L'INTRODUCTION DES PROBABILITÉS AU LYCÉE : UN PROCESSUS DE MODÉLISATION COMPARABLE À CELUI DE LA GÉOMÉTRIE

Michel HENRY
IREM de Franche-Comté (1)

I. NOTION DE PROBABILITÉ : DE LA RÉALITÉ AU MODÈLE

1. La conception Laplacienne

La naissance du *calcul des probabilités* est datée (2). Même si l'on trouve dans *Liber de ludo aleae* – écrit par Jérôme Cardan en 1526, mais publié à Lyon seulement en 1663 – des dénombrements de cas favorables au gain, peut-être conçus comme des données probabilistes *a priori*, le véritable acte de naissance se trouve dans une lettre de Fermat à Pascal de 1654. Fermat y explicite l'idée de dénombrer les "chances" ou les "hasards" dans la poursuite "feinte" d'une partie de pile ou

(1) Cet article est issu d'un exposé au séminaire Didatech le 5 février 1997, paru dans les actes 97-98 du laboratoire Leibniz, IMAG, Université J. Fourier de Grenoble. Il est largement inspiré par les travaux de la commission inter-IREM "Statistique et Probabilités" lors de la préparation du livre *Enseigner les probabilités au lycée*, ed. IREM de Reims, 1997, dans lequel on trouvera plusieurs articles de Jean-Claude Girard et moi-même sur la modélisation et la simulation en probabilités. On y trouvera aussi une bibliographie générale des ouvrages, brochures IREM et articles sur l'épistémologie et la didactique des probabilités, reproduite dans le n° 32 de *Repères-IREM* de juillet 1998.

(2) La *notion* de probabilité est elle même bien plus ancienne : on trouve dans l'antiquité le "probabilisme" de Carnéade, successeur de Platon au sein de l'Académie au II° siècle av. J.-C., s'appliquant à la valeur des opinions. "Probable" s'apparente alors à "prouvable" et signifie un degré subjectif entre ignorance et certitude. *Cf. De la combinatoire aux probabilités* de Pierre Raymond, ed. Maspéro, col. Algorithme, 1975. Pour un aperçu sur l'histoire des probabilités, voir BRU Bernard : "Petite histoire du calcul des probabilités", article paru dans *Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure APMEP n°41, 1981.

face, pour obtenir théoriquement la réponse attendue par son correspondant *au problème des partis* (3). Pascal, dans la même démarche, évalue l'espérance de gain d'un joueur par une sorte de récurrence à l'envers à partir des issues possibles à venir de la partie. Leur approche commune du problème des partis est fondamentalement nouvelle : elle prétend pouvoir relativiser les issues d'un processus aléatoire futur et en quelque sorte quantifier le hasard. Pascal, prenant conscience de cette innovation de la pensée, a désigné cette exploration rationnelle d'un avenir incertain par l'expression de "géométrie du hasard" (4).

La combinatoire accompagna les premières avancées mathématiques en occident, introduite notamment par Raymond Lulle au XIII^e siècle. Mais le fameux triangle attribué à Pascal était connu des chinois dès ce XIII^e siècle. La combinatoire fut développée par les italiens des XV^e et XVI^e siècles, Pacioli et Cardan. Leibniz, dès la fin du XVII^e siècle, établit clairement le lien entre combinatoire et calcul des probabilités.

Les notions utiles à la combinatoire, notamment la formule du binôme, attribuée à Newton, s'appliquaient merveilleusement à ce nouveau calcul des chances. Ainsi Jacques Bernoulli put obtenir dès la fin du XVII^e siècle une démonstration de la loi des grands nombres qui établit le lien entre la probabilité d'un événement et la fréquence de ses réalisations au cours d'un grand nombre d'expériences (5). Ce résultat autorisera l'estimation de cette probabilité par la fréquence stabilisée, et posera la question du rapport entre une étude théorique de géométrie du hasard et les applications du calcul des probabilités à la réalité. Il sera approfondi par Moïvre puis par Laplace en 1812.

Comme pour la géométrie qui, à partir d'une connaissance pratique, dut être développée en une construction théorique pour consolider et étendre ses résultats, le calcul des probabilités devait s'inscrire dans une théorie dont les axiomes et définitions devaient déterminer clairement les conditions de fonctionnement comme modèle de la réalité. Les connaissances de l'époque ne permettaient pas de concevoir une autre approche théorique que celle de la géométrie du hasard.

Laplace en décrivit alors les fondements dans sa *Théorie analytique des probabilités* de 1812, repris et développés dans son *Essai philosophique sur les probabilités* de 1825 qui, jusqu'à la présentation purement mathématique de Kolmogorov en 1933, eut tant d'influence sur les conceptions en probabilités (6). Laplace écrit dans son introduction :

(3) PASCAL Blaise (1623-1662) et FERMAT Pierre (1601-1665) : *Correspondance entre Pascal et Fermat* - 1654, *in Œuvres de Pascal*, ed. J. Chevalier, La Pléiade, Paris, Gallimard 1963. On peut trouver cette correspondance de 1654 dans :*MATH n° 61 (1986)* , groupe "Mathématiques Approche par des Textes Historiques" de l'IREM de Paris VII, ainsi que dans *Enseigner les probabilités en classe de Première,* IREM de Strasbourg, 1992.

(4) Dans sa célèbre adresse à l'Académie Parisienne de Mathématiques Le Pailleur, en Latin. On trouvera une traduction précise dans MESNARD Jean : *Blaise Pascal, Œuvres complètes,* tome II, Bibliothèque européenne, ed. Desclée de Brouwer.

(5) BERNOULLI Jacques : *Ars Conjectandi,* (1713), traduction de N. Meusnier, publication de l'IREM de Rouen, 1987.

(6) On peut maintenant trouver l'essai philosophique dans la *Théorie Analytique des Probabilités*, rééditée par Gabay.

"La probabilité est relative en partie à notre ignorance, en partie à nos connaissances"...

Puis il précise : *"La théorie des hasards consiste à réduire tous les événements du même genre à un certain nombre de cas également possibles, c'est à dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer le nombre de cas favorables à l'événement dont on cherche la probabilité".*

Dans cet extrait, Laplace souligne la nécessité théorique de l'équiprobabilité des résultats possibles, en laissant à la subjectivité de l'observateur le soin d'en contrôler l'adéquation à la réalité observée. En premier principe, il donne cette définition :

"La probabilité est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles".

