SAUT D'OBSTACLE : GARE AUX APPROXIMATIONS !

Gérard KUNTZ
IREM de Strasbourg

INTRODUCTION

Le programme de mathématiques de la classe de Seconde comporte un chapitre particulièrement craint et détesté par les élèves : les approximations (ou les encadrements) ne sont vraiment pas leur tasse de thé ! Il faut admettre que le traitement des inégalités recèle des pièges redoutables. Des transformations algébriques qui paraissent simples et évidentes sont déclarées fausses par l'enseignant, pour des raisons que les élèves peinent à comprendre. Ceux qui parviennent à dominer les règles multiples et complexes qui régissent les inégalités s'interrogent sur l'utilité de leur effort. Pourquoi "encadrer" la racine de 6 alors que la calculatrice en donne instantanément une valeur de 2.449489743 ? Pour répondre aux doutes, certains enseignants proposent, en module, le calcul approché de $\sqrt{2}$ par une méthode géométrique ou par l'algorithme de Héron. Ils expliquent que ces démarches ont un grand intérêt historique (les calculatrices n'ont pas toujours existé !). Ils éveillent ainsi la curiosité d'une partie des élèves. Et en effraient d'autres : si en plus des mathématiques, il faut faire de l'Histoire !

Beaucoup de lycéens se contentent de laisser passer l'orage, se disant qu'il est de courte durée. L'expérience semble leur donner raison. A cause de sa difficulté et de la résistance des élèves, de nombreux enseignants traitent cette partie honnêtement, mais sans zèle excessif. Ils se gardent d'insister sur le bouleversement qu'elle annonce : l'orage n'est pas isolé, il inaugure une longue saison des pluies qui s'affirmera en Première et se généralisera en Terminale !

L'usage de plus en plus fréquent *d'encadrements pour atteindre les valeurs* *exactes,* est l'une des difficultés majeures de l'enseignement des mathématiques au lycée. Marc Legrand en précise l'ampleur et les enjeux (1) : "Comprendre qu'un système de majorations et de minorations peut aboutir à des résultats exacts et admettre cette philosophie au point de "perdre de l'information" en remplaçant de son propre chef, dans la résolution d'un problème, un calcul exact par une majoration ou une minoration, cela constitue un **obstacle épistémologique** (2) crucial dès la classe de Seconde. Ne pas le franchir verrouille l'accès au SENS de l'analyse : on n'en comprend alors que l'aspect algébrique. Cela ne donne aucune autonomie supplémentaire pour résoudre un problème de mathématique non scolaire. De plus, cette analyse totalement algébrisée n'est pas adaptée à la résolution des "vrais" problèmes de physique."

C'est à l'étude de cet obstacle épistémologique que s'attache le présent article. Les observations et les travaux relatés ont été réalisés *durant deux années scolaires (95/96 et 96/97) dans une classe de Première S et de Terminale S du lycée Couffignal à Strasbourg.* Vingt des vingt-six élèves de la Première S se sont retrouvés en Terminale S (ils ont été rejoints par dix redoublants). Tous les élèves de la Terminale S avaient choisi les mathématiques comme spécialité en vue du Baccalauréat. Enfin, les deux classes avaient complété leur formation, à raison de deux heures par quinzaine, par une option (mise en place et financée par le lycée Couffignal) d'"informatique appliquée aux mathématiques". Des travaux d'une certaine ampleur, destinés à mettre en évidence l'obstacle épistémologique, à l'affronter et à en préparer le franchissement, ont alors été possibles (3).

L'article présente des temps forts de l'affrontement (sévère et répété) des élèves (l'enseignant étant allié ou adversaire selon les circonstances) à l'obstacle. Il ne cherche pas à être exhaustif. L'outil informatique y tient une place importante, il serait naïf de croire cependant qu'il suffit, comme les trompettes de jadis, à faire tomber les murs de la forteresse ! Une fois l'obstacle épistémologique repéré, il a fallu convaincre les élèves qu'il était impossible de l'éviter. Souligner l'immense gain que procure la nouvelle façon d'aborder certains problèmes. Etablir des ponts entre les nouvelles (et coûteuses) démarches mathématiques et le fonctionnement quasi-magique des calculatrices constitue un argument de poids en faveur des idées d'approximations et d'encadrements.

Une rupture aussi profonde dans la façon de penser (avec l'insécurité qu'elle entraîne) ne peut se faire que lentement et prudemment. Deux ans ne sont pas trop pour poser le problème et proposer des éléments de solution. Si, en fin de Terminale, les élèves sont persuadés qu'approximer est une manière efficace d'aborder le réel, l'essentiel est fait, même s'ils demeurent malhabiles dans la mise en

(1) "Mathématiques, mythe ou réalité", *Repères-Irem* n° 20, pages 121 à 124.

(2) Cette notion est précisée dans l'encadré qui suit.

(3) Les différents travaux réalisés avec cette classe ont été publiés. En voici la liste. 1) "Droites sages et droites folles en Première scientifique" (*Repères-Irem* n°27) ; 2) "Image calculée et ordre de grandeur" (*Bulletin de l'Apmep* n° 409) ; 3) "Une transformation oubliée qui sort de l'ordinaire" (*L'Ouvert*, Avril 97 et *Repères-Irem* n° 30) ; 4) "Saut d'obstacle : gare aux approximations !" (il s'agit du présent article) ; 5) "Suite de Fibonacci : le zéro et l'infini" (à paraître dans le bulletin de l'APMEP). On peut mesurer l'ampleur du travail qui a été fait avec cette classe, en deux ans, à raison de deux heures par quinzaine.

œuvre du nouvel outil. Comme pour la notion de limite (qui recèle elle aussi des obstacles épistémologiques redoutables [4]), le lycée ne peut proposer qu'une première étape. On y met en place les instruments d'intelligibilité. Mais c'est dans l'enseignement supérieur que l'obstacle sera (il faut l'espérer) définitivement franchi [5].

L'obstacle épistémologique

Si un élève ne comprend pas une notion, ce n'est pas nécessairement qu'il n'est pas doué, qu'il ne travaille pas assez, qu'on ne lui a pas bien présenté les choses, ou même qu'il bute sur la difficulté (classique) d'apprendre du nouveau. Ce qu'on lui enseigne est parfois si *énorme* qu'un changement de regard sur le monde est nécessaire. On lui propose d'abandonner un système de pensée qui avait une pertinence locale et qui avait fait ses preuves dans des cas banals (il faut penser contre la nature et contre nous-mêmes, affirmait Bachelard [6], pour que l'esprit scientifique triomphe des divers obstacles épistémologiques).

Ce n'est pas simple

Il s'agit d'accepter d'affronter avec lui cette difficulté comme une étape longue, normale et importante dans la démarche d'apprentissage. *Car la bonne explication du professeur n'est toute puissante que lorsque la chose enseignée est mineure.* Quand ce que l'on enseigne est vraiment consistant, il est impossible de l'enseigner directement.

1. APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR UN POLYNÔME

En Première, l'introduction de la dérivée met en évidence une idée promise à un bel avenir : il est possible d'approcher localement une fonction dérivable par une fonction "plus simple", de nature polynomiale. Malheureusement, cette situation mêle inextricablement les obstacles épistémologiques que recèlent deux notions essentielles du lycée, le passage à la limite et la définition d'une valeur numérique par approximations. Même si elle est loin d'être idéale, à cause de sa complexité, cette "figure imposée" par le programme génère une idée forte, aux applications nombreuses et variées dès le lycée et dans l'enseignement supérieur

(4) Voir "Saut d'obstacle" dans *Repères-Irem* n°22. A la lecture de ce texte, Luc Trouche a proposé de préciser les obstacles épistémologiques en jeu dans la notion de limite. D'abord **l'obstacle géométrique** : quand on parle de "position limite de droite", quand on dit qu'un point tend vers un autre, prépare-t-on l'ancrage de la notion de limite dans le domaine numérique ? **Ensuite l'obstacle monotone** : comment rompre avec l'idée que l'existence d'une limite n'est pas nécessairement associée à un rapprochement régulier d'un point donné ? Comment convaincre par exemple les élèves que, si une fonction tend vers plus l'infini, elle n'est pas nécessairement croissante ?

(5) Une réflexion de Luc Trouche : "Je pense qu'un obstacle épistémologique n'est jamais définitivement franchi. C'est ce qu'exprime Bachelard (je cite de mémoire) : 'En l'homme du vingtième siècle sourd toujours l'homme du dix-neuvième siècle'."

