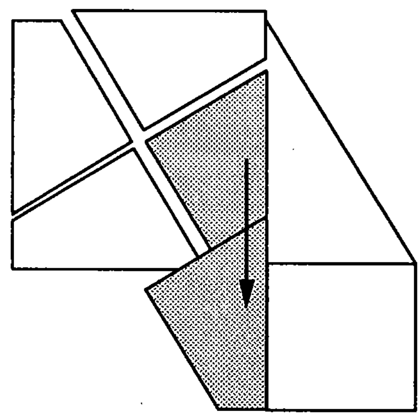
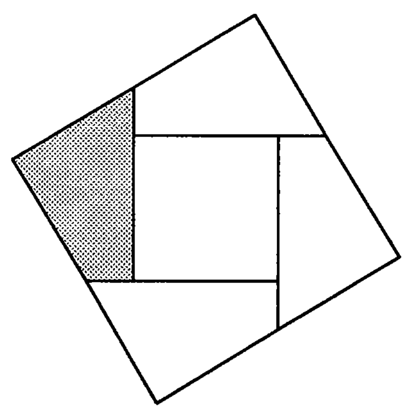


Fig. 30



Activité 15

Construction des cinq morceaux constituant le carré et l'hexagone de la figure 11.

1) Transformer l'hexagone ABCDEF en le rectangle AA'C'D' (voir figure 31).

2) Réaliser la quadrature de ce rectangle en le carré AIHK selon la construction c_3, et placer ce carré de façon que A soit commun avec un sommet de l'hexagone, et I sur la diagonale FC de l'hexagone.

3) Démontrer que (HK) passe par D' (Utiliser Euclide I_{38} généralisé au cas de parallélogrammes – voir Activité 2).

4) Tracer (G'J') parallèle à (AK) par G' sur HD', tel que KG' = HK. On met ainsi en évidence un découpage commun de l'hexagone et du carré en les cinq même morceaux polygones.

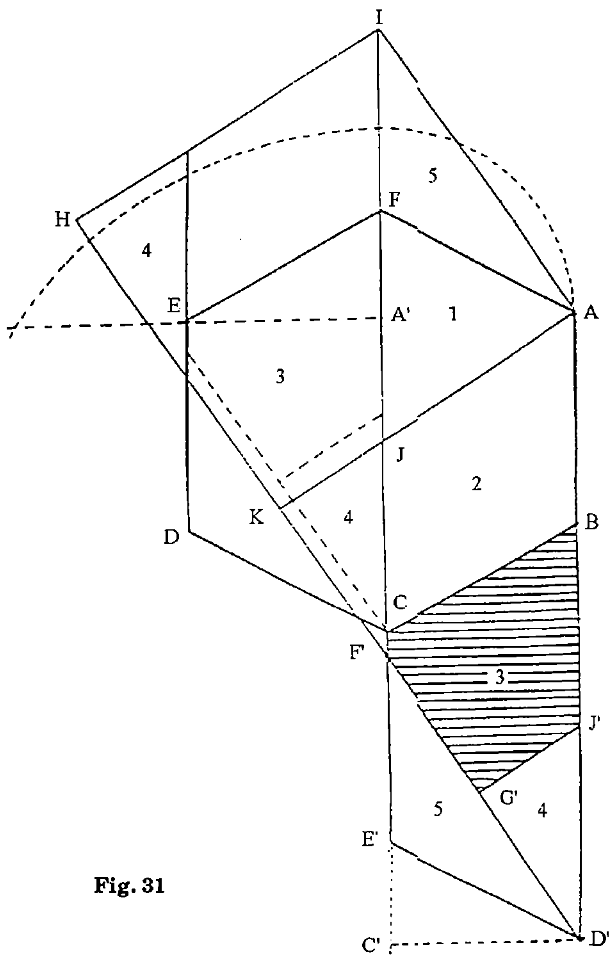


Fig. 31

Activité 16

Démontrer le théorème de Pythagore en appliquant le principe de multicongruence mis en évidence par la figure 32

(MAN), (DU), (FV) sont parallèles à (BC)
(AL) est parallèle à (BE) et (CG)
(PS) et (QR) sont perpendiculaires à (AL)

Donc AEBP et AGCQ sont des parallélogrammes, le premier égal au carré ABDE, le second au carré ACFG. Ainsi, chacun des angles en P ou en Q fait un demi-droit. Il est alors facile de mettre en évidence la multicongruence des carrés ABDE et ACFG avec le carré BCHI.