2. La conception fréquentiste et ses limites

La définition de Laplace s'impose logiquement dans une conception de géométrie du hasard et elle a le mérite de la simplicité. C'est pourquoi elle fut à la base de l'introduction des probabilités dans l'enseignement secondaire dans les années soixante. Mais elle a le défaut de limiter le champ du calcul des probabilités aux situations d'équiprobabilité, qui, comme le remarquait déjà Bernoulli à propos du temps ou des épidémies, ne sont pas vraiment naturelles, mises à part celles des jeux de hasard inventés en principe *"pour ménager l'équité".*

Dans son œuvre, *Ars Conjectandi* publiée en 1713, Bernoulli démontre son *"théorème d'or"* sur la convergence de la suite des fréquences d'un événement vers sa probabilité, et en dégage la possibilité *"d'un autre chemin"* pour évaluer la probabilité d'un événement qui ne se réduit pas à un système de cas *"également possibles".* Ce faisant, il pose la question du rapport entre un calcul théorique issu d'hypothèses simplificatrices et la réalité à laquelle il devrait s'appliquer. De ce point de vue, Huygens avait introduit le concept d'espérance de vie et l'avait exploité à partir de tables statistiques de mortalité (7).

Mais, malgré cette ouverture, les mathématiciens des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles ne considérèrent pas le phénomène de stabilisation des fréquences observées comme la source concrète du concept théorique de probabilité. Conservant le point de vue laplacien, ils limitaient son statut à celui de contrôle numérique des applications.

Au début du XX^{e} siècle, pour élargir les fondements du calcul des probabilités et pour l'objectiver, von Mises tenta d'axiomatiser ce phénomène de stabilisation de la fréquence des réalisations d'un événement pour déboucher sur une définition de la probabilité conçue comme fréquence limite. C'est ce qu'on peut appeler une définition fréquentiste de la probabilité.

Cette conception a été particulièrement bien présentée par le hongrois Alfred Renyi dans son manuel universitaire des années soixante (8), référence pour beaucoup de probabilistes de notre génération :

(7) On en trouvera une présentation dans le compte rendu de l'atelier de Bernard PARZYSZ aux journées APMEP de Marseille 1997, bulletin vert n° 416, pp. 394-381.

(8) RENYI Alfred : *Calcul des probabilités*, Dunod, 1966, réédité par Gabay.

"si la fréquence relative d'un événement aléatoire oscille autour d'un certain nombre, ce nombre est appelé la probabilité de l'événement considéré" (p. 26).

Il commente alors : *"Nous considérons donc la probabilité comme une valeur indépendante de l'observateur, qui indique approximativement avec quelle fréquence l'événement considéré se produira au cours d'une longue série d'épreuves"*.

Dans cette définition de Renyi, la notion de probabilité s'applique aux situations où l'on peut répéter une expérience aléatoire un assez grand nombre de fois pour pouvoir estimer les probabilités en jeu. Elle s'appuie donc sur l'observation statistique et suppose un bon développement des outils de recueil des données.

Depuis 1991, les programmes des classes de Première ont choisi cette approche (9) :

"Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois."

Mais Renyi précise : *"La "définition" de la probabilité comme valeur autour de laquelle oscille la fréquence relative n'est pas une définition mathématique mais une description du substrat concret du concept de probabilité. La loi des grands nombres de Bernoulli par contre est fondée sur la définition mathématique de la probabilité [...]"*. (p. 144).

La définition mathématique évoquée par Renyi est celle de Kolmogorov, c'est à dire une mesure abstraite définie sur un ensemble Ω qui modélise les issues possibles d'une expérience aléatoire.

Notons ici la démarche de Kolmogorov : il partage cette conception fréquentiste de la notion de probabilité, comme en témoigne l'extrait suivant (10) :

"La valeur épistémologique de la théorie des probabilités est basée sur ceci : dans leur action collective les phénomènes aléatoires, à large échelle, créent des régularités strictes et non aléatoires. Le concept même de la probabilité mathématique serait sans utilité, s'il ne trouvait sa concrétisation dans la fréquence d'arrivée d'événements, suite à des expériences nombreuses réalisées dans des conditions uniformes."

Mais il en donne une définition formelle dans le cadre de la théorie mathématique de la mesure (11) : *une probabilité est une mesure sur un ensemble Ω, application σ-additive d'une tribu de parties de Ω dans $[0, 1]$.* Cette définition correspond à celle qui est donnée aux élèves de Première, dans le cas particulier où Ω est un ensemble fini : *"la probabilité d'un événement est définie par addition de probabilités d'évé-*

(9) L'ensemble des programmes de Statistiques et de Probabilités du Second Degré a été publié dans le livre *Enseigner les Probabilités au Lycée*, de la commission inter-IREM, 1997.

(10) Cité par Jacques Bordier en introduction à sa thèse : *Un modèle didactique utilisant la simulation sur ordinateur, pour l'enseignement de la probabilité*, Thèse de doctorat, Paris VII, 1991.

(11) KOLMOGOROV Andréi (1903-1987) : *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, 1933.

nements élémentaires". On peut remarquer ce décalage entre l'introduction de la notion par référence à l'observation concrète et la définition abstraite proposée dans le cadre implicite d'un modèle mathématisé.

Mais l'approche fréquentiste semble limiter le champ des applications du calcul des probabilités en excluant les situations non reproductibles, comme celles du contrôle de fiabilité d'appareils complexes dont on ne peut répéter les pannes à l'infini (centrales nucléaires, satellites...), et dont le traitement fait appel à l'estimation *a priori* propre aux méthodes bayésiennes. Comme la conception laplacienne, la conception fréquentiste se heurte à ces limites de la reproductibilité pour les applications à la réalité. On notera un décalage paradoxal avec les conceptions modernes du hasard qui le considèrent comme la manifestation de processus complexes, à l'évolution imprévisible de par leur grande sensibilité aux conditions initiales, par essence non reproductibles à l'identique.

L'introduction fréquentiste de la notion de probabilité a par ailleurs des inconvénients didactiques majeurs, notamment celui de fonder ce concept sur l'existence d'une limite (postulée par Renyi) en un sens inhabituel (convergence en probabilité) pour des élèves qui n'ont pas encore maîtrisé la notion de limite d'une suite de réels [12].

Les extraits qui précèdent montrent bien la dualité incontournable de la notion de probabilité : rapport des "chances" que l'on peut attribuer à une issue *parmi d'autres semblables*, ou valeur théorique limite d'une mesure physique que la fréquence observée donne approximativement ? On conçoit dès lors la difficulté didactique de son introduction et la nécessité d'une résolution dialectique de cette contradiction. Celle-ci passe par la clarification du processus de modélisation.

3. La question épistémologique : réalité et modèle

Le calcul des probabilités occupe au sein des mathématiques une position comparable à celle de la géométrie. Issu de la pratique sociale, notamment de la nécessité de justifier les calculs d'assurances, il a dû être théorisé : explicitation de notions premières comme celles d'expérience aléatoire ou d'événement, au même titre que celles de point, droite ou plan qui articulent les données d'Euclide revu par Hilbert ; définitions de concepts de base comme ceux de probabilité ou d'espérance mathématique, expurgés de la complexité du réel, simplifiés et idéalisés, ainsi qu'Euclide le fait pour les notions de base en géométrie, comme celle de parallélisme par exemple ; énoncés d'axiomes fondateurs comme l'axiome des probabilités totales, à l'instar du cinquième postulat déclarant l'existence et l'unicité d'une droite parallèle à une droite donnée, passant par un point donné.