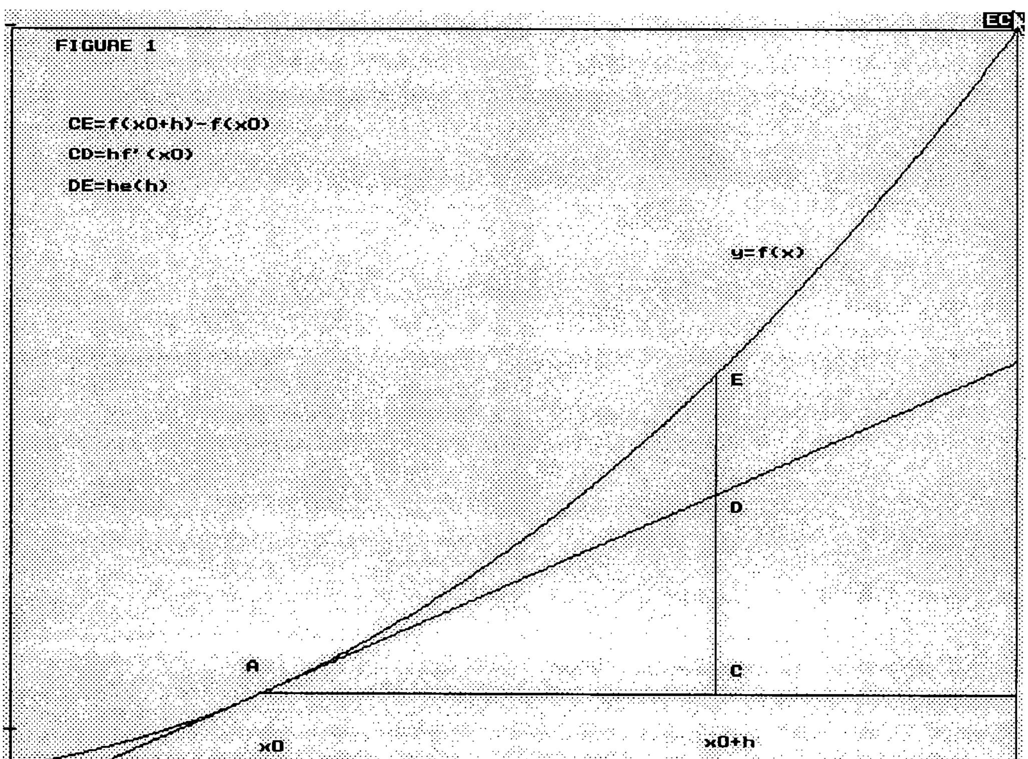
(6) Voir bibliographie n° 1.

a) Une première étape peu convaincante

L'introduction du nombre dérivé d'une fonction comme limite d'un taux d'accroissement s'est passée sans véritable difficulté en Première S. Les élèves ont compris, au moins intuitivement, la notion de limite : un important travail sur la tangente en un point à une courbe [7] a donné un sens géométrique à la définition de la dérivée, si bien que la plupart des élèves ont calculé très rapidement les dérivées de fonctions simples, en y prenant un plaisir évident (les applications géométriques et cinématiques ont fortement stimulé leur curiosité).

Le moment semblait venu de leur proposer la seconde approche de la dérivation : $f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\alpha(h)$ (1), $\alpha(h)$ tendant vers 0 avec h. Ils l'ont accueillie sans difficulté, mais sans enthousiasme : pourquoi une seconde définition, alors que la première est simple et opérationnelle ? Pourquoi se compliquer la vie avec une fonction α dont on ne connaît rien, sinon sa limite en 0 ?

Ces objections, tout à fait compréhensibles, devaient tomber (c'est ce qu'imaginait l'enseignant) devant l'interprétation géométrique de la relation (1) : chaque



(7) Voir "Droites sages et droites folles en Première scientifique" dans *Repères-Irem* n° 27.

terme y trouve un sens géométrique, en particulier le mystérieux $h\alpha(h)$. Une figure illustre clairement l'idée forte (figure 1) : il est possible d'approcher une courbe par sa tangente, en commettant une erreur d'autant plus négligeable que l'on est proche du point de contact (8). De plus, le remplacement de la tangente par toute autre droite passant par le point de contact, conduit à une erreur dont le rapport avec la précédente tend vers l'infini avec h : la tangente est la droite qui approche "le mieux possible" (dans un sens très fort) la courbe au voisinage du point de contact.

Grande fut la surprise devant la difficulté des élèves à entrer dans une problématique qui paraissait lumineuse ! Les exercices d'application n'ont pas modifié l'espèce d'incrédulité qui planait dans la classe, et qu'un élève a traduit en ces termes : "Monsieur, je comprends ce que vous faites, mais je ne vois vraiment pas à quoi ça sert".

Deux raisons expliquent le malaise de la classe. Pourquoi se fatiguer à calculer "à la main" ce qu'une calculatrice donne instantanément ? Quel intérêt y a-t-il à développer une méthode qui ne donne une approximation de qualité *qu'au voisinage immédiat d'un point ?* (la calculatrice ne connaît pas ce genre de limitation).

Il fallut expliquer qu'une calculatrice ne produit pas des valeurs *ex nihilo* ! L'une des façons de faire (indépendamment des astuces propres à diminuer le temps de calcul) consiste à remplacer une fonction par une fonction plus "simple", qui en donne une approximation, dans des conditions déterminées. Remplacer une fonction par une fonction affine est la première étape d'un processus qui, à terme, répond aux deux objections des élèves. En passant d'une fonction affine à une fonction polynôme de degré plus élevé, on généralise le processus et on obtient, dans la plupart des cas (9), une approximation de qualité au-delà du voisinage immédiat du point de contact.

L'idée qu'il fallait fournir à la calculatrice des algorithmes d'origine mathématique pour calculer $\sin(x)$ ou $\sqrt{x}$ ne les avait pas effleurés ! La perspective de voir, dans les années à venir, le dessous des cartes a suscité de l'intérêt. Mais pourquoi diable fallait-il attendre si longtemps pour généraliser une première étape peu convaincante ?

Il était clair, en effet, que si de nouvelles perspectives étaient tracées (et paraissaient intéressantes), l'étape de la dérivée restait décevante pour la classe. Il fallait proposer sans trop tarder un exemple d'approximation qui tienne mieux ses promesses.

b) Pourquoi une si vive résistance ?

Les deux définitions de la dérivée, proposées aux élèves de Première, sont

(8) Cette affirmation n'est vraie (en valeur absolue) que dans les cas simples. En toute généralité, il faudrait la remplacer par : "la limite de la différence est nulle quand x tend vers l'abscisse du point de contact". De prestigieux relecteurs ont laissé passer cette erreur, qui relève de l'obstacle monotone (voir note 4). Cela souligne l'importance de ce type d'obstacle. Merci à Etienne Meyer de me l'avoir signalé.

(9) Sauf exception : tous les polynômes de Taylor (en 0) de $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, prolongée par continuité en 0, sont nuls !

logiquement équivalentes. Elles ne le sont pas pédagogiquement. La première est accueillie avec curiosité et gourmandise. Elle permet de calculer l'équation de la tangente à une courbe en un point donné ou la vitesse instantanée d'un mobile. Les élèves perçoivent la difficulté et l'intérêt de ces problèmes. En revanche, leur environnement informatique les conduit à sous-estimer l'intérêt de l'approximation d'une fonction, que les calculatrices réalisent à la satisfaction générale. Il faut retrouver la perspective historique pour se persuader de la nécessité de cette démarche (les calculatrices sont très récentes et n'existent que grâce aux mathématiques qu'elles intègrent).

On peut risquer une interprétation plus profonde de la résistance des élèves. Le peu d'intérêt rencontré par l'approximation d'une fonction ne traduit-il pas le refus de renoncer à l'exactitude en mathématique ? Les élèves admettent, certes, que les calculatrices produisent des valeurs approchées. Mais comme les valeurs exactes sont en général inaccessibles et que les valeurs approchées sont affichées avec force décimales, ils finissent par confondre ces deux valeurs numériques (10) ! La théorie présentée (même si elle est embryonnaire) éclaire cruellement ce flou artistique, bouleverse des habitudes anciennes et engendre un réel malaise.

c) Des courbes qui enveloppent une sinusoïde (11)

C'est en tout début de Terminale que s'est placé le travail qui suit. Il a été conçu comme une révision et une synthèse de nombreuses notions de Première dont les longues vacances avaient entamé la solidité et la précision. Il a cherché surtout à reprendre l'approximation d'une fonction par un polynôme, en l'élargissant pour en montrer toute la portée. Pour l'alpiniste en difficulté dans une paroi, la sortie par le haut est parfois une meilleure solution que le retour en arrière ou l'attente des secours. Le pari du texte proposé était simple : il est plus facile de comprendre ce qu'approximer veut dire quand on met en jeu une famille de polynômes dont les courbes "approchent" de mieux en mieux la courbe initiale (*cf.* encadré page suivante).

α) Le déroulement de l'activité

Comme d'habitude, ce travail de huit heures en environnement informatique a donné lieu à une intense activité mathématique. L'enseignant, souvent sollicité, est sorti de chaque séance de deux heures épuisé (mais ravi) par la vivacité du dialogue, les nombreux rappels nécessaires, les interrogations et les indispensables reformulations avec les différents groupes d'élèves.

(10) Voir plus loin l'encadré "De la valeur explicite à la valeur exacte : le détour par l'approximation".

(11) Remarque d'Henri Lombardi : "Une bonne approximation polynomiale d'une fonction sur [−1,1] est donnée par un polynôme de Chebyshev, de préférence à un polynôme de Taylor. Un théorème de Chebyshev dit que la meilleure approximation de degré n passe successivement $n+1$ fois au moins, de manière alternée au-dessus et en dessous de la courbe approximée. Les polynômes de meilleure approximation sont peu utilisés car difficiles à calculer. Il serait très intéressant de susciter un article concernant l'implantation des fonctions usuelles sur machine. Je soupçonne qu'on aurait des surprises, ni Taylor, ni Chebyshev, mais un savoir adapté au cas par cas."