Activité 17

Démontrer que les deux aires hachurées de la figure 33 sont égales (d'après Léonard de Vinci).

On utilisera l'égalité de la lunule BYCXB avec le triangle OBC, démontrée dans l'activité 10.

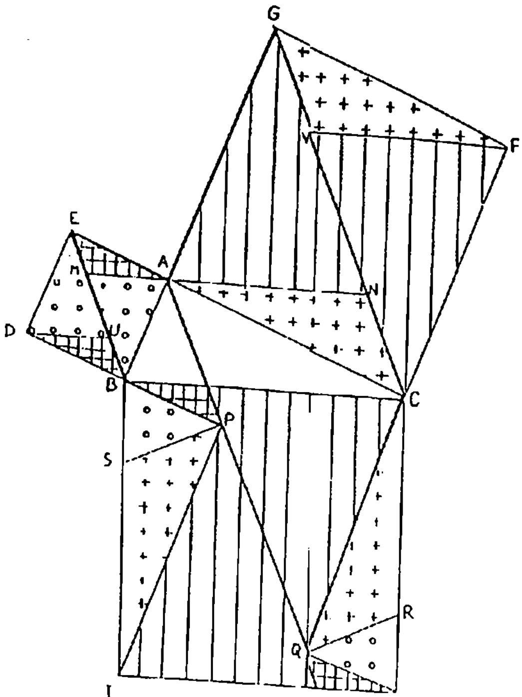


Fig. 32

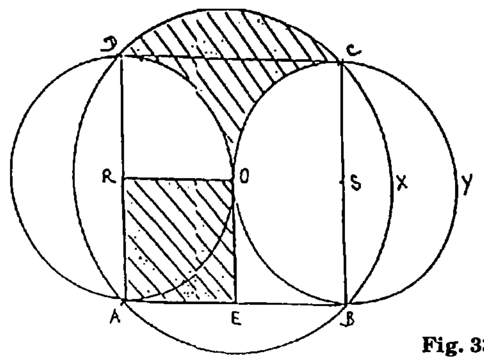


Fig. 33

Solution d'Abûl Wafà

Soient ABCD, A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 les trois carrés.

Divisons chacun des deux derniers en deux triangles égaux, par une diagonale, et disposons les quatre triangles ainsi obtenus le long du contour du premier carré, selon AEB', BFC', CGD' et DHA'. Alors EFGH est le carré cherché (figure 34).

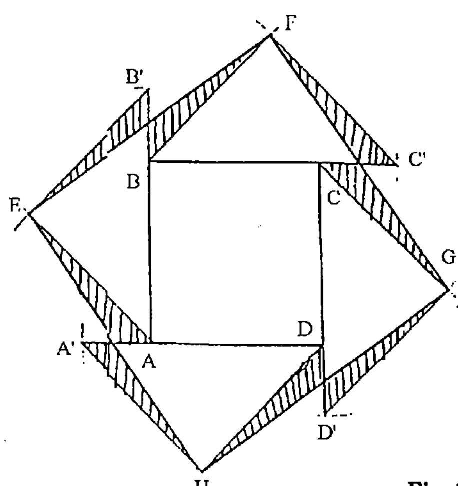


Fig. 34

Indication :

Soit

A l'aire du grand cercle de centre O

B celle de l'un des petits cercles (centre R ou S),

C celle de la lunule BYCXB

D la partie hachurée DOCD.

Alors A+2C = 2B+2D.

Donc D = 1/2A-B+C or 1/2A = B

Donc D = C Mais C = OBC = AEOR

Activité 18

Construire un carré avec trois carrés égaux donnés.

Activité 19

Soit ABC un triangle rectangle en A, duquel on enlève le triangle rectangle ADE où (DE) est parallèle à (BC) (figure 35).