De même que la géométrie, la théorie des probabilités jouit d'un statut de modèle abstrait qu'il convient de bien prendre en compte si l'on veut confronter ses développements théoriques à la pratique et en tirer convenablement parti. Il convient alors de bien contrôler les conditions de ses

(12) Ces remarques ont été développées dans mon article : "L'enseignement du calcul des probabilités dans le Second Degré", dans *Repères-IREM* n° 14, janvier 1994.

applications, de mesurer le degré d'adéquation du modèle à la réalité.

Cependant, le calcul des probabilités n'est pas une construction purement théorique, il est bâti sur une perception de la réalité notamment par le biais du phénomène de stabilisation des fréquences, de même que la géométrie élémentaire n'est pas pure invention car elle reflète la perception humaine du monde macroscopique. Ce lien originel géniteur est particulièrement mis en évidence par Hélène Ventsel, dans son manuel *Théorie des probabilités* paru en français aux éditions Mir de Moscou en 1973 :

"Le lien existant entre la fréquence d'un événement et sa probabilité est très profond. [...] *En effet, lorsqu'on estime la probabilité d'un événement, on se base forcément sur la fréquence des événements analogues dans la pratique.* [...] *Et si la pratique montre que, au fur et à mesure de l'augmentation du nombre d'expériences, la fréquence de l'événement a tendance à se stabiliser, s'approchant rigoureusement d'un nombre constant, il est naturel d'admettre que ce nombre est la probabilité de cet événement"* (p. 24).

Puis Hélène Ventsel tient un raisonnement généralisateur : partant de ce fondement fréquentiste de la probabilité, contrôlable dans des situations particulières, elle l'élargit en une hypothèse de modèle susceptible d'atteindre les expériences aléatoires les plus générales. Sur ce raisonnement peut s'appuyer la démarche didactique :

"Il est clair que l'on peut vérifier cette hypothèse seulement pour des événements dont les probabilités sont susceptibles d'être calculées directement, c'est à dire pour les événements se réduisant à un système de cas, car ce n'est qu'alors qu'il existe une méthode permettant de calculer la probabilité mathématique. De nombreuses expériences réalisées depuis la naissance du calcul des probabilités confirment effectivement cette hypothèse. Il est tout naturel d'admettre que pour les événements ne se réduisant pas à un système de cas, ***la même loi reste vraie*** *et que le nombre constant vers lequel tend la fréquence d'un événement, lorsque le nombre d'expériences augmente, n'est rien d'autre que la probabilité de l'événement. On peut alors prendre la fréquence d'un événement, calculée pour un nombre suffisamment grand d'expériences, pour la valeur approchée de la probabilité. C'est ce qu'on fait en pratique, en déterminant à partir de l'expérience les probabilités des événements ne se réduisant pas à un système de cas"* (p. 25).

Ainsi, Hélène Ventsel donne à la probabilité le statut d'un objet mathématique, nombre calculable sous certaines hypothèses, et dont on peut avoir une valeur approchée par l'observation expérimentale dans des conditions que l'on estime suffisamment bien représentées par le modèle probabiliste, validé pratiquement par des siècles de bons résultats. Cette appréhension en termes de modèle permet la synthèse entre les conceptions laplacienne et fréquentiste, elle devrait, à mon sens, être l'objectif principal de l'enseignement des probabilités au lycée et fournir la clé de sa didactique.

II. CHOIX DES PROGRAMMES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

1. Évolution de la transposition didactique

La dualité de la notion de probabilité pose donc une redoutable question de transposition didactique : par où commencer ? Le *"calcul des probabilités"* a été introduit dans l'enseignement secondaire dans les années soixante (13). En France, au pays de Pascal, Fermat, Descartes et Laplace, la démarche théorique semble préférée à l'étude expérimentale, du moins dans l'enseignement. Dans les exercices d'applications du cours de probabilités, l'habileté combinatoire a été longtemps préférée à l'analyse statistique. Héritier des manuels et traités de Bertrand, Poincaré et Borel, l'enseignement secondaire a donc longtemps privilégié la géométrie du hasard dans le cadre d'une chronogénèse standard : combinatoire, définition de Laplace et les formules qui en découlent, résolution de problèmes simples de dénombrements, loi des grands nombres, applications statistiques. Le lien entre fréquences et probabilité dans une expérience répétée apparaît au mieux comme un théorème un peu miraculeux, expliquant un phénomène naturel par une sorte de nécessité mathématique.

La vague des "mathématiques modernes" des années 70 a privilégié la présentation axiomatique des *"espaces probabilisés"*, mais le point de vue restait le même : on se limitait aux ensembles référentiels Ω finis et, dans les problèmes, la probabilité-mesure y était uniformément distribuée, ramenant encore les calculs effectifs des probabilités à des applications de la combinatoire.

Pendant les années 80, les programmes abandonnèrent l'étude explicite de la structure d'espace probabilisé pour elle-même, tout en conservant le point de vue laplacien pour limiter les *"calculs de probabilités"*, dans des *"situations où le hasard intervient"*, aux techniques de dénombrements. Il apparut de plus en plus évident que la majorité des élèves étaient en échec, considérant les calculs de probabilités comme des jeux de l'esprit faisant appel à des techniques qu'ils ne maîtrisaient pas, complètement déconnectés des réalités.

Le tournant pris en 1991 fut donc radical, puisque, comme nous l'avons vu, le programme de toutes les classes de Première demande d'introduire la *"notion de probabilité"* par l'étude de la stabilisation relative de la fréquence d'un événement lors de la répétition d'une même expérience aléatoire. Puis le modèle mathématique est axiomatiquement introduit, où la probabilité jouit des propriétés d'une mesure, laissant ouvert le champ des applications.

Encore maintenant, les enseignants ont beaucoup de difficulté à intégrer cette approche fréquentiste de la notion de probabilité dans les situations didactiques qu'ils proposent à leurs élèves et s'en tiennent à la définition formelle, suffisante pour exploiter la plupart des activités traditionnelles. En effet, celles-ci sont très généralement marquées par la géométrie du hasard, qui a été le cadre de la

(13) PARZYSZ Bernard : "Les probabilités et la statistique dans le secondaire d'hier à aujourd'hui", *in Enseigner les Probabilités au Lycée*, Commission inter-IREM "Stat et Probas", Octobre 1997.

formation de ces enseignants et qui reste l'essentiel des exercices proposés par les manuels. Un collègue m'a déclaré récemment : *"sans les calculs de combinatoire, je ne vois pas ce qu'on peut enseigner en probabilités"*. Ainsi, cette démarche procédant de l'expérimental : *observation du réel – notion de probabilité – modèle mathématique*, pose en classe de Première des questions didactiques délicates. Dans bien des classes où l'étude de la stabilisation de la fréquence est effectivement menée, celle-ci relève plus des sciences naturelles que de la construction d'un modèle mathématique et le lien avec le cours qui suit est souvent inexistant.

