Notes de voyage

IMPRESSIONS DE RUSSIE

Nicole VOGEL
IREM de Strasbourg

Depuis quelques années, l'APMEP entretient des liens étroits avec l'Association Russe des Professeurs de Mathématiques, la PAYM (cela se prononce "RAOUM") (1). Cela a favorisé entre autres quelques échanges d'enseignants. C'est ainsi que j'ai eu le plaisir d'accueillir en France une collègue russe, Olga Boulytcheva, en mars 1995. Ce fut le début d'une grande amitié et d'un intérêt passionné de ma part pour la Russie et de mes amis russes pour la France.

J'ai passé deux semaines de vacances en août 1996 à Kalouga chez Olga et sa famille.

Au retour, j'ai accueilli son mari Vladimir en Alsace, et je l'ai accompagné à Metz, à l'Université d'été "Probabilités et Statistiques" du 27 au 31 août 1996.

Je suis retournée une deuxième fois à Kalouga, pour une semaine début Octobre, et j'y ai participé au "Congrès International sur l'Enseignement des Probabilités et des Statistiques" proposé par la PAYM du 1er au 4 Octobre 1996.

En avril 1997, l'APMEP a organisé un voyage en Russie pour les Français qui avaient reçu un collègue russe en 1995. J'ai donc fait un troisième voyage à Kalouga du 11 au 23 avril 1997, avec cette fois-ci des objectifs de visites d'établissements scolaires et universitaires.

Kalouga a 250.000 habitants. C'est une ville ancienne, très agréable, avec beaucoup de vieux bâtiments de différents tons ocre, beaucoup de parcs et de verdure, située sur

(1) L'essentiel de cet article a été rédigé fin 1997, donc avant la crise de l'été 1998, mais je pense qu'il reste d'actualité en ce qui concerne l'enseignement.

REPERES - IREM . N° 36 - juillet 1999

les rives de l'Oka, affluent de la Volga, à environ 180 km au sud-ouest de Moscou.

A chacun de mes séjours, l'accueil a été extrêmement chaleureux. J'ai maintenant de nombreux amis et connaissances en Russie. Ils m'invitent souvent à partager le thé et à goûter les nombreuses et excellentes spécialités russes accompagnées de vodka et de romances et ne me laissent pas repartir sans un cadeau de chacun d'entre eux.

J'ai vu passer en pointillés l'été, l'automne et la fin de l'hiver russe. Les saisons sont très marquées et la vie s'adapte. En été et automne, nous avons passé beaucoup de temps dans les jardins des datchas, invités par les uns et les autres à manger des "chachlyki" (sorte de brochettes). En avril, c'était encore l'hiver, alors qu'en France tout était très vert et que les arbres avaient presque tous terminé leur floraison. Je suis arrivée sous la neige. Les petits lacs étaient encore gelés et dans la forêt, il restait d'assez grandes étendues enneigées. Il n'y avait pas d'herbe verte, seulement des restes roussis. Il faisait froid dehors et très chaud dans les maisons surchauffées...

En octobre et avril, mon voyage avait des objectifs professionnels.

En octobre, j'ai surtout découvert l'histoire de l'enseignement des probabilités en Russie et les expériences actuelles dans ce domaine.

J'ai visité l'école "numéro 24" de Kalouga (les écoles ont rarement des noms, elles portent des numéros), où j'ai assisté à des cours de mathématiques et de français. C'est l'école de Macha, la fille d'Olga et Vladimir.

En avril, j'ai aussi visité l'école "numéro 710" de Moscou, avec mes collègues français. C'est l'école où enseigne Evgueni Bounimovitch, vice-président de la PAYM.

Ces écoles réunissent toutes les classes de la première (CP) à la onzième (terminale), un peu comme nos lycées jusque dans les années 60.

J'ai aussi suivi des cours de mathématiques, d'informatique et de français à l'Université Pédagogique de Kalouga où enseignent Olga et Vladimir Boulytchev.

J'ai participé à des cours de préparation aux Olympiades de mathématiques dans les locaux de l'université, et assisté à la finale nationale des Olympiades de mathématiques qui a eu lieu à Kalouga du 18 au 25 avril 1997.

Je voudrais vous faire partager quelques-unes de mes impressions sur l'enseignement des mathématiques en Russie.

Il est évident que tout cela ne prétend à aucune objectivité. Je n'ai eu ni suffisamment d'informations, ni visité assez d'écoles pour pouvoir conclure quoi que ce soit de général.

Je vais essayer de donner beaucoup d'énoncés d'exercices, car je pense que cela permet mieux de comprendre l'activité des élèves russes. J'ai fait moi-même toutes les traductions, sauf celles des deux exercices de probabilités du manuel d'E. Bounimovitch, qui sont de lui. J'ai une fois de plus vérifié avec plaisir que les mathématiques sont un langage universel et qu'il est assez facile de comprendre un énoncé en langue étrangère. J'espère cependant ne pas avoir fait trop d'erreurs de sens et ne pas avoir déformé les contenus mathématiques.

L'enseignement des mathématiques en Russie : pour tous les élèves ou pour la sélection des élites ?

En Russie, il n'y a pas d'école maternelle. On entre à l'école à 7 ans, en classe de 1^{re}, qui est donc l'équivalent de notre CP. On passe ensuite en 2^e, 3^e... et ainsi de suite jusqu'en 11^e qui correspond à notre terminale.

Les cours destinés à tous ont en général un effectif voisin de 25 élèves.

Une séquence a 45 minutes, c'est la durée d'un cours au moins jusqu'en 8^e. Dans les grandes classes, tout comme à l'université, un cours couvre souvent deux séquences.