Approximation de sin(x) par des fonctions polynômes

1°) Rappel de Première

En utilisant une des définitions de la dérivée de la fonction sinus en 0, donnez une approximation de sin(x) au voisinage de 0 par un polynôme de degré 1. Dans quelles conditions cette approximation est-elle satisfaisante ?

2°) Travail sous DERIVE

Introduisez la fonction y: = sin(x).

Utilisez les commandes Calcul Taylor que vous appliquerez à cette fonction (variable x, ordre 1,2,3 etc., point 0).

a) Quelle est la valeur de Taylor(sin(x),x,1,0) ? Représentez graphiquement les 2 fonctions. Commentez en comparant au 1°).

b) Pour n allant de 1 à 9, que vaut Taylor(sin(x),x,n,0) ? Donnez une valeur synthétique des coefficients qui apparaissent dans ces polynômes.

Représentez graphiquement ces fonctions et la fonction sinus sur le même écran graphique. Traduisez ces graphiques par des encadrements successifs de sin(x) pour $x > 0$. Quel est le statut de ces encadrements (certitudes ou conjectures ?)

3°) Partie théorique

On note $f_n(x)$ = *Taylor*(sin(x),x,n,0) et $g_n(x) = \sin(x) - f_n(x)$. Calculez les dérivées successives de $g_9(x)$ et leur valeur en 0 jusqu'à l'obtention d'une dérivée dont le signe est connu pour $x > 0$. Déduisez-en de proche en proche le signe de toutes les dérivées précédentes, leurs variations et des encadrements de sin(x) et cos(x) dans cet intervalle.

4°) Comment peut-on majorer l'erreur commise en encadrant sin(x) par deux polynômes de Taylor consécutifs sur [0,A], A étant un réel positif ?

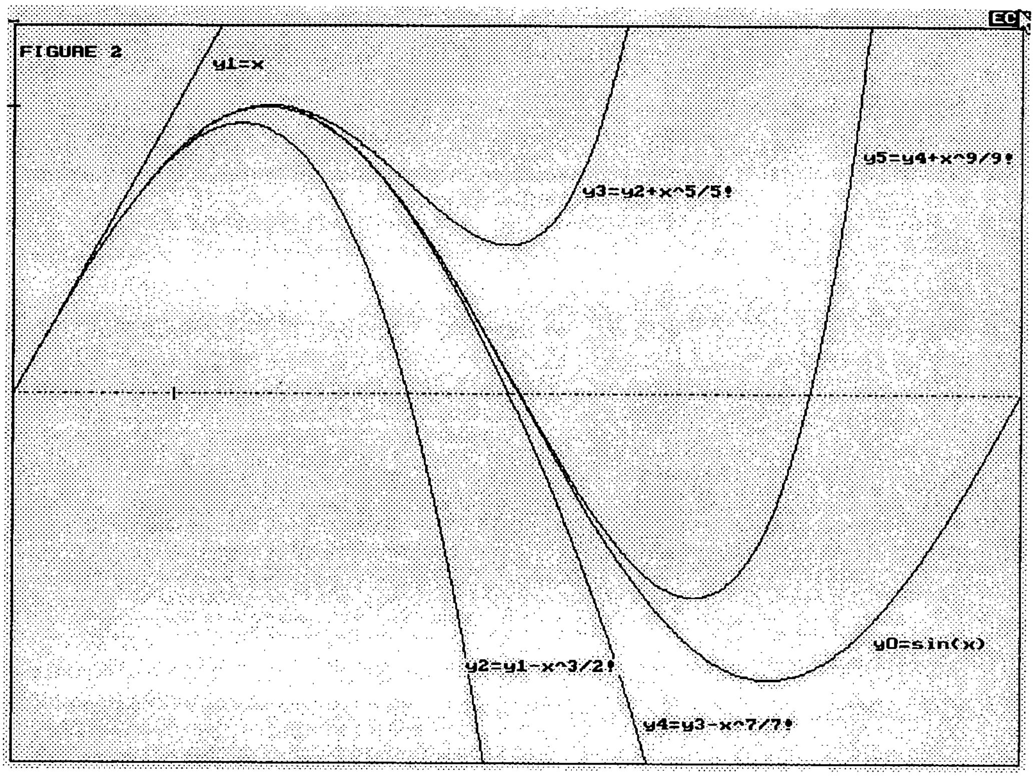
5°) Calcul approché de sin(x)

Montrer que pour tout réel x, on peut trouver un réel a compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ tel que sin(x) = sin(a) (au signe près). Calculer sin(251) à 10^{-6} près.

Comme prévu, le démarrage a été lent et douloureux. La seconde définition de la dérivée (dans le cadre d'une approximation) a été longue à émerger. Un des binômes d'élèves a remis la définition au tableau, ce qui a accéléré le mouvement. Ils ont poussé le zèle jusqu'à en interpréter les différents termes sur une figure (voir figure 1), montrant ainsi une réelle compréhension de la notion. Mais l'instanciation de la relation a posé de gros problèmes à plusieurs. Passer de :

$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\alpha(h)$
à : $\sin(h) = h + h\alpha(h)$
puis à : $\sin(x) = x + x\alpha(x)$

n'a rien d'évident, même pour de bons élèves.



Le travail sous Derive a été passionnant pour l'observateur. La maîtrise technique des élèves étant assurée, ils ont produit sans grande difficulté les images informatiques attendues (figure 2).

La conformité de la première étape du processus informatique avec la partie théorique précédente a été reconnue, mais n'a pris tout son sens qu'au terme de l'exploration informatique. Les formulations verbales, affinées par la discussion, ont pris une allure intéressante : "les courbes des polynômes se superposent de mieux en mieux à la sinusoïde (ou épousent plus longtemps la sinusoïde) quand le degré augmente". Certains élèves ont cherché jusqu'à quel degré il fallait aller pour obtenir une superposition dans l'intervalle [0, 2π]... Ils ont reconnu alors que la partie théorique du début (la fameuse dérivée qui les avait tant fait souffrir) était la première étape du processus d'enveloppement qui se déroulait sous leurs yeux (en temps réel) et qu'ils découvraient avec enthousiasme et émerveillement. La partie était gagnée : si on pouvait envelopper la sinusoïde "loin de l'origine", il valait la peine de se fatiguer ! *Mieux encore, la première étape peu convaincante retrouvait un statut acceptable dans cette démarche générale.*

Il a fallu alors s'interroger sur la réalité de la superposition observée : ces élèves ayant une longue pratique de l'image informatique ont essayé par le zoom de distinguer des courbes superposées à l'écran. Ils y sont parvenus d'autant mieux que le degré du polynôme était faible et le point éloigné de l'origine. Près de l'origine, il était impossible, en itérant le zoom, de distinguer la sinusoïde des courbes de polynômes de degré élevé. Ils en ont donc été réduits aux conjectures quant aux positions relatives des différentes courbes pour $x > 0$. Il a paru raisonnable de supposer (les zooms réussis allaient dans ce sens) que les courbes restaient entièrement du même côté de la sinusoïde (au-dessus ou en dessous, en alternance). Ainsi ont été obtenus des encadrements du sinus qui ont suscité un véritable intérêt, comme l'ont prouvé une foule de questions subsidiaires. "D'où sortent ces polynômes ? Jusqu'à quel degré peut-on aller ? Est-ce que ça marche pour d'autres fonctions ? Comment écrire le polynôme général ?" Toutes ces questions trouveront des réponses (totales ou partielles) en cours d'année. La dernière a été résolue en cours de séance : les factorielles reconnues, il n'était pas compliqué d'écrire le polynôme de Taylor (de degré $2n + 1$) du sinus.

Dernière remarque : les courbes des polynômes coïncident avec la sinusoïde pour les réels négatifs : la figure sur cet intervalle est obtenue à partir de la précédente par symétrie par rapport à O. La réflexion sur la parité a permis d'esquisser un début d'explication sur l'absence de termes de degré pair dans les polynômes de Taylor produits par le logiciel.

Il restait à interroger les comptes-rendus écrits pour s'assurer de ce qui était vrament compris par les élèves.

β) *L'activité à l'épreuve des comptes-rendus* (12)

Une majorité d'excellents comptes-rendus confirma les impressions très favorables tirées des séances de travail. Mais certaines lacunes indiquaient des points à reprendre. Deux groupes étaient vraiment restés à la surface des choses.

Dans la première partie, les rédactions étaient dans l'ensemble convaincantes. Appliquant la définition de la dérivée à la fonction sinus en 0, un des binômes avait écrit :

"$\sin(x) = x + x\alpha(x)$, $\alpha(x)$ tendant vers 0 avec x. x est une valeur approchée de $\sin(x)$. Elle est d'autant meilleure que x est voisin de 0. La droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe du sinus en O(0,0)."

On ne saurait mieux dire. On a trouvé de nombreuses variantes de cette formulation.

Certains textes étaient plus discutables :

"$f(x) = x + x\alpha(x)$. $x\alpha(x)$ est une erreur négligeable quand x est petit. $f(x) = x$ ".

Si la conclusion n'est pas acceptable sous cette forme en mathématiques, il faut reconnaître qu'elle ne gêne pas les physiciens (13) et que ses auteurs avaient compris l'essentiel.

(12) Une activité informatique ne peut être évaluée qu'à la lumière d'un compte-rendu écrit. L'absence de ce document conduit à de graves illusions sur la réalité du travail des élèves.