2. L'approche fréquentiste en Première et l'initiation à la modélisation

En n'optant pas clairement pour donner à la probabilité un statut de concept abstrait intégré dans un modèle descriptif des situations aléatoires, son introduction comme notion naturelle en classe de Première la laisse concevoir comme une sorte de limite de fréquences stabilisées. Elle tend ainsi à confondre la réalité observable et le modèle mathématique inscrit dans le "Monde des Idées". On ne sait plus comment les calculs doivent être justifiés : en référence à la situation concrète, éventuellement simulée, ou par application déductive de règles axiomatiques ? Au-delà de l'ambiguïté épistémologique déjà soulignée sur l'existence supposée d'une telle limite et sur sa nature, cela pose des problèmes de contrat didactique. On est confronté en probabilités à une rupture de contrat analogue à celle que l'on rencontre en géométrie en collège, quand il s'agit de comparer deux longueurs par exemple : peut-on comparer leurs mesures effectuées sur un dessin ou doit-on faire un raisonnement déductif à partir d'hypothèses géométriques portées par la figure ?

Cette analogie mérite réflexion. Il me semble que sur le plan de l'épistémologie génétique, le parallèle est profond : dans les deux domaines, partant d'une appréhension expérimentale du monde environnant, l'apprentissage élabore des concepts abstraits s'organisant au sein d'une théorie, qui à terme doit prendre un statut de modèle général permettant le développement de l'activité mathématique.

Le programme de 1991 semble s'arrêter au milieu du gué. Tourné vers l'expérimental, préparé par les enseignements de statistiques en Collège et en Seconde, il n'affiche cependant pas clairement l'objectif d'amener les élèves à adopter une position théorique face à un problème de probabilités. Notamment, l'introduction de lois génériques simples (Bernoulli, binomiale et géométrique par exemple) permettant une lecture théorique de situations aléatoires, est exclue aujourd'hui de l'enseignement secondaire. C'est un peu comme si en géométrie, l'étude du parallélisme ne débouchait pas sur l'étude des propriétés des quadrilatères particuliers.

Ce défaut avait été reconnu dès 1993, au moment où il fallait adapter la présentation du programme à l'esprit des nouvelles séries du cycle terminal. Le projet de la série L avait été particulièrement explicite :

"Il s'agit, comme dans les autres programmes, d'aborder la notion de probabilité à partir de la fréquence, mais on a choisi dans cette série d'affiner l'explication du processus de modélisation. L'objet de cette partie de la formation est donc de faire découvrir, en s'appuyant sur l'expérimentation

numérique, quelques notions qualitatives et quantitatives liées à la modélisation mathématique des phénomènes aléatoires.

Trop éloigné de la rédaction précédente, ce projet est resté en l'état. Il montre le chemin qu'il convient de faire pour que l'enseignement des probabilités au lycée rejoigne de manière cohérente le reste des mathématiques, alors que tous les sujets de bac contiennent un exercice de probabilités, souvent entaché de l'ambiguïté, pour ne pas dire de la confusion modèle-réalité.

III. CONSÉQUENCES DIDACTIQUES DU CHOIX FRÉQUENTISTE

1. Le choix d'une démarche expérimentale

Jusqu'en 1991, l'enseignement des probabilités était donc conçu comme une application de la combinatoire. Au-delà de l'emploi d'un vocabulaire spécifique, la résolution des problèmes passait invariablement par une même stratégie : dégager les articulations logiques caractérisant les événements en jeu, afin de pouvoir dénombrer le plus astucieusement possible les issues les constituant. Pour cela, partant de situations déjà simplifiées, les problèmes étaient la plupart du temps habillés par des objets standards, empruntés aux jeux de hasard. Leurs rapports avec la réalité étaient clairement fictifs et leurs applications en classe se limitaient à l'analyse des loteries et autres divertissements. Dans ce contexte, la probabilité ne recevait qu'une seule signification, celle d'un rapport de chances, et sa définition pouvait être posée *a priori*.

Le programme de 1991 fait découler la notion de probabilité de l'observation des fréquences. Il place donc son enseignement sur le terrain expérimental et de ce fait en renverse la didactique : les élèves devraient retrouver en probabilités les mêmes étapes qu'en géométrie dans un long processus d'apprentissage marqué par la rupture de contrat entre opérations sur la réalité et fonctionnement théorique. Les objets jouissent alors d'un double statut sous un vocabulaire commun : objet de la réalité, imparfait mais cependant suffisamment reconnaissable pour être rangé dans la catégorie conceptuelle désignée par le même mot. Par exemple, un carré suffisamment bien dessiné sera appelé "carré", au même titre que la figure idéale déterminée par quatre côtés égaux et quatre angles droits. L'aire de ce carré désignera aussi bien la grandeur physique dont la mesure est entachée de l'approximation due à l'imperfection du dessin et à la précision des instruments, que la grandeur mathématique exactement mesurée par la formule connue. De même, un dé dont on se sert pour jouer est peut-être un peu pipé, mais les fréquences observées de ses faces dans un grand nombre de lancers sont assez voisines de 1/6 pour qu'on puisse attribuer cette valeur approximative à leur probabilité. Ce dé donne son nom au dé du probabiliste, parfait de symétries et dont les faces sont rigoureusement équiprobables par hypothèse, avec par conséquent une probabilité théorique exacte de 1/6. En géométrie comme en probabilités, la distinction entre ces deux statuts, et les démarches de preuves qui leur correspondent, est un des principaux objectifs de l'apprentissage.

2. Questions didactiques

Ce processus d'apprentissage est ancien en géométrie, et bien maîtrisé. Dès l'école primaire, les enfants sont habitués à reconnaître et comparer des formes, à les reproduire en s'exerçant à l'usage des instruments de dessin. Dégageant des invariants lus sur ces dessins, ils conçoivent des propriétés qui seront les préludes à la conceptualisation et à la perception des objets géométriques par leurs propriétés caractéristiques. Au collège, ils pourront alors s'engager dans le chemin du raisonnement déductif et aller vers sa transcription sous forme de démonstration.

En probabilités, la situation est très différente, du moins en France. Avant la classe de Première, les élèves n'ont eu aucun contact éducatif avec les situations probabilistes. Le long temps de maturation nécessaire à l'exploration méthodique de la réalité vécue, de sa description à l'aide du vocabulaire adéquat, de sa représentation et de sa reproduction permettant l'action, est absent de l'école élémentaire et du collège. Pour le sujet apprenant, la conceptualisation ne peut se fonder sur un rapport personnel au monde de l'aléatoire, sinon sur une perception naïve, entachée de croyances irrationnelles, source des conceptions erronées maintes fois décrites dans la littérature psychologique.

Ainsi, le concept de base présenté par le programme, celui d'expérience aléatoire, ne fait pas l'objet d'une exploration concrète préalable et, brûlant les étapes, son introduction théorique en Première conduit à des confusions remarquables et rédhibitoires : pour beaucoup d'élèves, avoir une bonne note au bac est l'issue d'une expérience aléatoire, puisqu'on ne peut savoir d'avance comment elle va tourner !