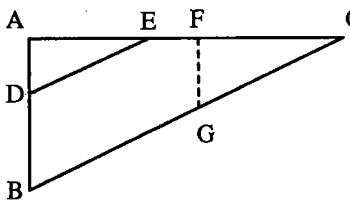


Fig. 35

Du même triangle ABC on peut aussi enlever le triangle FGC tel que FC = AE (et FG = AD) où (FG) est parallèle à (AB). On obtient ainsi deux trapèzes égaux en aire : BDEC et AFGB.

Réaliser leur équidécomposabilité (figures 36 et 37).

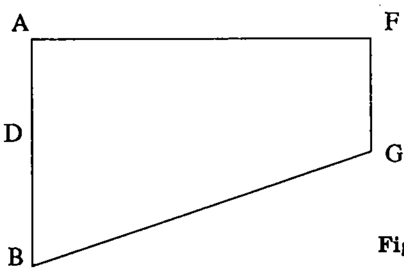


Fig. 36

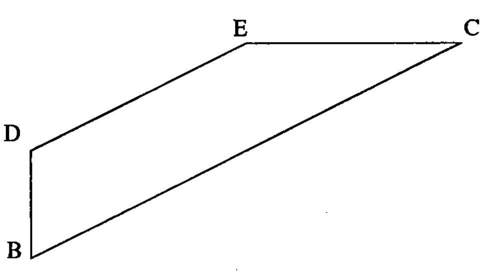
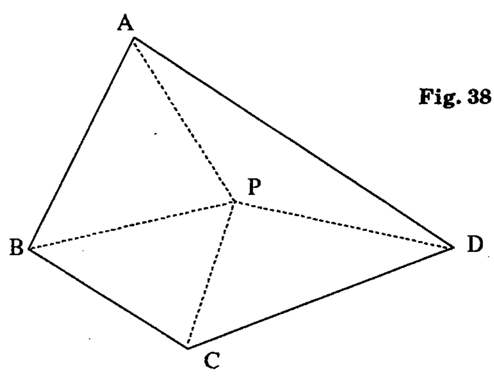


Fig. 37

Activité 20 (d'après Rallye mathématique d'Alsace 1992)

Un père avait quatre fils. Il leur laisse en héritage un champ quadrilatère convexe ABCD, qu'ils doivent partager en quatre parts d'aires égales de la façon suivante : ils creuseront un puits en un point P qui leur servira de lieu de rencontre, et les quatre parts seront constituées des triangles PAB, PBC, PCD, PDA. A quelle condition un tel partage est-il possible, et si c'est le cas, où est situé le puits P ?

Fig. 38



Solution de l'Activité 13

Données : deux carrés parallèles ABCD et EFGH qui ont même centre, le premier contenant le second.

Notations : I et J sont les projetés orthogonaux de F et G sur (BC) et (CD) respectivement.

L'aire de la partie de plan limitée par les carrés ABCD et EFGH est égale à quatre fois celle du trapèze isocèle BCGF. Comme les triangles BIF et GCI ont même aire, l'aire de ce trapèze est aussi celle du rectangle FICJ.

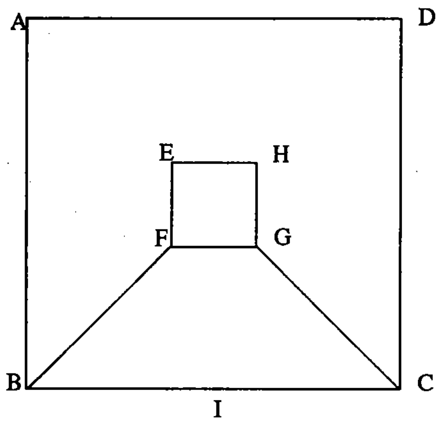


Fig. 39

Il reste donc à réaliser la quadrature de ce rectangle. Elle sera faite en utilisant l'activité 8. Le cercle de centre C et de rayon CJ coupe (BC) en K. Soit L le milieu du segment [IK]. Le cercle de centre L et de rayon LK coupe la droite (CD) en M. D'après l'activité 8, le carré CMNO de côté [CM] et le rectangle FJCI ont même aire. P désignant le symétrique de C par rapport à N, le carré de diagonale [CP] réalise la quadrature de la figure proposée

Solution de l'Activité 14

Données : un triangle ABC, rectangle en A, les carrés ABDE et ACFG construits sur les segments respectifs [AB] et [AC] à l'extérieur du triangle ;

H, le centre du second carré ;
la parallèle à (BC) passant par H coupe [CF] en I et [GA] en J ;
la perpandiculaire à (IJ) passant par H coupe [AC] en K et [FG] en L.

