REPERES - IREM . N° 36 - juillet 1999

SIMULATION ET MODÉLISATION D'UN PROBLÈME DE BOUTEILLES

François HUGUET
IUFM de Quimper

Situation :

– Un fabricant de bouteilles en verre dispose de 100 kg de verre liquide.

– Avec 1 kg de verre liquide, on peut fabriquer une bouteille.

– Dans les 100 kg de verre liquide, il y a 100 pierres ou impuretés que l'on ne peut enlever et qui sont réparties de manière aléatoire.

– Le fabricant ne s'intéresse qu'à la fabrication de bouteilles de *"haute qualité"* c'est-à-dire sans impureté.

– Si une bouteille contient au moins une pierre, alors elle est mise au rebut !

– Combien peut-il espérer obtenir de bouteilles de "haute qualité" ?

Une expérimentation d'Engel avec de jeunes élèves en Angleterre

Dans les pays anglo-saxons des expériences mettant en jeu des phénomènes aléatoires sont abordées dès le niveau de l'école primaire, contrairement à ce qui se passe en France.

Jeux de dés, tirage de boules dans des urnes pour prévoir leurs compositions... etc.Wheeler, Fletcher, Engel sont des noms familiers aux professeurs de ma génération et chez nous Maurice Glaymann ou Marcel Dumont seraient en mesure beaucoup mieux que moi de vous relater les expériences d'Engel avec de jeunes enfants.

J'ai donc simplement cherché à reprendre à mon compte les idées d'Engel, non pas avec de jeunes enfants mais avec mes étudiants en formation, ceci à plusieurs reprises et avec sensiblement les mêmes résultats.

Les méthodes de simulation avec mes étudiants

Pour le problème aux données numériques volontairement simplifiées qui nous intéresse, il s'agit de concevoir des expériences permettant de simuler cette situation et donc de faire une étude physique du "hasard".

Engel suggère l'idée du "calcul analogique" consistant à représenter un phénomène par d'autres phénomènes physiques analogues.

L'observation d'une certaine convergence des résultats obtenus permet alors de faire des prévisions et de comprendre qu'il existe peut-être un "modèle" permettant d'interpréter ces phénomènes.

Les premières réactions de mes étudiants sont souvent du type : "Ce n'est pas un vrai problème de mathématiques car il y a de nombreuses réponses possibles !".

Afin de les aider à mieux s'approprier cette situation problème et dépasser le stade de réponses du type : "Il peut obtenir un nombre compris entre 0 et 99 bouteilles de haute qualité", je leur demande d'abord de se mettre dans la peau du chef d'entreprise qui cherche à faire des prévisions fiables par simple souci économique.

Je leur demande ensuite de réfléchir à une représentation concrète de cette situation.

Généralement certains étudiants suggèrent de représenter des bouteilles, voir un ensemble de bouteilles disposées en vrac avec une pluie de petits cailloux.

Je les incite à proposer une représentation un peu mieux ordonnée et facile à exploiter et nous aboutissons progressivement à une schématisation sous la forme, par exemple, d'un tableau cartésien de 10 cases sur 10 cases, chacune des cases représentant la place d'une bouteille. Il nous reste bien sûr à trouver un moyen de répartir de manière aléatoires les 100 impuretés sur ces 100 cases.

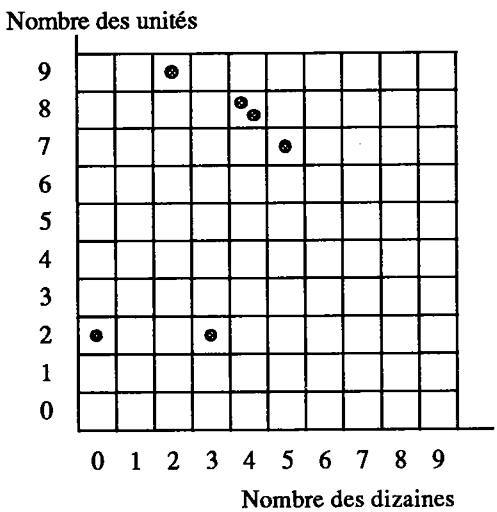
J'ai repris ensuite l'idée d'Engel qui propose à ses élèves d'utiliser ce qu'il appelle "une table de nombres au hasard".