On comprend dès lors la difficulté didactique de cet enseignement : il est censé s'appuyer sur des situations que les élèves n'ont que très peu fréquentées. Le programme prévient les enseignants : il faut étaler les séances de probabilités sur toute l'année, de manière à introduire un peu de progressivité entre l'exploration de situations aléatoires et leur mathématisation. Cette recommandation semble incomprise, et les six heures dévolues à cette partie du programme rejetées dans bien des classes en fin d'année.

D'autres questions didactiques, peut-être moins fondamentales, sont aussi ouvertes à propos de cette introduction fréquentiste des probabilités. Comment faire passer cette idée de fréquence stabilisée, observable dans les expérimentations, comme induisant naturellement la notion de probabilité, sans faire intervenir celle de limite ? De plus, cette introduction tardive des probabilités en direction d'élèves de 17 ans se heurte à des conceptions déjà là, élaborées empiriquement, interprétant la probabilité comme un rapport de "chances".

Enfin, du point de vue de l'organisation de notre enseignement, le cours de probabilités est le premier véritable contact des élèves avec les concepts ensemblistes, particulièrement bien adaptés, voire incontournables. On cumule ainsi les difficultés d'assimilation d'un vocabulaire et d'organisation de la pensée logique nécessaires à la manipulation des événements, avec la nouveauté des concepts probabilistes. Le déficit en temps de l'enseignement pour "boucler" un programme chargé, conduit les enseignants peu préparés à faire l'impasse sur la démarche de modélisation. La confusion qui en découle renforce les obstacles épistémologiques évoqués et pervertit le contrat didactique.

3. Activités de modélisation

D'un point de vue didactique, les remarques qui précèdent montrent qu'en probabilités, peut-être plus que dans d'autres domaines, les situations de modélisation sont essentielles. Il reste à leur trouver une place dans les progressions [14]. Mais il convient aussi de mener les études et recherches didactiques permettant de valider leur pertinence dans l'apprentissage des probabilités et de construire des ingénieries. Ce champ de recherches est largement ouvert.

Ce domaine de modélisation doit s'appuyer sur l'appréhension des situations aléatoires, la capacité de les décrire, la construction du concept d'expérience aléatoire et de ceux d'événement et de probabilité. C'est pourquoi il semble nécessaire que ces différentes familiarités s'installent assez tôt, dès le début du collège au moins. Elles pourraient valablement accompagner l'initiation à la présentation, l'organisation et la gestion des données, lorsque celles-ci sont le fruit d'un recueil aléatoire, comme l'échantillonnage d'une population par exemple. Il y a là aussi tout un champ de recherches didactiques au niveau des pré-adolescents.

En liant plus clairement les probabilités aux situations réelles, on est amené à poser la question de la modélisation en termes de processus, moins naïvement qu'on le fait généralement en classe de mathématiques, quand on réduit la modélisation à la traduction de situations déjà abstraites et simplifiées sous forme d'équations, éventuellement décrites par le vocabulaire du quotidien dont les élèves ne sont pas dupes.

Avant de revenir au parallèle entre les apprentissages de la géométrie et des probabilités, il n'est pas inutile de préciser ce que l'on entend ici par modèle et par modélisation.

IV. MODÉLISATION

1. Notion de modèle [15]

Le terme de "modèle" est utilisé dans des sens assez variés, voire contraires.

Dans une première acception, c'est ce que l'on reproduit par imitation (définition Larousse).

Par exemple, le modèle du peintre (ou le "top-modèle" du photographe de mode) est l'objet (ou le sujet) réel que l'artiste se propose de représenter. Ce modèle porte en lui des qualités communes à d'autres objets (ou sujets) mais les mets particulièrement bien en évidence, du point de vue de cet artiste qui se doit de choisir un "bon modèle" pour l'inspirer dans la réalisation de son œuvre.

(14) L'article de Jean-Claude Girard dans ce numéro de *Repères-IREM* : "Le professeur de mathématiques doit-il enseigner la modélisation ?" entre parfaitement dans cette problématique. Il montre bien que le parallèle que j'esquisse entre enseignements de la géométrie et des probabilités tient au fond à l'apprentissage de la modélisation, et se retrouve dans les autres domaines de l'enseignement des mathématiques.

(15) Les notions de modèle et d'expérience aléatoire ont fait l'objet d'un chapitre du livre cité : *Enseigner les Probabilités au Lycée* et d'un développement dans la brochure de la Commission inter-IREM : *Modélisation en probabilités*, disponible à l'IREM de Franche-Comté.

Dans le même registre, on parlera d'un élève "modèle" en disant de lui qu'il donne un bon exemple aux autres élèves, à suivre si possible, car il a un comportement typique par rapport aux meilleures attentes que l'on peut avoir.

D'un autre point de vue, notamment en mathématiques, on appelle modèle d'une théorie formelle un exemple "concret" dont les propriétés décontextualisées réalisent celles de la théorie. Ainsi, l'ensemble des fonctions numériques définies sur un intervalle est un modèle pour la structure d'algèbre (espace vectoriel + anneau) de dimension infinie non dénombrable. La théorie formalise les propriétés de structure de cet ensemble.

Nous adopterons un point de vue contraire, en nous inspirant de la définition donnée par Alain Pavé [16] : *"un modèle est une représentation symbolique de certains aspects d'un objet ou d'un phénomène du monde réel, c'est à dire une expression ou une formule écrite suivant les règles du système symbolique d'où est issue cette représentation."*

Dans l'enseignement, la notion de modèle a émergé au cours des années 60, lorsqu'est apparue la nécessité de mieux préciser la distinction entre l'objet du monde réel que l'on étudie et son interprétation théorique représentée par sa "mathématisation". On ne retient pour cette étude de phénomènes réels que certains des aspects caractéristiques de la réalité, qui semblent être pertinents et que l'on simplifie en une abstraction de cette réalité. Dans une conception platonicienne, l'objet idéal et abstrait, *"qu'on ne voit que par la pensée"*, est un modèle figé de cette réalité complexe, changeante, insaisissable dans sa diversité.

Mais nous ferons une distinction entre une simple description ou une représentation de la réalité et un modèle qui, dans sa structure, contient une part de connaissances théoriques permettant d'évaluer, interpréter et généraliser cette réalité. Cette remarque nous conduit à la définition suivante, qui distingue le modèle en tant que structure abstraite de la symbolique utilisée pour le décrire :

> *Un modèle est une représentation abstraite, simplifiée et idéalisée, issue d'une description d'une situation du monde réel, permettant une interprétation de la réalité ainsi observée* [17].

Un modèle peut être présenté dans différents systèmes de signes : images, schémas, langages ou symbolismes, s'inscrivant dans différents registres de représentations, plus ou moins isomorphes.

On peut présenter un modèle par une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité. Cela veut dire que, dans un vocabulaire courant, les objets du modèle sont doués de propriétés caractéristiques idéales, bien définies. Nous parlerons alors de modèles "pseudo-concrets".