(13) Voir la partie 4 : "L'équation de Van Der Pol : la boucle est bouclée". Les élèves sont soumis à de dures variations de points de vue !

La deuxième question consistait à étudier la position relative des courbes du sinus et des polynômes de Taylor fournis par Derive et d'en déduire une série d'encadrements du sinus. Les comptes-rendus différaient surtout par la précision du langage. Les inégalités étaient écrites correctement, mais plus ou moins bien justifiées :

"Au fur et à mesure que n croît, les courbes (des polynômes de Taylor) épousent de plus en plus la courbe du sinus en passant alternativement au-dessus et au-dessous d'elle. Lorsque x se rapproche de 0, on constate que, même en zoomant (répétitivement) les courbes sont confondues. En zoomant, les courbes semblent être des droites."

"Chaque nouvelle approximation encadre $\sin(x)$ avec des polynômes qui épousent sa courbe au voisinage de 0. Plus le degré est important, plus l'intervalle où le polynôme superpose la sinusoïde est grand. Nous constatons que chaque nouvelle approximation est successivement supérieure puis inférieure à $\sin(x)$. Donc la courbe associée à l'approximation est une fois au-dessus puis au-dessous [14] de la sinusoïde pour le degré suivant (1, 3, 5, 7, 9...)".

Le dernier texte révèle des handicaps d'expression française et des mélanges de genres. Il est incontestable que ces élèves avaient compris le phénomène mathématique. Mais ils l'exprimaient dans une langue très approximative, confondant *l'observation graphique et ses conséquences numériques :* de la position relative des courbes, il est possible de *déduire* des encadrements numériques de $\sin(x)$: leur dernière phrase affirme exactement l'inverse (voir le *donc* révélateur...) !

Dans une majorité de copies, la superposition des courbes était passée sous silence, bien que tous aient essayé de lever l'ambiguïté par des zooms répétés. Les inégalités écrites étaient dès lors sujettes à caution : les élèves qui ont une bonne pratique de l'image informatique le savent bien. Le silence observé (ou les trop rapides allusions) ont bien pu traduire la difficulté d'exprimer en français la complexité de l'observation et de ses conséquences.

Enfin, le calcul de sin(251) semblait être bien compris, après de longs tâtonnements : l'intérêt de passer par la mesure principale était clairement affirmé. Dans plusieurs textes, la comparaison entre l'approximation directe et celle qui utilise la mesure principale était faite, avec une grande précision : "Pour avoir une précision à 10^{-6} près avec la mesure principale, il faut le polynôme de degré 5 et celui de degré 7. Si on avait calculé avec 251 directement, il aurait fallu les polynômes *de degré 693 et 695 !* On voit bien l'utilité de travailler avec la mesure principale."

γ) L'environnement informatique est-il bien nécessaire ?

En Terminale, on pouvait se contenter de la partie théorique pour obtenir l'ensemble des encadrements, sans recours à l'informatique. Mais il y a un monde entre l'écriture d'inégalités et la compréhension de leur sens ! *L'image informa-*

(14) Le passage d'une fonction polynôme à la suivante revient à ajouter à la première un monôme dont le signe est connu, alternativement positif et négatif. La position relative de deux courbes consécutives en découle. Mais cette remarque ne permet pas de préciser leur position par rapport à la sinusoïde.

tique, réalisée en direct sous les yeux de élèves, apporte une information décisive à ce stade de l'apprentissage. Elle parle mieux et plus précisément que l'image finale, *de type photographique* (figure 2) : les expressions "de mieux en mieux" et "de part et d'autre de la sinusoïde" traduisent l'expérience sensible des élèves. De ce point de vue, l'informatique est précieuse. Mais elle ne saurait faire l'économie de la démarche théorique pour lever ses propres ambiguïtés !

2. APPROXIMATION D'UNE RACINE D'UNE ÉQUATION

En Première, les élèves apprennent à résoudre des équations par des méthodes en rupture totale avec leurs habitudes. Du calcul explicite des racines, ils passent à l'affirmation d'existence de ces racines et à leur encadrement. Là encore, la notion de limite est la clé de ce progrès (par l'intermédiaire de la dérivée ou de la continuité). Mais sa présence est discrète : en Première, l'existence d'une fonction dérivée est vérifiable en général par un calcul de nature algorithmique. L'obstacle épistémologique (atteindre la valeur exacte par l'approximation) peut donc être affronté dans un contexte plus épuré. C'est la deuxième étape de notre étude

a) De la racine "explicite" à sa définition par encadrement

Jusqu'en Seconde, les élèves ont appris à résoudre des équations. Soigneusement choisies, ces équations ont livré, après traitement, des solutions explicites. Cette époque bénie est prolongée, en Première, par la résolution de l'équation du second degré.

A ce niveau, on avoue aux élèves que la plupart des équations que rencontrent les scientifiques dans leurs travaux ne relèvent pas de cette sympathique catégorie.

Une telle annonce suscite toujours étonnement et scepticisme. A force d'évoluer dans un décor en trompe-l'il, les élèves finissent par le confondre avec la réalité ! Il faut dire que la rectification est brutale. Elle aurait pu être préparée de longue date au moyen de l'outil informatique.

En Première, on dispose enfin des concepts (stricte monotonie, dérivation, signe d'une fonction) permettant d'énoncer des conditions suffisantes *d'existence et d'unicité* d'une racine d'une équation dans un intervalle donné. On peut dès lors résoudre des équations de type $f(x) = 0$ pourvu que la fonction f soit strictement monotone, dérivable (15) et qu'elle change de signe sur un intervalle I. Ce théorème, appliqué répétitivement, conduit à l'algorithme de dichotomie (16) qui permet d'encadrer la racine avec une précision donnée. Le même énoncé affirme l'existence théorique d'un nombre et donne le moyen de l'encadrer (mais pas de le

(15) La continuité n'est pas au programme de Première.

(16) Cet algorithme présente des problèmes si la fonction est "trop plate quand elle traverse l'axe des x". Normalement, il faudrait connaître une minoration de la valeur absolue de la dérivée pour avoir un algorithme fiable. Voir à ce sujet l'article "hier et demain" dans la brochure "Mathématiques constructives" d'Henri Lombardi, à l'Irem de Besançon (1994).

De la valeur explicite à la valeur exacte : le détour par l'approximation

L'obstacle épistémologique se situe dans la définition des nombres. Un réel est déterminé, par exemple, par la suite de ses encadrements décimaux (17). Son écriture explicite n'a qu'une valeur de symbole. Les élèves n'ont, au lycée, que de très vagues notions sur les réels. Ils éprouvent un sentiment de perte lorsqu'ils sont obligés de les cerner par ce procédé. Ils ont l'impression de ne pas vraiment connaître la racine d'une équation définie par une dichotomie (certains pensent même que ce procédé définit une infinité de nombres (18) !). Ils opposent ce procédé, qu'ils perçoivent comme flou, à l'écriture explicite (donc précise à leurs yeux) d'un réel, $\sqrt{2}$ par exemple. Or ce nombre est lui-même défini comme l'unique racine positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$, donc par encadrements ! *La confusion entre la définition d'un réel (qu'ils ignorent) et sa représentation symbolique est la source de l'obstacle épistémologique.*

calculer au sens habituel... Voir l'encadré "De la valeur explicite à la valeur exacte : le détour par l'approximation").

b) Un bouleversement considérable

La résolution "exacte" d'équations repose essentiellement sur des méthodes algébriques. Diverses transformations d'expressions, parfois longues et complexes, conduisent d'une forme initiale, réductible à $f(x) = 0$, à une forme finale $x = a1$, $x = a2$, ... , $x = an$ où les solutions sont énumérées. Le théorème précédent est en totale rupture avec cette méthode : il conduit à reconnaître la dérivabilité d'une fonction sur un intervalle, à en déduire la stricte monotonie et à vérifier son changement de signe. Le changement de cadre est brutal : d'algèbre on passe en analyse. D'un calcul effectif par manipulation d'expressions, on glisse vers l'affirmation d'existence et d'unicité de la solution ! On change véritablement de monde. C'est ce que souligne le passage de la valeur explicite à son approximation.

c) Mystérieuses "conditions suffisantes"

Il est hors de question, à ce niveau, de démontrer le théorème fondateur. Mais il faut saisir l'occasion de préciser ce que sont des "conditions suffisantes". Une fonction peut ne vérifier aucune des trois hypothèses de ce théorème et néanmoins réaliser sa conclusion ! Par exemple $f(x) = |x|$ sur $[-1,1]$. f n'est pas même une bijection de $[-1,1]$ sur l'ensemble image $[0,1]$. Cela trouble beaucoup les élèves. Ils l'expriment fortement : "Mais alors, on ne peut plus rien dire de sûr !" Il convient de les rassurer et de souligner le pas de géant qui vient de s'accomplir : toutes les fonctions qui, sur un intervalle donné, vérifient les hypothèses ont, sur cet inter-

(17) Remarque d'Henri Lombardi : "Ce n'est pas parce qu'un nombre réel est bien connu (par une suite de Cauchy de rationnels explicites convergeant vers lui avec une vitesse supérieure à 10^{-n} par exemple) qu'on est capable de calculer ses décimales. Pour un réel "infiniment proche" de 1, on risque de ne jamais savoir si sa partie entière est 0 ou 1 !"