Dans le problème qui nous intéresse, il s'agit de trouver 100 nombres choisis "au hasard" et compris entre 0 et 100 (exclus).

Comment trouver ces nombres "au hasard" ?

Il existe des tables toutes faites, mais comme nous allons le voir, il paraît intéressant de les réaliser par soi-même, à partir d'expériences variées.

La représentation cartésienne sous forme de quadrillage va bien sûr faciliter l'interprétation des résultats.



Si dans la table de nombres au hasard on a par exemple : 02, 57, 48, 32, 48, 29... alors 32 signifie qu'il y a une pierre (ou impureté) dans la case (3,2).

Dans la case (4,8), il y a 2 pierres... etc.

Quand les 100 pierres sont placées dans cette grille, il suffit de dénombrer les cases vides pour conclure.

Recherche des 100 nombres "au hasard" compris entre 0 et 100 exclus

A la suite de propositions faites par les étudiants et quelques unes de mes suggestions, voici quelques pistes qui ont été expérimentées et exploitées.

1) Observer les numéros des plaques minéralogiques de 100 voitures situées dans notre environnement.
Evidemment, si une voiture porte le numéro 1854 QV 29, il faut retenir le nombre 54 et non les nombres 18 et 29. La justification d'un tel choix est aisée à découvrir !

2) Utiliser un annuaire téléphonique. Là encore, pour le numéro 02 98 55 29 92, nous retiendrons 92 !

3) Effectuer un tirage au sort comme pour une loterie. Pour cela, le plus simple consiste à tirer le chiffre des unités parmi 10 étiquettes numérotées de 0 à 9 et de faire de même pour le chiffre des dizaines.

4) Fabriquer et utiliser une roulette de 10 cases numérotées de 0 à 9 et faire comme précédemment.

5) Ouvrir un gros livre et noter le numéro de la page.

6) Utiliser les résultats d'une tombola ou de la loterie nationale figurant dans les journaux locaux... etc.

7) Utiliser l'outil informatique pour obtenir de manière aléatoire, à l'aide de la fonction "random", les 100 nombres compris entre 0 et 100 (exclus).

Résultats de ces expérimentations

Nous avons relevé les résultats obtenus non seulement en dénombrant le nombre des cases sans "impuretés" mais aussi le nombre des cases ayant une impureté, deux impuretés, trois impuretés...

Conformément aux résultats annoncés par Engel, nous avons obtenus des résultats convergents et autour de 36 cases vides que l'on interprète bien sûr comme 36 bouteilles de "haute qualité" c'est-à-dire sans impureté.

Cette convergence a surpris la grande majorité des étudiants !

Toutefois, avec la cinquième procédure mentionnée (ouverture d'un gros livre), nous avons obtenu un résultat beaucoup plus élevé (autour de 50). Naturellement nous avons critiqué ce procédé. Le livre a en effet tendance à s'ouvrir souvent aux mêmes pages, ce qui remet en cause l'aspect aléatoire du phénomène.

Différentes modélisations du problème

Première approche

J'ai essayé de résoudre ce problème en m'appuyant évidemment sur l'outil mathématique à ma disposition : le "calcul des probabilités".

Soit A l'ensemble des impuretés

Card A = 100

Soit B l'ensemble des bouteilles

Card B = 100

Une répartition des 100 impuretés dans les 100 bouteilles peut donc être interprétée comme une "application de A vers B".

J'ai choisi comme univers Ω l'ensemble des applications de A vers B.

J'ai de plus choisi l'hypothèse la plus simple, c'est-à-dire en supposant l'équiprobabilité des événements élémentaires conduisant à poser :

$B(\Omega) = P(\Omega)$

Ceci m'a conduit à calculer la probabilité "p" pour qu'une bouteille donnée B_i soit de "haute qualité".

Soit $B' = B - \{ B_i \}$

Notons $\mathcal{F}(A,B)$ l'ensemble des applications de A vers B.