C'est le cas par exemple des modèles d'urnes en probabilités : à partir d'un modèle physique de boules (indiscernables

(16) Alain PAVÉ : *Modélisation en Biologie et en Écologie*, Ed. Aléas. 1994.

(17) Dans sa conférence plénière *Enseigner la Géométrie : permanences et révolutions*, présentée au congrès ICME 7 à Quebec (*cf.* Actes pp. 47-75), Colette LABORDE adopte le même point de vue : "Un modèle offre une certaine lecture, une certaine interprétation d'un domaine de réalité".

au toucher...), on donne le modèle probabiliste, où l'hypothèse de base (souvent implicite) est l'équiprobabilité de ces boules dans un tirage "au hasard".

C'est aussi le cas des solides géométriques de base en architecture : on considère par exemple qu'un édifice (dans la cour du Louvre) est suffisamment régulier pour être assimilé à une pyramide (modèle pseudo-concret), objet géométrique référent dont on donnera diverses représentations spatio-graphiques signifiantes, renvoyant à une figure abstraite idéale.

Par contre, parmi les différents registres de représentations, le langage et le symbolisme mathématiques permettent des descriptions puissantes sur lesquelles peuvent opérer des propriétés et des algorithmes généraux. L'explicitation d'un modèle pseudo-concret en un *modèle mathématique* relève de l'opération dite de *mathématisation.*

Souvent, ces modèles nous sont tellement familiers que nous n'en voyons pas d'autres, et nous avons tendance à confondre ces représentations avec les objets idéaux en jeu, lesquels sont souvent confondus avec la réalité qu'ils modélisent.

Pour illustrer ces propos, prenons deux exemples, l'un en probabilités, l'autre en géométrie. Le premier est dû à Jean-Claude Girard [18] :

"En probabilité, si on modélise un phénomène de files d'attente à des caisses de supermarché, on choisira une loi (de Poisson) pour les arrivées des clients et une autre loi pour la durée des services (exponentielle). On pourra alors, par le calcul ou par simulation, choisir la configuration de caisses qui optimisera le passage des clients. Si les résultats ne donnent pas satisfaction, c'est que le modèle n'est pas bien adapté : par exemple les paramètres des lois n'ont pas été estimés correctement ou même ces lois ne sont pas les meilleures pour représenter la situation".

Pour la géométrie, reprenons l'exemple pyramidal précédent : des relevés de mesures sur le terrain permettront d'expliciter les équations représentatives des lignes de base accessibles à la mesure et, en faisant intervenir les propriétés géométriques de la pyramide idéale, éventuellement décrite par un modèle mathématique ad hoc (par exemple en géométrie analytique), ou soigneusement représentée graphiquement (en descriptive...), d'en tirer l'ensemble des dimensions utiles à l'architecte.

2. Description du réel et modélisation

Dans un processus de modélisation, nous distinguons donc deux étapes [19], Chacune de ces étapes relève pour les élèves de compétences différentes et donc de contrats didactiques différents.

Pour préciser cela, caricaturons un peu la pratique courante : le professeur présente une situation dans des termes naïfs du langage courant. Cette présentation se réduit souvent à l'"habillage" d'un

(18) Avec de nombreux autres dans son article : "Modélisation, simulation et expérience aléatoire", du livre *Enseigner les probabilités au lycée*, p. 73.

(19) Rejoignant en cela entièrement le point de vue de Jean-Claude Duperret et Jean-Claude Fénice exprimé dans leur article : "L'accès au littéral et à l'algébrique : un enjeu au collège", publié dans le n° 34 de *Repères-IREM.*

problème mathématique qu'il désire proposer aux élèves. Ainsi la description d'une réalité complexe disparaît pour laisser la place à la proposition d'un modèle déjà là, *exprimé dans les termes pseudo-concrets d'une expérience mentale.* Le professeur attend ensuite des élèves qu'ils traduisent ce modèle en termes mathématiques, il les aide au besoin pour interpréter la question posée en un problème interne que, contractuellement, les élèves doivent résoudre. Ils doivent enfin produire, si possible, un petit commentaire replaçant leurs résultats dans les termes pseudo-concrets du modèle. Il revient au professeur de donner les prolongements possibles et de porter sur la situation réelle les appréciations qui peuvent se dégager.

Si l'on veut introduire en mathématiques une véritable démarche expérimentale, il convient de ne pas négliger la *première étape* de la modélisation au niveau de la situation concrète : *l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants.*

L'observation, au delà de la simple perception sensible, suppose en effet une intention et un regard chargé de cette intention. Ce regard fait appel à des connaissances, pratiques ou théoriques, qui reconnaissent dans certains faits observés des phénomènes leur donnant du sens. Ces connaissances organisent le réel et déjà l'interprètent en une réalité.

La description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié. Cette description peut être pilotée par ce que l'on peut appeler un *"regard théorique"*, c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux préconstruits, pour apprécier justement ce qui se révélera pertinent.

Par exemple, reconnaître une situation binomiale dans l'observation répétée d'une épreuve présentant aléatoirement deux issues possibles, suppose de s'interroger sur la probabilité du nombre d'occurrences de l'une d'elles et d'avoir dans sa panoplie culturelle le modèle probabiliste binomial. La description peut alors se limiter à l'introduction de la probabilité de cette issue.

De même, voire dans la manipulation d'un pentographe l'expression des propriétés du parallélogramme suppose de s'interroger sur la relation entre le dessin obtenu à partir du modèle reproduit, et d'avoir certaines connaissances sur l'homothétie. La description de cette situation de dessin peut alors se limiter à l'étude des positions relatives du centre recevant la pointe du pentographe, d'un point du dessin donné et de son image.

La démarche expérimentale consiste aussi à pouvoir agir sur le réel, afin d'en étudier les évolutions et les invariants. Il faut donc pouvoir mettre en œuvre une expérimentation programmée par un *protocole expérimental,* c'est-à-dire l'ensemble des instructions à suivre pour réaliser cette expérience et éventuellement la reproduire.

De nouvelles compétences sont alors attendues, qui peuvent être objet de formation : savoir décrire une situation réelle en une réalité porteuse d'un problème, savoir mettre en œuvre un protocole expérimental et recueillir les effets obtenus, savoir organiser les données obtenues. Puis il s'agit de traduire cette description en un système simplifié et structuré : c'est le niveau du *modèle probabiliste*, donné en termes pseudo-concrets, ou de la *figure géométrique*, donnée par des hypothèses interprétant les objets idéalisés de la réalité. Cela se traduit par l'appel à des modèles généraux dont les conditions de transfert doivent être maîtrisées.

Dans l'exemple des files d'attente aux caisses d'un super-marché, il faut dégager les hypothèses pertinentes pour décrire les arrivées des clients, notamment le nombre moyen d'arrivées par unité de temps. Cette construction est guidée par un premier niveau de connaissances théoriques du phénomène étudié (processus de Poisson) et par les outils mathématiques disponibles, déjà maîtrisés (équations différentielles). Elle conduit à poser des hypothèses de modèle (indépendance des arrivées...).