(18) Voir "Quelques semaines du cours d'analyse en Première S avec Derive", Denis Tasso et Nicole Vogel, *Repères-Irem* n° 25, pages 101 et 102.

valle, une racine unique que l'on sait encadrer. Nous enrichissons considérablement la famille, jusque là fort limitée, des équations que l'on sait résoudre. *Cet énorme saut quantitatif se paye par le passage de la valeur explicite des solutions à leur valeur exacte définie par approximations.*

d) Des solutions oubliées ou inventées

Si aucune des conditions du théorème fondateur ne sont nécessaires, l'absence d'une seule d'entre elles peut rendre l'énoncé faux (bien que l'absence simultanée des trois hypothèses ne soit pas incompatible avec la conclusion !). Là encore, les contre-exemples sont indispensables à la bonne compréhension de ce très difficile énoncé.

Dans le même ordre d'idées, l'algorithme de la dichotomie, mis en œuvre sur un intervalle où l'une des conditions est défaillante, peut "inventer" des racines inexistantes ou en escamoter de bien réelles ! Appliqué à $f(x) = (x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{3})$ sur $[0,1]$, il "oubliera" les racines $-\frac{1}{4}$ et $-\frac{1}{3}$ et annoncera une racine proche de 1 ! Les élèves réalisent ainsi que des conditions "théoriques" non respectées peuvent conduire à *de sérieux inconvénients "pratiques"*.

e) Un accueil sans drame, avec des îlots de résistance

Mis à part le trouble impressionnant produit par les variations sur le thème des conditions suffisantes, les élèves ont encaissé sans drame l'énorme bouleversement qui leur était proposé. Ils ont certes regretté l'abandon du cadre algébrique rassurant de leur jeunesse pour celui, tout neuf et encore incertain, de l'analyse. Ils se sont étonnés qu'on ne sache pas résoudre de façon exacte la plupart des équations et ne se sont pas privés de le dire ("Est-ce qu'on ne sait pas le faire parce qu'on n'a pas encore trouvé les bonnes méthodes ?" interrogent-ils). Mais ils ont été ravis de pouvoir résoudre de nouvelles équations "bien plus dures", même avec une méthode qu'ils n'auraient pas imaginée.

Ce qui a fait passer la pilule, c'est que la nouvelle approche s'accompagne d'un algorithme qui permet un encadrement de la racine avec une précision décidée d'avance (dans les limites des possibilités de la calculatrice). Or, entre une valeur exacte et un encadrement très fin de cette valeur, les élèves ne voient guère de différence. Intuition rassurante, que confirmera par la suite *la définition d'un réel comme limite de suites décimales* (19) *dont les calculatrices affichent les premiers termes.*

Il ne faut cependant pas se leurrer : le passage est difficile, en particulier pour des élèves peu portés vers des formulations théoriques. En Terminale STI, les élèves affrontent le même théorème et ses conséquences. Or, pendant de longs mois, parfois même au baccalauréat, certains tentent de résoudre des équations du type $x - 1 - \ln(x + 1) = 0$ avec les méthodes anciennes (et éprouvées). Ils annoncent comme solution $x = -1 + \exp(x - 1)$... Or le texte du problème précise clairement le cadre. Il demande de prouver que, pour $x > -1$, l'équation $f(x) = 0$ a deux racines a

(19) Voir la note n° 17.

et b, dont l'énoncé donne un encadrement. Malgré ce balisage sans équivoque, certains élèves choisissent des voies anciennes (sans issue), révélant ainsi la résistance à une forme de pensée trop nouvelle et trop étrange pour leur sembler fiable (20).

Quel dommage que, tout en développant les aspects algébriques de la résolution des équations, ces élèves n'aient pas été familiarisés, dès la fin du Collège et surtout en Seconde, avec les aspects fonctionnels et graphiques du problème : ils auraient pu, au moyen de l'informatique par exemple, s'habituer à la lecture approchée de racines d'équations, en attendant que la théorie légitime leur existence.

3. APPROXIMATION D'UNE INTÉGRALE

Le calcul d'aires est abordé en Terminale essentiellement par l'intermédiaire des primitives. Il est important de signaler aux élèves les limites de ce procédé : aussi, le programme prévoit-il (pour pallier l'impossibilité de calculer certaines primitives) une approche très différente qui les déconcerte beaucoup. Le calcul approché d'aires est le troisième thème de cet article

Pour tenir compte de l'impossibilité de calculer explicitement de nombreuses primitives, le programme de Terminale prévoit des travaux pratiques sur le calcul approché d'une intégrale par différents procédés (méthode des rectangles, des points médians, des trapèzes et parfois méthode de Simpson). En général, l'enseignant décrit les démarches utilisées et établit les formules générales. Les élèves les mettent en œuvre sur des exemples simples.

Dans le cadre de la réflexion sur le passage des valeurs explicites aux valeurs exactes par approximations, il a paru intéressant de proposer cette démarche aux élèves. Le travail s'est déroulé en binômes, avec une utilisation importante du logiciel Derive. Le texte qui suit (21) *a été donné sans explication préalable : les élèves devaient (en situation d'autonomie) en tirer la très riche information et la traiter.* Au-delà du calcul approché d'une intégrale, ce texte introduit une autre définition de l'intégrale (celle de Riemann) que les élèves verront quelques mois plus tard dans l'enseignement supérieur. Dans un souci de cohérence, la dernière partie du texte fait le lien entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale obtenue à partir d'une primitive.

(20) Dans le problème du Baccalauréat 97, en série ES, les élèves avaient à résoudre l'équation $(2x^2 + 3x - 3)e^{-x} = 0$. Certains candidats l'ont résolue par approximations, très correctement d'ailleurs. Les automatismes ne fonctionnent pas en sens unique !

(21) Ce texte a été élaboré par Philippe Michel, mon collègue du lycée Couffignal. Il l'a expérimenté en introduction au calcul intégral en Terminale (avant toute autre définition). Je l'ai utilisé en complément à l'approche de l'intégration au moyen des primitives.

Calcul approché d'une aire :
Vers une nouvelle définition d'une intégrale

Idée générale de l'activité

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$, Cf sa courbe représentative. On désigne par A l'aire limitée par Cf, (Ox) et les droites D et D' d'équation respectives $(x = a)$, $(x = b)$. On se propose d'approcher A par la somme S_n des aires de n rectangles. On va montrer que la limite de cette somme quand n tend vers l'infini est A.

On sait que $A = \int_a^b f(x)dx$.

La démarche précédente permet alors de donner une nouvelle définition de l'intégrale, plus générale (on ne connaît pas toujours une primitive de f) : $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Détails de l'activité (texte remis aux élèves)

Soient les points $A_0(a,0)$ et $A_n(b,0)$. Soit n un entier naturel non nul. On partage le segment [AB] en n segments de même longueur : $[A_0A_1]$, ... , $[A_kA_{k+1}]$, ... , $[A_{n-1}A_n]$.

k varie de 0 à $n - 1$. On désigne par x_k l'abscisse de A_k. On considère les points suivants :

$$C_k(x_k, f(x_k)); B_{k+1}(x_{k+1}, f(x_k)); D_k(x_k, f(x_{k+1})); C_{k+1}(x_{k+1}, f(x_{k+1})).$$

Soient S(a,b,n,k) l'aire du rectangle $(A_kC_kB_{k+1}A_{k+1})$ et $T(a,b,n,k)$ celle du rectangle $A_kD_kC_{k+1}A_{k+1}$ (figure 3).

On pose $R1(a,b,n) = \sum_{k=0}^{n-1} S(a,b,n,k)$ et $R2(a,b,n) = \sum_{k=0}^{n-1} T(a,b,n,k)$.

1°) Représentez les éléments ci-dessus quand f est croissante, décroissante, ou quelconque sur $[a,b]$. Calculez en fonction de a,b,n,k les coordonnées des différents points précisés plus haut, ainsi que $S(a,b,n,k)$ et $T(a,b,n,k)$.

Interprétez $R1(a,b,n)$ et $R2(a,b,n)$. Comparez ces deux quantités à A dans les 3 cas précédents.

Introduisez $S(a,b,n,k)$ et $T(a,b,n,k)$, puis $R1(a,b,n)$ et $R2(a,b,n)$ dans DERIVE.

2°) On pose $f(x) = x^2$. On suppose a et b positifs.

a) Faites simplifier par Derive les expressions $R1(a,b,n)$ et $R2(a,b,n)$. Montrez que

$R1(a,b,n) \leq A \leq R2(a,b,n)$. Faites calculer à Derive les limites de ces 2 expressions quand n tend vers l'infini (commandes : Calcul puis Limite). Que constatez-vous ? Comment interprétez-vous ce résultat ?

b) Refaites le même travail "à la main".

3°) Reprenez le même exercice qu'en 2)a) dans les cas suivants :

$f(x) = x^3$ avec $0 \leq a \leq b$

$f(x) = x^4$ avec $0 \leq a \leq b$

$\gamma) f(x) = x^5 + 3x^4 - x^2 + x + 5$ avec $a = 1$ et $b = 3$.

Dorénavant lorsque $R1(a,b,n)$ et $R2(a,b,n)$ ont une limite commune, on notera celle-ci $I(a,b)$. Calculer $I(0,\pi)$ pour $f(x) = \sin(x)$.