Notons $\mathcal{F}(A,B')$ l'ensemble des applications de A vers B'.

$$\begin{aligned} p &= \text{Card } \mathcal{F}(A,B') / \text{Card } \mathcal{F}(A,B) \\ &= 99^{100} / 100^{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Log } p &= 100 \text{ Log } 99 - 100 \text{ Log } 100 \\ &= 100 \text{ Log } 0{,}99 \end{aligned}$$

$$\text{Log } p \ \# \ 100 \times \bar{1}{,}99564 \ \# \ \bar{1}{,}564$$

$$\mathbf{p \ \# \ 0{,}3665}$$

Ceci nous donne sur les 100 bouteilles entre 36 et 37 bouteilles de "haute qualité" !

Ce résultat est bien sûr satisfaisant, mais l'hypothèse d'équiprobabilité ne me semble pas si simple à admettre et faire comprendre !

Deuxième approche et observations de Régis Gras, Université et IREM de Rennes

Remarque 1 :

L'hypothèse d'équiprobabilité sur l'ensemble des applications de A vers B est peut-être moins intuitive que la suivante, tout en lui étant équivalente :

Pour une bouteille *quelconque,* la probabilité pour qu'une impureté s'y glisse est la même, *quelle que soit* cette impureté. Elle est donc égale à 1 / 100.

C'est encore la probabilité commune pour que l'on pique avec une épingle, au hasard, (les yeux fermés) un carré déterminé parmi les 100 carrés d'un quadrillage de 10 × 10.

Même sous cette présentation, c'est encore la notion d'application qui est sous-jacente.

Je formule également une hypothèse suggérée par le texte et implicitement utilisée précédemment, sur l'indépendance des affectations.

Des événements [La bouteille B_i contient l'impureté I_k] et [La bouteille B_i contient l'impureté I_l] sont indépendants pour tous i, k, l.

Par suite :

Pr [B_i ne contient ni I_1, ni I_2, ... , ni I_{100}] = Pr [B_i ne contient pas I_1] × Pr [B_i ne contient pas I_2 sachant que B_i ne contient pas I_1] × ... × Pr [B_i ne contient pas I_{100} sachant que B_i ne contient pas I_1, I_2, ., I_{99}]

= Pr [B_i ne contient pas I_1] × Pr [B_i ne contient pas I_2] × ... × Pr [B_i ne contient pas I_{100}].

$= (1 - 1/100)^{100} = 99^{100} / 100^{100}$ # **0,3665.**

Est-il étonnant que cette valeur diffère peu de e^{-1} ?

Une exploitation plus poussée de ce problème très riche, va fournir la réponse mais, d'ores et déjà, souvenons-nous que :

$$\lim_{n \to \infty} (1 - 1/n)^n = e^{-1}$$

On peut se demander quelles probabilités B_i a de contenir 1, 2, 3..., 100 impuretés !

La formulation précédente nous le donne immédiatement :

Pr [B_i contient une impureté seulement]

$$= \binom{100}{1} . 1/100 . (1 - 1/100)^{99}$$

où $\binom{100}{1}$ représente le nombre de choix de l'impureté à affecter à B_i .

De même, pour tout k ∊ {0, 1, 2 ..., 100} :

Pr [Bi contient k impuretés exactement]

$$= \binom{100}{k} . (1/100)^k . (1 - 1/100)^{100-k}.$$

Autrement dit, la variable aléatoire X_i, qui représente le nombre d'impuretés contenues dans B_i, suit une "loi binomiale" de paramètre **p = 1/100 , N = 100.**

On montre, dans la théorie des probabilités, que, puisque le produit p.N est constant (ici il est égal à 1), la "loi binomiale" de cette variable, lorsque N tend vers l'infini, converge vers la "loi de Poisson" de paramètre

$\lambda = p.N = 1$.

Ceci signifie qu'une approximation, pour N "grand" de la valeur de Pr $[X_i = k]$ est donnée par la valeur correspondante de la "loi de poisson" :

$\lambda^k e^{-\lambda} / k!$ soit ici : $e^{-1} / k!$

Par exemple, une valeur approchée de **Pr** $[X_i = 0]$ est e^{-1} et nous voici rassurés...