Notations : t_1, t_2, t_3 et t_4 sont les translations de vecteurs respectifs AE, GA, FBet CD.

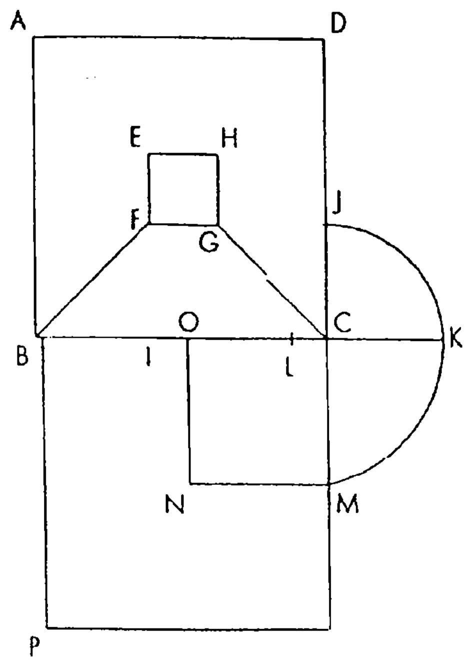


Fig. 40

On pose $t_1(H) = H_1$, $t_1(K) = K_1$, $t_1(A) = A_1$ et $t_1(J) = J_1$ etc, et $c = AB$, $l = KC$.

Les quadrilatères HJAK, HKCI, HIFL et HLGJ sont isométriques puisque H est le centre du carré ACFG et les angles en H sont droits.

ICBJ est un parallélogramme donc IC = JB. Comme GJ = IC, on peut écrire GJ = JB, ce qui prouve que J est le milieu du segment [GB]. On en déduit GJ = JA+AB = KC+AB = l+c.

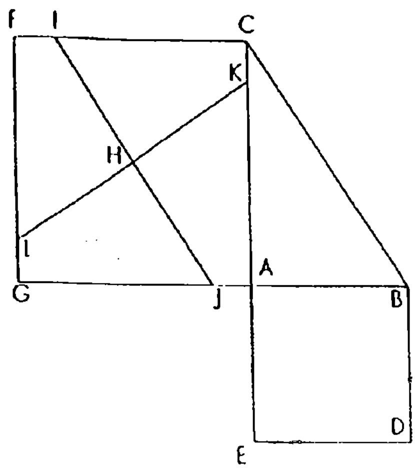
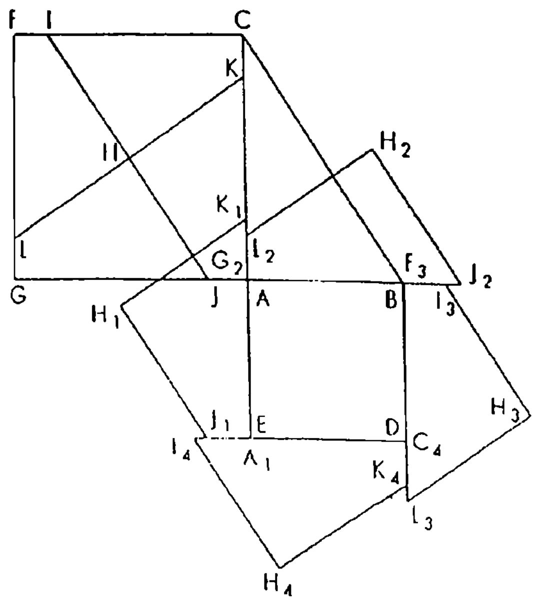