4°) Dans cette question, $a = 1$, $b = 3$ et $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

- Les expressions de R1 et de R2 sont-elles simplifiées par Derive ?
- Montrez que $R2(a,b,n) \leq A \leq R1(a,b,n)$ et calculez $R1(1,3,n) - R2(1,3,n)$.
- En déduire que les deux suites R1 et R2 convergent vers la même limite.
- Déterminez un encadrement de $I(1,3)$ à 10^{-3} près.

5°) Soit $m > 0$. Calculez $I(0,m)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^4$ c) $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$ d) $f(x) = x^3 - x$

Que représente $I(0,m)$ pour f ? Montrez que $I(0,m) = \int_0^m f(x)dx$.

Conclusion

L'ensemble de ce travail permet d'entrevoir une nouvelle définition d'une intégrale par les égalités suivantes :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

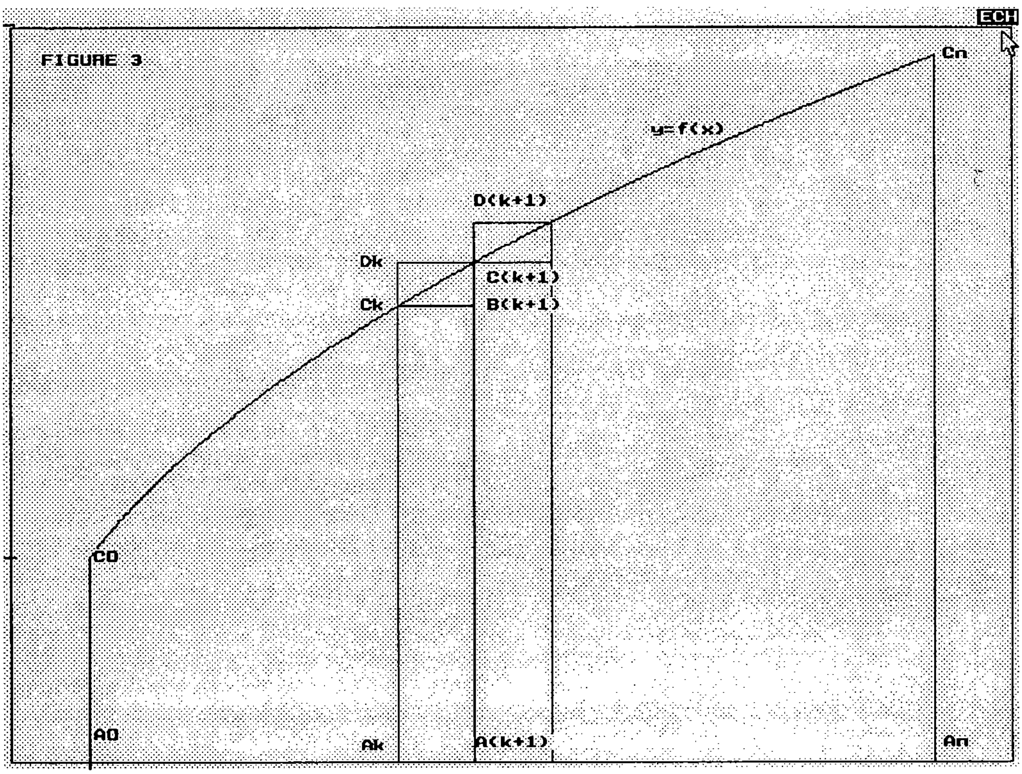
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (k+1)\frac{b-a}{n}) = I(a,b)$$

Le déroulement de l'activité : Des difficultés largement sous-estimées.

D'emblée les choses ne se sont pas passées comme prévu : les élèves ont éprouvé des difficultés considérables à comprendre ce qui leur était demandé ! Ils ont mis pour traiter le problème deux fois plus de temps (10 heures) que ce qui avait été estimé (4 à 6 heures).

a) D'emblée, des difficultés techniques et conceptuelles

Toute la première séance a été nécessaire pour établir les coordonnées des points indispensables pour la suite du travail et calculer les sommes des aires des rectangles mis en évidence. Ce que la



majorité des élèves aurait compris (dans les grandes lignes) après un exposé d'un quart d'heure, demandait deux heures en acquisition autonome ! Trois types de difficultés expliquent la lenteur des élèves : les coordonnées des points comportaient *quatre paramètres* (a,b,k,n) ; ils avaient rarement utilisé *des sommes* de n termes comprenant plusieurs paramètres ; enfin la présence simultanée de *deux sommes d'aires* leur paraissait surprenante, voire inutile.

Le dessin qui leur était fourni pour les aider (figure 3) utilisait une fonction croissante : l'observateur averti y voit une approximation par défaut et une autre par excès, de l'aire calculée. Les élèves ont mis longtemps à s'en apercevoir : ces notions ne leur étaient pas du tout familières à ce stade. Pourtant leur intérêt est considérable car elles permettent d'estimer *la précision des approximations.* La notion même d'approximation pose, on l'a vu, de nombreux problèmes aux élèves : le calcul d'une précision les ennuie profondément. On mesure le chemin qu'il leur faudra parcourir, en grande partie à contrecœur.

Devant leurs réticences à entrer dans cette problématique, il a fallu préciser le texte et demander explicitement des encadrements des intégrales dans le cas d'une fonction monotone, ainsi que le calcul de l'amplitude de cet encadrement : l'écriture détaillée des deux sommes était indispensable pour obtenir (ô surprise) un résultat simple : $|R2-R1| = \frac{b-a}{n}\,|f(b)-f(a)|$ (22). Il a fallu une partie de la seconde séance pour y arriver. Le scénario proposé a paru enfin compris : pour de grandes valeurs de n, R2 et R1 encadrent finement l'intégrale (leur différence tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$). Le cas d'une fonction non monotone a été évoqué : le découpage de $[a,b]$ en sous intervalles où la fonction est monotone a été proposé. A la question : “Est-ce toujours possible ?”, une large majorité a répondu par l'affirmative. Seuls quelques-uns se sont souvenus des “monstres (23)” rencontrés en cours d'année. Tous sont convenus que, dans ce cas, R1 et R2 étaient probablement des approximations de l'intégrale (le dessin le laissait présager), sans qu'on puisse décider si on l'approche par excès ou par défaut.

b) Comment interpréter les résultats affichés par Derive ?

Le passage sur machine devait se passer sans heurts. Derive accepte les écritures mathématiques habituelles, en particulier les sommes comme R1 et R2. Les paramètres ne lui font pas peur ! A part des erreurs de frappe dans les expressions confiées à Derive, ou des options du logiciel mal initialisées, les élèves ont obtenu rapidement l'affichage mathématique de leurs formules par le logiciel. Les simplifications et le calcul de leurs limites dans le cas où $f(x) = x^2$ ont été si rapides qu'ils ont produit un évident malaise : quel crédit pouvait-on accorder à ces résultats ? D'où sortaient-ils ? Que signifiaient les limites obtenues si facilement ? Les élèves ont du mal à faire le lien entre les démarches théoriques et le travail sur machine. Ils ne savent pas bien situer dans le cadre théorique les résultats calculés par un logiciel.

D'autant que, sans préavis, *le passage sur machine avait introduit un changement de cadre.* L'activité avait lentement pris du sens avec l'analyse des figures : il s'agissait de calculer des valeurs approchées de l'aire limitée par (Ox) la courbe de f et deux parallèles à (Oy). De son côté, le logiciel affichait des sommes, les transformait et calculait leur limite. *Les cadres algébrique et numérique occultaient le sens péniblement dégagé à l'étape précédente !*

Pour que les idées se remettent en place, il a fallu passer au tableau avec les différents groupes et faire reprendre la démarche générale dans le cas particulier. *Derive avait simplement déchargé les élèves d'une étape technique et calculatoire longue et délicate, pour qu'ils ne perdent pas le fil d'une démarche déjà très complexe.* Quand cela fut compris, le travail sous Derive a retrouvé sa pleine efficacité.

c) Un logiciel en échec !

Derive a traité avec succès et efficacité le cas des fonctions des questions 2 et 3. R1 et R2 ont été calculées et simplifiées (même avec des paramètres a et b non instanciés). Les limites ont été immédiates. Plusieurs élèves ont remarqué qu'ils auraient été

(22) Cette relation peut s'établir directement sur la figure 3, en additionnant les aires des rectangles dont la courbe est une “diagonale”. En les empilant verticalement, le résultat devient évident.

(23) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ sur $]0,1]$, par exemple.

capables de calculer eux-mêmes les limites des questions 2 et 3 (limites de fonctions rationnelles).

Changement de décor avec la question 4 ! Derive n'a pas simplifié les expressions de R1 et R2. Il a donc été incapable de calculer leur limite. Profond malaise dans la classe ! Que faire ? La question les a laissés un long moment sans voix. Certains ont essayé sans succès différentes manipulations : Derive est resté obstinément muet !

L'idée *que l'élève puisse réussir là où Derive échoue* fut longue à venir. Les élèves ont toujours beaucoup de difficulté à passer de la démarche théorique au travail sur machine, ou inversement. Ces changements sont vécus comme des ruptures et les déstabilisent. *Ils ont beaucoup de peine à renouer le fil de la pensée en passant d'un mode à l'autre.* Tout cela demande beaucoup plus de temps qu'un exposé de l'enseignant !