Dans l'exemple de la pyramide du Louvre, il faut identifier les contraintes mécaniques exercées par les efforts imposés par la structure sur les éléments de verre qui couvrent les faces afin qu'ils ne cèdent pas. Cela suppose des connaissances en mécanique et en résistance des matériaux qui commanderont la précision du modèle géométrique utilisé.

On peut alors passer à la *deuxième étape* : la *"mathématisation"* ou *"formalisation"* du modèle. Cela suppose que les élèves soient capables de représenter le modèle dans la symbolique propre aux mathématiques. Avec l'exemple probabiliste précédent, il faut mettre l'évolution de la probabilité sous forme d'une équation différentielle. Puis interpréter la question posée en un problème purement mathématique (résolution de cette équation différentielle) et savoir faire appel aux outils mathématiques adaptés pour résoudre le problème abstrait (fonction exponentielle, intégration, raisonnement par récurrence...). Dans l'exemple géométrique, il faut pouvoir décrire les tenseurs des efforts et des contraintes, puis résoudre les systèmes linéaires obtenus.

Pour valider le fonctionnement du modèle ainsi construit, il convient de pouvoir revenir à la question posée pour traduire dans les termes du modèle pseudo-concret les résultats mathématiques obtenus, leur donner du sens pour dégager des réponses et *relativiser ces réponses* par rapport aux hypothèses de modèle (adéquation de la loi de Poisson pour représenter le nombre d'arrivées des clients dans un intervalle de temps donné, pertinence de la pyramide comme modèle géométrique englobant l'ossature métallique innervant les faces et soutenant les éléments vitrés).

Il faut ensuite interpréter ces réponses pour apprécier leur validité et leur étendue dans la situation concrète. Ces compétences peuvent faire l'objet de formations dans diverses disciplines. Elles prennent un aspect spécifique en mathématiques du fait du caractère particulièrement abstrait des outils que l'on désire mettre en œuvre.

Dans une modélisation, il y a toujours deux passages délicats qui relèvent d'une connaissance spécialisée des phénomènes étudiés :

– *l'identification,* c'est à dire le choix entre plusieurs modèles possibles et la détermination expérimentale des paramètres qui interviennent alors comme hypothèses de modèle,
– *la validation,* c'est à dire l'évaluation du degré d'approximation des résultats théoriques obtenus avec les valeurs

expérimentales correspondantes et la décision que le modèle est bien (ou pas) adapté à la situation étudiée.

Ces compétences vont au delà de ce qu'il est possible d'attendre d'un élève de collège ou lycée, ce qui limite les ambitions d'un enseignement de la modélisation à ces niveaux à des situations particulièrement simples, faisant appel aux modèles les plus élémentaires éventuellement suggérés par le contrat didactique.

V. UN PARALLÈLE AVEC L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Reprenons maintenant quelques étapes d'un apprentissage théorique fondé sur une perception expérimentale, pour montrer à partir de deux exemples simples ce qui rapproche l'enseignement de la géométrie de celui des probabilités.

1. Les fondations

Il s'agit d'abord de renforcer chez les élèves la perception du monde réel en les plaçant en situation d'expérimentation : spécification des objectifs expérimentaux, actions sur les objets en jeu et réactions du milieu, mise en œuvre d'un programme expérimental, description des phénomènes observables et affinement du vocabulaire, recueil des résultats...

En géométrie :

Perception de l'environnement géométrique, pratique du dessin géométrique, actions de constructions, expérimentations papier – crayon et ordinateur, et repérages d'invariants.

Ex : *Observation d'une rosace placée au dessus du porche d'une cathédrale en vue de sa reproduction. Repérage des arcs de cercles et hypothèses sur les emplacements de leurs centres. Égalités et différences entre les rayons des arcs de cercles.*

En probabilités :

Familiarité avec l'aléatoire, expériences réelles et perception du hasard, actions sur les jeux de hasard, expérimentations, simulations et relevés statistiques, repérages de stabilités.

Ex : *Enquête auprès des élèves de l'établissement par sondage sur les préférences entre deux propositions A et B. Chaque élève de la classe interroge 10 camarades. Effets du prélèvement au hasard des personnes interrogées. Observation des variations du nombre des réponses favorables à A par groupes de 10 réponses. Stabilisation de la fréquence des réponses A quand on regroupe les échantillons sondés.*

2. La modélisation (première étape)

Comme nous l'avons vu, elle consiste en une première abstraction de la réalité par l'idéalisation de ses objets. Description simplifiée et début d'interprétation des observables, cette première étape s'appuie déjà sur une connaissance de type théorique limitée.

Statuts des objets observés et résumés géométriques de leurs propriétés essentielles, entre réalité et représentations schématiques : des consignes de construction aux hypothèses introductives. Ex : *Production de dessins géométriques se rapprochant de la rosace observée. Représentation des ogives en des lignes sans épaisseur. Donnée d'un programme de construction du dessin choisi pour représenter la rosace. Justification du programme par des arguments géométriques reprenant les hypothèses issues de l'observation.*	Générateurs de hasard et protocoles expérimentaux, expériences pseudo-concrètes, modèles d'urnes, résumés..., simulations informatiques, consignes expérimentales et hypothèses probabilistes. Ex : *Quand on lance plusieurs fois une punaise sur une table, la fréquence de celles qui restent posées sur la tête est voisine d'une valeur fixe quand le nombre de lancers devient grand. Les punaises successivement lancées sont identiques, la manière de les lancer n'intervient pas. Estimation d'une probabilité de tomber sur "tête", modèle d'urne de Bernoulli.*

3. Le regard théorique

Il s'agit de comprendre les phénomènes observés en faisant appel à des connaissances acquises et systématisées lors de situations analogues déjà rencontrées de manière à fonder leur description et leur interprétation sur des arguments idoines, et de faire appel à des outils de représentation cohérents, adaptés à la réalité observée.

Du dessin à la figure signifiée, regard sur la figure éclairé par un savoir théorique (*"l'œil tourné vers l'intérieur" dit Platon*), définitions, axiomes, hypothèses géométriques, des invariants aux théorèmes. Ex : *Propriétés de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle. Construction des centres des arcs de la rosace, propriétés géométriques de la figure abstraite. Théorème sur la somme des angles de l'hexagone, régulier ou non. Liens avec le cinquième postulat.*	De l'expérience pseudo-concrète et de son modèle d'urne à l'expérience abstraite. Regard probabiliste sur l'expérience (*"objets que l'on ne voit que par la pensée"*), définition de la probabilité mathématique, axiomes, hypothèses probabilistes, des invariants aux lois. Ex : *Expérience aléatoire générique, modèle binomial pour représenter le sondage des élèves. Étude du schéma binomial, sa description par un arbre probabiliste, hypothèse d'indépendance et axiome des probabilités composées, calcul des probabilités binomiales à partir de l'arbre.*

4. La formalisation (deuxième étape de la modélisation) et la réponse au problème posé

Dans cette étape, les élèves doivent construire la représentation mathématique de la situation, s'appuyant sur le modèle élaboré, utilisant les objets et symboles mathématiques appropriés, rappelant les données, hypothèses et théorèmes acquis. La question et la réponse sont alors formulées en termes mathématiques, puis la réponse est interprétée dans le cadre de la réalité étudiée.