Fig. 41



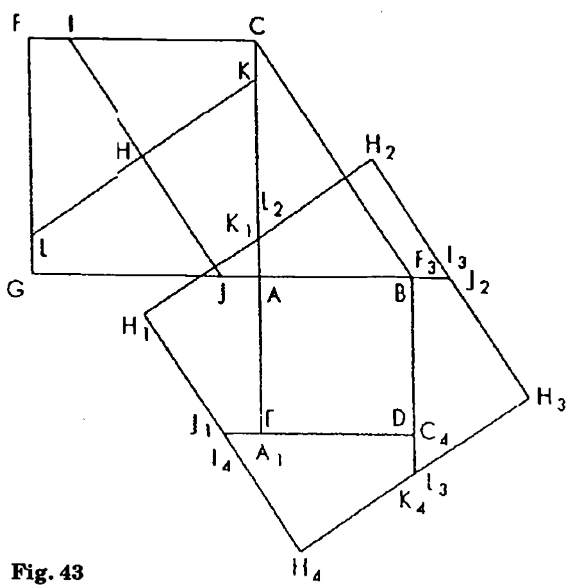


Fig. 43

$AK_1 = A_1K_1 - AA_1 = AK - AB = GJ - AB$
$= l + c - c = l = GL = AL_2$.

Par suite les points K_1 et L_2 sont confondus.

On a aussi $(H_1K_1) // (HK)$, $(L_2H_2) // (LH)$ et $(LH) = HK)$ donc $(H_1K_1) = (L_2H_2)$.

Ainsi les points H_1, K_1, L_2 et H_2 sont alignés.

On démontrerait de la même façon l'alignement des points H_2, J_2, I_3 et H_3, celui des points H_3, L_3, K_4 et H_4 et enfin celui des points H_4, I_4, J_1 et H_1.

La figure donnée par les points H_1, K_1, L_2, H_2, J_2, I_3, H_3, L_3, K_4, H_4, I_4 et J_1 est par conséquent un quadrilatère.

Des égalités

$$\begin{cases} H_1H_2 = H_1K_1 + L_2H_2 = HK + LH = LK = IJ = BC \\ H_2H_3 = H_2J_2 + I_3H_3 = HJ + IH = IJ = BC \end{cases}$$

on tire $H_1H_2 = H_2H_3 = BC$.

Ceci achève de montrer que $H_1H_2H_3H_4$ est un carré de côté BC (figure 44).

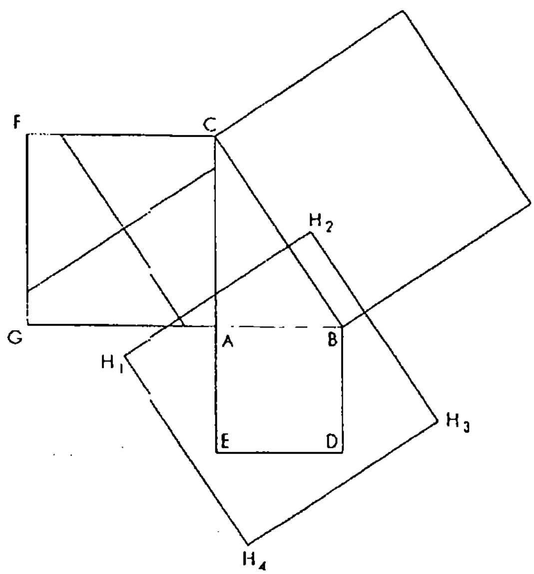


Fig. 44

BIBLIOGRAPHIE

Pour conclure, voici quelques indications bibliographiques pour le lecteur souhaitant développer ce type d'activités et s'informer sur les aspects théoriques sous-jacents.

BOLTIANSKII, V.G. : *Hilbert's third problem*, traduit du russe en anglais par R.A. Silverman, Winston and Sons, Washington 1978.

EGRET, M.A. : *Un apprentissage des aires en sixième*, Mission laïque française 1992.

FOURREY, E. : *Curiosités géométriques*, Librairie Vuibert Paris 1920.

HADWIGER, H., Glur P. : "Zerlegungsgleicheit ebener Polygone", (*Elemente der Mathematik* 6, 97-106).

HILBERT, D. : *Les fondements de la géométrie*, traduits par Rossier, Paris Dunod 1971.