La démarche théorique comportait un sérieux obstacle. $R1(1,3,n) - R2(1,3,n) = \frac{16}{9n}$. La limite de la différence est nulle. Les élèves en avaient conclu que les deux suites avaient une limite commune. Un contre-exemple est venu briser leurs certitudes. L'existence d'un réel A (l'aire cherchée) compris entre R1 et R2 a permis de reprendre le raisonnement avec succès :

$R2 < A < R1$, donc $0 < R1 - A < R1 - R2 = \frac{16}{9n}$

et $0 < A - R2 < R1 - R2 = \frac{16}{9n}$.

Donc R1 et R2 ont une limite commune A. On a pu alors encadrer A à 10^{-3} près :
$R2(1,3,1778) < A < R1(1,3,1778)$

Le nombre important de termes à calculer (1778) a conduit à s'interroger sur la précision du calcul. Les élèves n'avaient pas conscience de l'erreur commise par le logiciel sur chaque terme. Si l'erreur en question est de 10^{-6}, elle pourra (par cumul) être de l'ordre de $1.8*10^{-3}$ sur la somme. Le moment était venu de leur faire remarquer qu'il y a un équilibre à trouver entre le gain de précision par augmentation de n et la perte de précision par cumul d'erreurs sur ces n termes ! Des expériences numériques sous Derive confirmèrent cette analyse : on ne gagne pas indéfiniment (en précision) en augmentant le nombre de subdivisions de $[a,b]$ si on n'est pas capable d'augmenter simultanément la précision des calculs (24).

d) Les deux définitions sont-elles compatibles ?

La dernière partie de l'activité a été particulièrement importante. Les élèves avaient vu en cours une notion d'intégrale définie à partir de primitives (le lien théorique entre aire et primitive avait été établi (25)). Dans la présente activité, l'aire (donc l'intégrale) était définie comme limite d'une somme d'approximations. Il était capital de montrer que les deux approches étaient équivalentes. Cette nécessité était apparue aux élèves tout au long de leur travail : au fur et à mesure de leur progression, ils avaient confirmé leurs résultats en recalculant les aires données

(24) Remarque d'Henri Lombardi : "Une mesure physique comporte rarement plus de 5 chiffres significatifs et très exceptionnellement 20, mais jamais 100 (pour le moment en tous cas) : cela montre bien l'irréalité du fantasme mathématique des nombres réels exacts."

(25) En Terminale, l'aire est une notion première. Les primitives permettent de calculer certaines aires simples. Dans l'enseignement supérieur, l'aire est définie au moyen de l'intégrale de Riemann.

par Derive au moyen d'une primitive. C'est ce qu'exprime Derive en donnant comme valeur de I(0,m) celle de la primitive de f nulle en 0. Le lien ainsi établi permettra aux élèves d'entrer sans dommage (il faut l'espérer) dans la définition de l'intégrale de Riemann proposée à l'Université.

e) Eclairages complémentaires.

Afin de dissiper le mystère des résultats affichés par Derive, il a été demandé aux élèves, en fin de parcours, de faire "à la main" les calculs dans le cas où $f(x) = x^2$. Dans R1 et R2 apparaissait une somme déjà rencontrée, celle des carrés des n premiers entiers. Sa simplification avait été faite (en cours) par récurrence. La limite de R1 et R2 était alors facile à calculer. La "boîte noire" que constitue Derive était ainsi démystifiée.

Il a paru utile de reprendre l'activité précédente en travaux pratiques afin de lui donner un autre éclairage. Si sur $[a,b]$ la valeur absolue de f' est majorée par M, on montre (en utilisant l'inégalité des accroissements finis) que la valeur absolue de la différence entre A et R1 est majorée par $\frac{M(b-a)^2}{n}$. Cette majoration est valable que f soit monotone ou non. Il est intéressant de la comparer avec celles qu'on obtient avec la méthode des points médians et des trapèzes, dont le dénominateur est n^2(le coefficient M est différent dans les 3 méthodes). Cela conduit à une importante réflexion sur la performance comparée de différentes méthodes d'approximations. L'application à la fonction définie sur [0,1] par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est saisissante. La précision du centième est obtenue (suivant la méthode choisie) pour $n = 3$ (points médians), $n = 5$ (trapèzes) ou... $n = 100$ (rectangles) ! Le gain de précision en passant de la méthode des rectangles à celle des points médians (ou des trapèzes) a quelque chose de magique. On n'insiste jamais assez sur la magie des mathématiques.

f) La "lenteur" est payante

La lecture des comptes-rendus a dissipé le sentiment un peu pénible ressenti à plusieurs reprises au cours de l'activité. *Une rédaction particulièrement précise et détaillée a révélé une claire compréhension des notions étudiées.* Les schémas avaient été adaptés aux différents cas : fonctions croissantes, décroissantes ou non monotones. Les longues hésitations, les tergiversations et les malaises perceptibles au long des séances avaient disparu, remplacés par des textes limpides. *Dix heures avaient été nécessaires là où deux auraient suffi (sous forme de cours) pour diffuser la même information.* Mais il est clair que l'assimilation par les élèves n'aurait pas été de même qualité. Ils ont découvert et surmonté *par eux-mêmes* des difficultés importantes. Cette forme de travail les prépare à celui qui les attend dans la vie économique : dans une entreprise, il ne s'agit pas d'apprendre des contenus déjà mis en forme. Il faut résoudre des problèmes, *dont personne ne connaît la solution* (26), au moyen d'outils dispersés dans différentes sources. Il faut savoir les repérer, les utiliser à bon escient et de façon complé-

(26) Au cours d'un récent congrès de didactique des mathématiques, à Thunder Bay en Ontario (Canada), Raffaella Borasi remarquait que "dans la vie professionnelle, on est rarement (pratiquement jamais) face à des problèmes bien définis, auxquels on pourrait appliquer des méthodes mathématiques clairement répertoriées pour les résoudre. La plupart du temps, la tâche à réaliser se présente de façon vague et informelle, comme situation-problème".

mentaire. Cela s'apprend et c'est une compétence capitale. Le lycée, qui vise surtout la réussite au baccalauréat (27) épargne ce pénible apprentissage aux élèves (l'université semble emboîter le pas). Faut-il s'étonner que les jeunes diplômés aient tant de peine à s'adapter au travail en entreprise ? **L'expérience si souvent réclamée pour une embauche en entreprise ne fait-elle pas référence à cette autre façon de travailler que l'école ne prépare pas ?**

4. L'ÉQUATION DE VAN DER POL : LA BOUCLE EST BOUCLÉE

Au mois de Mars, M. Lacaze, le collègue de physique de la classe, me communiquait un document qu'il avait remis aux élèves. Il s'agissait de leur faire analyser le comportement *d'un modèle d'oscillateur non linéaire* (28) et de faire tracer à l'ordinateur les courbes intégrales de l'équation de Van Der Pol :

$$x''(t) - \varepsilon(1 - x^2(t))x'(t) + x(t) = 0$$

(ε est une constante réelle).

Voici la manière dont le texte (extrait de l'ouvrage de Physique de Terminale S, Nathan, pages 289 et 290) proposait de résoudre le problème : elle est très instructive sur les différences d'approches entre les enseignants des deux disciplines. Elle donne à la notion d'approximation un éclairage intéressant.

Voici le texte remis aux élèves.

Résolution approchée de l'équation de Van Der Pol sous sa forme réduite :

$$x''(t) - \varepsilon(1 - x^2(t))x'(t) + x(t) = 0$$

Il est possible d'obtenir une solution x(t) approchée en utilisant la méthode d'Euler décrite ci-dessous :

– On pose $x'(t) = v(t)$.

L'équation devient alors : $v'(t) = x''(t) = \varepsilon(1 - x^2(t))v(t) - x(t)$ (E)

Le temps est initialisé au moment où $x = 0$; puis son évolution se fera par intervalles δt assez petits, de telle manière que :

$t_1 = \delta t$; $t_2 = t_1 + \delta t = 2\delta t$; $t_{n+1} = t_n + \delta t = (n+1)\delta t$.

– La dérivée $x'(t)$ peut s'écrire de façon approchée :

$$x'(t) = \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} = v(t) \text{ soit } x(t+\delta t) = v(t) \times \delta t + x(t). \quad (1)$$

(27) Pour obtenir les statistiques que l'on connaît, il faut évaluer des connaissances et des méthodes strictement répertoriées, éliminer celles qui posent un problème, remplacer autant que faire se peut la réflexion par l'application d'algorithmes souvent répétés et mémorisés. La durée n'y tient aucune place. Cela donne, au baccalauréat, les excellents résultats que l'on sait, mais éloigne l'enseignement d'une véritable formation qui pourrait servir hors du cadre scolaire.

(28) La fonction $x(t)$ peut représenter aussi bien une abscisse, une charge électrique, l'intensité d'un courant suivant le type d'oscillateur étudié. Le modèle proposé aux élèves était un circuit rLC entretenu par un montage à charge négative (voir l'ouvrage cité, page 260).