Construction théorique : définitions formelles éclairées par les objets réels, axiomes et demandes, constructions et configurations de base, variables et objets géométriques abstraits, transformations, symbolique. Méthodes de résolution de problèmes et démonstrations. Énoncés de résultats théoriques et leur interprétation dans la réalité. Ex : *Utilisation d'une symétrie centrale et d'une rotation. Centre de symétrie et de rotation dans la configuration étudiée et conclusion : il suffit de construire un élément de base de la rosace, l'ensemble est obtenu par rotations et symétrie. Reproduction de cette construction sur ordinateur, et confrontation du résultat avec la rosace observée.*	Espace probabilisé, définitions et axiomes éclairés par les propriétés des fréquences, modèles théoriques de base (lois), objets probabilistes (variables aléatoires...), symbolique. Méthodes de résolution de problèmes, calculs et identification de lois. application à l'expérience réelle. Ex : *Définition de l'ensemble Ω des configurations possibles des 10 punaises, loi de Bernoulli pour une punaise, calcul a priori des probabilités binomiales à partir de la formule des probabilités totales. Généralisation et énoncé de la loi binomiale. Simulation du sondage avec un ordinateur, ajustement du paramètre de Bernoulli et confrontation avec les réponses de l'échantillon interrogé par l'ensemble de la classe.*

5. Des grands problèmes issus de la réalité

La complexité des situations réelles fait que la plupart des questions que l'on peut se poser pour les comprendre ne peuvent recevoir d'éclairage que si elles sont formulées d'abord dans un cadre théorique. Que celui-ci soit bien adapté, cela relève de l'appréciation du spécialiste et des performances que l'outil théorique manifeste. Les exemples un peu simplistes précédents ont leurs prolongements à long terme et sont de ce point de vue essentiellement éducatifs. Par exemple,

Les transformations. D'une configuration à une autre, étude des invariants, transferts de propriétés : exemple des théorèmes de Pascal et de Brianchon et de leur signification en géométrie projective. La transformation conforme et le dessin de profils aérodynamiques...	La statistique inférentielle. Échantillonnage d'une population, résumés statistiques et inférences. Exemple du théorème de Bernoulli, loi faible des grands nombres. Comportement limite des probabilités binomiales, la loi des erreurs et le théorème limite central. Applications aux sondages, au contrôle de qualité etc.

VI. PERSPECTIVES DIDACTIQUES

1. Ambitions pour l'enseignement des probabilités

L'enseignement universitaire des probabilités se limite à l'exposé d'une théorie formelle, le plus souvent considérée comme application de la théorie de la mesure. Mais les espaces probabilisés ne rendent pas la notion de probabilité directement opératoire en pratique. Alors que les modèles probabilistes sont donnés comme illustrations de résultats mathématiques, sans références aux véritables situations réelles dans lesquelles ils fonctionnent, on attend du probabiliste professionnel qu'il soit apte à proposer un "bon modèle", suite à une interprétation pertinente de la réalité qu'on lui soumet. On voit le décalage entre une formation académique et la pratique professionnelle.

Si l'enseignement du second degré avait pour seule ambition de préparer à cet enseignement universitaire, il pourrait se contenter de la définition de Laplace qui introduit un objet simplifié et donne la procédure pour le calculer. Ce fut d'ailleurs le cas pendant trente ans, avec, il faut le reconnaître, plus ou moins de succès.

Mais aujourd'hui, il devient essentiel que les élèves comprennent quel usage il pourront faire du savoir scolaire qu'ils ont tant de mal à situer dans une perspective personnelle. Ainsi, l'option fréquentiste ne s'explique pas seulement par la recherche de la plus grande généralité du concept de probabilité, elle est aussi cohérente avec l'objectif d'enseigner les mathématiques en vue de donner aux futurs citoyens les capacités de résoudre de vrais problèmes ou de comprendre le fonctionnement des données scientifiques intervenant dans les choix auxquels ils auront à participer. L'enjeu didactique est donc que les élèves puissent donner du sens aux concepts en jeu, les ayant construits à partir de leur propre activité expérimentale.

Nous avons vu que l'approche fréquentiste est ambitieuse. Mais le regard porté sur l'Histoire montre que la dualité du concept de probabilité est un véritable obstacle épistémologique, incontournable en regard de ces objectifs. La réponse didactique est celle de la démarche expérimentale, à laquelle les élèves ne sont pas habitués. Elle suppose une certaine familiarité des élèves avec le hasard et ses lois. De plus, les outils de description et de représentation, langage et logique ensemblistes, schémas et symbolique, sont trop tardivement mis en place. Leur introduction plus précoce n'est pas insurmontable comme le montrent certaines expériences étrangères, et comme le laisse penser l'évolution comparable de l'enseignement de la géométrie.

Mais la plus grande ambition est, me semble-t-il, celle de la formation des enseignants à ces choix épistémologiques et didactiques : travail à partir de situations réelles et complexes, double visage de la probabilité, statut mathématique à lui conférer au sein d'un modèle théorique. Ainsi, la formation initiale et continue des enseignants est le déterminant essentiel de la réussite de cette ambition.

2. La modélisation comme objet d'apprentissage et la recherche

D'un point de vue des travaux didactiques, l'enjeu est de faire de la modélisation en probabilités un objectif d'enseignement et d'apprentissage fondé sur la pratique des élèves. De cet objectif, découlent de nombreuses questions qui sont autant de pistes de recherches.

Y a-t-il contradiction entre la complexité du réel et sa modélisation pour la résolution de problèmes concrets ?

Quels milieux sont-ils favorables ? Quelles variables didactiques sont-elles déterminantes ? Quels choix de transposition ?

Certains choix ne vont pas de soi.

Par exemple, en géométrie, quels sont les premiers outils de preuve, dans quels modèles de géométrie élémentaire : cas "d'égalité" des triangles ou transformations ?

En probabilités, quels seront les premiers exercices proposés aux élèves : dénombrement des cas favorables et possibles ou interprétation de situations pseudo-concrètes par des lois de base ?

Y a-t-il des obstacles didactiques engendrés par l'abus de l'interprétation par des modèles d'urnes ?

Quel est le rôle didactique de la simulation ?

Quel est la place de la preuve expérimentale et des performances informatiques ?

Quel travail sur la symbolique ?

Quels outils pédagogiques (ordinateur...) et didactiques : y a-t-il des situations fondamentales ?

Quelle familiarité avec l'aléatoire en collège ? Peut-on aller à ce niveau jusqu'à une première perception de la notion de probabilité ?

Les chercheurs en didactique des probabilités sont très peu nombreux en France. Peut-on espérer que ces questions motivent suffisamment de jeunes doctorants pour développer un secteur de recherches encore à l'état embryonnaire ?