Remarque 2

Une vertu, outre son élégance, de la présentation d'Huguet, est de permettre une réponse immédiate à la question que le lecteur s'est sans doute déjà posée :

"Quelle est la probabilité qu'il y ait une impureté dans chaque bouteille ?" c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune bouteille de "haute qualité ?"

Cet événement est réalisé pour chaque éventualité d'une bijection de A sur B.

Il y a autant de telles bijections que de permutations sur A (ou sur B), c'est-à-dire **100!**

Par suite, la probabilité cherchée est : $100! / 100^{100}$.

Pour obtenir une valeur approchée, utilisons la formule de Stirling :

$n! \# \sqrt{2\pi}\ n^{n+1/2}\ e^{-n}$

ce qui donne

$100! / 100^{100} \# \sqrt{2\pi} \times 10 \times e^{-100} \# 9,32.\ 10^{-43}$

Intérêt de tels problèmes

Concernant la première démarche, et en reprenant les arguments de Engel, ce problème semble intéressant pour :

– Faire vivre et comprendre ce que peut être une démarche scientifique, ou du moins une partie de cette démarche sans chercher nécessairement à "mathématiser".

– Découvrir ce domaine particulier des probabilités et des statistiques dans lequel le raisonnement déductif basé sur les notions de "vrai" et de "faux" ne suffit pas !

– Sur le plan pédagogique, faire réfléchir à l'importance de la phase d'appropriation et sur l'intérêt du "calcul analogique" comme le dit Engel.

– Favoriser, chez les élèves, la compréhension de tous les phénomènes liés au sondage d'opinions, aux prévisions concernant les élections, à la notion d'échantillon représentatif, à la notion de "fourchette"...

En guise de conclusion

C'est une surprise pour beaucoup de monde de découvrir qu'il existe des lois permettant de maîtriser les phénomènes aléatoires.

D'ailleurs existe-t-il une frontière entre le monde "déterministe" et le monde "probabiliste" ?

Contrairement à beaucoup d'idées reçues, comme le disent certains mathématiciens : *"le hasard est composé de paramètres que l'on maîtrise et d'autres que l'on ne maîtrise pas !"*

Cette découverte concrète a été pour moi l'un des événements les plus marquants de ma formation en mathématiques !

C'est une expérience vécue à Nancy, il y a fort longtemps, lors d'un congrès de l'APMEP.

Nous disposions d'une petite catapulte réglable permettant de lancer une pièce de monnaie sur un petit tapis de mousse.

L'animateur de l'atelier nous demanda de régler la tension des ressorts pour obtenir à coup sûr "face".

Après quelques essais d'adaptation, nous y sommes parvenus.

Il nous demanda alors de régler la catapulte de manière à obtenir "face" une fois sur trois avec évidemment toujours la même disposition de la pièce au départ.

A ma grande surprise, nous y sommes encore parvenus !

Voici donc une bien curieuse réponse apportée à la question concernant la frontière entre le monde "déterministe" où tout est prévu, et le monde "probabiliste" où beaucoup de choses encore peuvent être prévues !

Bibliographie et références

Je dois citer en premier lieu et remercier Maurice Glaymann qui nous avait présenté cette situation en nous laissant toute latitude pour l'exploiter, lors des Journées nationales de l'APMEP de Caen en 1972.

Sa référence était le livre *Teaching of Probability* by Lennart Rade Editeurs de Alinquist et Wiskel.

Dans les collections de la CEDIC il existe plusieurs ouvrages traitant de l'enseignement des probabilités et notamment relatant certaines expérimentations avec de jeunes enfants.

Sur ce même sujet, il faudrait bien sûr ne pas oublier les travaux de Guy Brousseau de l'IREM de Bordeaux traitant de l'enseignement des probabilités au niveau élémentaire.

Enfin, il existe un ouvrage beaucoup plus récent intitulé : *Les certitudes du hasard* d'Arthur Engel (150 F) présenté au catalogue 1998 des éditions ALEAS, 15 Quai Lassagne 69 001 Lyon.