– $v'(t)$ peut s'écrire de façon approchée :

$$v'(t) = \frac{v(t+\delta t) - v(t)}{\delta t} = x''(t)$$

ou encore, en tirant $x''(t)$ de (1) : $v(t + \delta t) = [\varepsilon(1 - x^2(t))v(t) - x(t)]\delta t + v(t)$ (2)

–Si l'instant t auquel les relations (1) et (2) sont écrites correspond au $n^{ième}$ intervalle δt, on aura :

$x(t) = x_n$; $v(t) = v_n$; $x(t+\delta t) = x_{n+1}$; $v(t+\delta t) = v_{n+1}$

et les relations (1) et (2) pourront s'écrire plus généralement :

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= v_n \delta t + x_n \\ v_{n+1} &= [\varepsilon(1 - x_n^2)v_n - x_n]\delta t + v_n \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Avec un nombre n d'intervalles très grand (environ 5000), on peut obtenir par cette méthode itérative des courbes montrant $x = f(t)$, tracées point par point. La solution est d'autant meilleure que δt est plus petit. Ce travail est confié à l'ordinateur au moyen d'un organigramme qui itère les deux relations précédentes, à partir de l'initialisation de x, de v et de δt (l'organigramme était fourni aux élèves).

Comment les élèves avaient-ils abordé ce texte ? Ils ne s'étaient intéressés qu'à la partie algorithmique de la démarche, afin de pouvoir tracer rapidement sur leur calculatrice la courbe annoncée ! Ils avaient complètement fait l'impasse sur la démarche (29) justifiant le programme qu'ils cherchaient à écrire. Il est vrai qu'elle n'est pas simple.

En reprenant avec eux le déroulement du texte, il a été possible de retrouver quelques repères. La confusion insistante entre dérivée et taux d'accroissement a été soulignée et expliquée : **le physicien confond systématiquement la valeur exacte et une bonne approximation de ses expressions**. Ce fut l'occasion d'un utile retour sur les débuts de la notion de dérivée et sur le caractère **négligeable** du terme $h\alpha(h)$ de sa seconde définition. Le physicien le traduit en lui donnant la valeur 0 !

Les relations (3) permettent de calculer une valeur approchée de $x(t)$ et $v(t)$ à l'instant $(n + 1)\delta t$ en fonction d'une valeur approchée de $x(t)$ et $v(t)$ à l'instant $n\delta t$. Elles permettent de *passer d'une position approchée du point M de la courbe, à l'instant $n\delta t$, à une position approchée du point de la courbe à l'instant $(n + 1)\delta t$.* Cela nécessite la connaissance d'une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente en M à l'instant $n\delta t$ et permet le calcul d'une valeur approchée de cette quantité à l'instant suivant. Ce processus très complexe, itéré 5000 fois (à partir d'un point initial et d'une tangente en ce point) donne finalement un tracé confirmé par

(29) Cet exemple illustre la tendance des élèves à "faire" plutôt qu'à comprendre. Sont-ils seuls responsables de cette tendance ? Comprendre nécessite du temps, beaucoup de temps. Il est difficile d'approfondir quand les programmes sont très chargés et qu'une notion chasse l'autre, à peine entrevue.

l'expérimentation ! Il faut que les erreurs soient **vraiment négligeables** pour qu'une telle itération d'approximations ne donne pas une courbe sans rapport avec la réalité expérimentale.

Cette situation, issue des sciences physiques, montre aux élèves que les subtils outils mis au point (avec douleur) en mathématiques permettent d'appréhender le réel dans de bonnes conditions. La qualité des approximations effectuées explique très largement les excellents résultats obtenus. Elle résulte directement des délicates réflexions sur la seconde définition de la dérivée, en Première, et du sens très précis donné à l'adjectif "négligeable" dans ce contexte.

Les étranges usages des outils mathématiques en Physique ont pu être analysés (donc dédramatisés) lors de l'étude de ce très intéressant document.

CONCLUSION

Les différentes activités décrites et analysées ne laissent aucun doute : le passage de la valeur explicite à la valeur exacte par approximations, est une difficulté redoutable pour une majorité d'élèves du lycée. On a vu leurs tentatives d'évitement, leurs surprises, leur incompréhension devant la rupture de pensée qui leur était proposée, puis imposée. On a vu naître, chez certains, l'émerveillement devant la puissance et l'élégance des nouveaux outils qui avaient d'abord été pris en compte avec réticence.

La difficulté serait moindre en Première si elle était mieux préparée en Seconde et déjà même au Collège. Le statut de la calculatrice devrait être précisé le plus tôt possible, pour qu'ils soient conscient *que les résultats affichés par la calculatrice sont, en général, des approximations.* Il conviendrait de réfléchir, de façon plus générale, aux nombres disponibles sur calculatrice, de les comparer à ceux des mathématiques et d'esquisser les conséquences (considérables) de ces différences (30).

La résolution précoce d'équations et d'inéquations (avec les calculatrices graphiques et leur zoom) permettrait de préparer les esprits à la rupture à venir. *Confiner les élèves à résoudre équations et inéquations par les seules méthodes algébriques, n'est pas leur rendre service.* Il est vrai que les résultats de ces exercices, de nature algorithmique, sont faciles à évaluer...

Mais même si tout cela est fait, le détour par une démarche d'approximation pour atteindre l'exactitude reste un passage redoutable pour une majorité d'élèves. Pour qu'il le franchissent, **les excellentes explications de l'enseignant sont indispensables, mais totalement insuffisantes.** La seule méthode qui vaille consiste à les confronter longuement et de façon répétée avec l'obstacle épistémologique. Et de les accompagner. On ne peut faire le travail pour eux. Il s'agit d'abord d'un travail de deuil : renoncer à d'anciennes méthodes éprouvées n'a rien de réjouissant ! La nouveauté et la complexité des méthodes les effraient d'abord. Les fruits de ce bouleversement sont longs à se manifester : l'élève reste longtemps malhabile dans la mise en œuvre des nouveaux outils. Il ne parvient pas facilement à se convaincre que l'approximation est un chemin vers l'exactitude. Il ne faut pas s'étonner du malaise et parfois du découragement ressenti par des

(30) Voir "L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a" dans *Repères-Irem* n° 11, en particulier pages 20 à 22.

élèves de bonne volonté devant le mur qu'on leur demande d'escalader.

D'autant que s'ajoutent aux difficultés de cet obstacle épistémologique celles qui sont liées à la notion de limite. Lorsqu'elles s'additionnent, il ne faut pas s'étonner des dégâts ! Il est bien sûr possible de les masquer quelque peu en traitant, tout au long de l'année (et au baccalauréat), un seul et même problème (31).

L'analyse au lycée présente d'importantes difficultés, révélées par les réactions des élèves. Bien sûr, **Il ne faut ni renoncer, ni édulcorer** : au travers des difficultés rencontrées, **à cause d'elles**, les élèves construisent une rationalité solide et profonde. Ce qu'ils y trouvent, savoir, démarches et attitudes, sont transférables, dans une large mesure (32), vers de nombreux domaines de la vie économique et sociale. Cependant, pour que cet enseignement atteigne sa cible, il faudrait laisser aux élèves **le temps de comprendre,** il faudrait renoncer à une illusoire exhaustivité et se concentrer sur l'essentiel. Faute d'une ouverture suffisante du système éducatif sur le monde économique et social (33), cette indispensable évolution tarde à se produire...

(31) Il est amusant de voir la structure quasi rituelle du problème donné, année après année, au baccalauréat S. L'étude d'une fonction est généralement accompagnée d'un calcul intégral (par parties) et suivie de la figure imposée par excellence : la résolution approchée d'une équation par la méthode du point fixe. Ce seraient des démarches excellentes, si elles n'étaient lourdement répétitives. Un élève peut, à force de traiter ce type de problème tout au long de l'année, finir par s'en sortir convenablement, surtout s'il dispose d'une TI-92... A-t-il pour autant compris les mathématiques qu'il met en œuvre ? Sait-on conduire un véhicule si on se débrouille convenablement sur un circuit ? (Voir "Conjectures sur l'utilité d'une formation mathématique dans la vie économique et sociale" dans *Repères-Irem* n° 18).

(32) "Conjectures sur l'utilité d'une formation mathématique pour la vie économique et sociale", pages 21 à 27. Gérard Kuntz, *Repères-Irem* n° 18.

(33) Contrairement aux discours, le système éducatif continue de fonctionner en vase clos, pour ce qui est de l'essentiel. Ce qu'on y apprend est déterminé par un impératif qui eclipse largement les autres : la réussite aux examens et aux concours. La durée n'y tient guère de place. Les activités transversales sont laissées à la marge (PEA ou équivalents). Le savoir dispensé est volatil, car fondé sur la mémoire plus que sur la réflexion. C'est le prix de la "réussite" exigée par l'institution, les familles et la société toute entière ! (voir aussi les notes 27 et 31).

BIBLIOGRAPHIE

1) *Le Nouvel Esprit Scientifique* : Gaston Bachelard, PUF 1934.

2) *Histoire d'infinis*, colloque inter-Irem d'Epistémologie de Brest, 1992, Irem de Brest.

3) "Mathématiques, mythe ou réalité ?" : Marc Legrand, *Repères-Irem* n° 20 et 21. (On y trouve une intéressante présentation de la notion d'obstacle épistémologique.)

4) "Saut d'obstacle" : Gérard Kuntz. *Repères-Irem* n° 22. (Les obstacles épistémologiques liés à la notion de limite.)

5) "Conjectures sur l'utilité d'une formation mathématique pour la vie économique et sociale" : Gérard Kuntz, *Repères-Irem* n°18.