1. Les cours de base, plutôt techniques, et pourtant...

a. Du très classique...

Les cours de mathématiques de base semblent avoir un contenu très classique : on enseigne beaucoup de techniques suivies de nombreux exercices d'application.

Par exemple, en classe de 8^e, j'ai assisté à une séance d'exercices sur des additions de fractions sous forme littérale. Le plus simple de cette liste était $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}$, mais cela devenait rapidement beaucoup plus complexe. Les élèves semblaient bien se débrouiller. Chacun travaillait seul à sa table et le professeur appelait successivement des élèves à son bureau et corrigeait les cahiers avec eux. Ils utilisaient une présentation qui semble générale dans les écoles russes :

$$\frac{a^{(a}}{bc}+\frac{b^{(b}}{ca}+\frac{c^{(c}}{ab}=\frac{a^2}{abc}+\frac{b^2}{abc}+\dots$$

Mais à aucun moment le professeur n'a fait aucun rappel ni aucun corrigé destiné à l'ensemble de la classe.

J'ai aussi assisté à deux cours sur les vecteurs en classe de 9^e.

On utilisait la définition et les propriétés du produit scalaire pour calculer plus que pour démontrer, et, pour des vecteurs repérés dans une base du plan, on apprenait à reconnaître de façon très classique s'ils étaient colinéaires ou non, orthogonaux ou non.

On emploie les *notations* $\vec{u} \uparrow \vec{v}$ pour deux vecteurs colinéaires, $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$ pour deux vecteurs colinéaires de même sens, $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v}$ pour deux vecteurs colinéaires de sens contraires, $|\vec{u}|$ pour la norme, ΔABC pour le triangle ABC et $\angle A$ pour l'angle A.

Voici à peu près la liste des exercices proposés pendant l'une de ces séances (les premiers ont été préparés à la maison, le professeur en donne rapidement un corrigé avec l'aide de quelques élèves qui vont au tableau) :

> On donne
> $\vec{a}(-1{,}0)\ \vec{b}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\ \vec{c}(\frac{2}{3},\frac{2}{3})\ \vec{d}(\frac{3}{5},\frac{4}{5})\ \vec{e}(0{,}1)\ \vec{f}(\sqrt{2},-1)$.
> Quels sont les vecteurs de norme 1 ?
> Déterminer α et β tels que $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{e}$
> On donne $\vec{n}(5,y)$; trouver y tel que $\vec{d}\uparrow\vec{n}$;
> tel que $\vec{d}\perp\vec{n}$.

Les réponses proposées pour cette

dernière question sont $y = 6\frac{2}{3}$ et $y = -3\frac{3}{4}$, et le calcul avec ce type de nombres semble aussi rapide dans cette classe qu'avec des fractions ordinaires.

> Déterminer la longueur de la médiane issue de A d'un triangle ABC, connaissant les longueurs a, b, c de ses côtés.

(Dans le cours précédent, les élèves ont vu que dans un parallélogramme ABCD, $AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$.)

Dans une classe parallèle, le même professeur propose aussi :

> Dans un repère orthonormal, on donne le triangle ABC par A(1,1) B(4,1) C(4,5). Calculer $\cos\angle A$.

Les élèves calculent $\cos\angle A = \dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$ sans faire de figure. La particularité du triangle (rectangle) n'est donc pas exploitée. Ils ne sont apparemment pas habitués à faire des figures pour conjecturer.

> ABC est équilatéral ; on donne A(0,0) B(4,0) $C(x,y)$ $x > 0$, $y > 0$; A_1, B_1 et C_1 sont les milieux des côtés.
> On cherche AA_1, BB_1, et les coordonnées de $\overrightarrow{AA1}$ et $\overrightarrow{BB1}$.

Là aussi, la figure repérée vient très tard, ce qui ne permet pas d'exploiter au mieux ses propriétés.

On commence plutôt par des généralités comme :

ΔAC_1C : $\angle A = 60°$; $\angle C_1 = 90°$; $\angle C = 30°$.

Pour tous ces exercices, les premiers qui trouvaient étaient rapidement invités à donner leur solution.

J'ai eu l'impression qu'on ne se préoccupait pas tellement de savoir si l'élève moyen avait compris ou pas.

Cette impression est renforcée par le fait qu'on n'écrit pas beaucoup, et lorsqu'on écrit, ce sont surtout des calculs et très peu d'explications ou de raisonnements.

D'ailleurs, les étudiants de l'Université Pédagogique ont été très surpris lorsque j'ai montré des copies de mes élèves français au Congrès d'octobre. Ils trouvaient que ce n'étaient pas des copies de math parce qu'il y avait plus de texte que de formules ou de calculs et ils ont demandé pourquoi ils écrivaient tout ça.

En fin de 9[e], deux ans avant la fin du lycée, les élèves passent un premier examen, où nous retrouvons ce type d'exercices de mathématiques.

Ce qui est très étonnant pour nous, c'est qu'un recueil d'énoncés est publié, que les élèves travaillent toute l'année les exercices de ce recueil et que le sujet de l'examen y est choisi.

Voici un exemple de sujet d'algèbre (il y a aussi un sujet de géométrie, mais je n'ai pas le recueil de géométrie).

Sujet "numéro 5"

> 1. Simplifier l'expression
> $$\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}\right) : \frac{2}{a-b}$$
> 2. Résoudre l'équation $x^2 - 5x - 1 = 0$
> 3. Résoudre le système d'inéquations
> $$\begin{cases} 2 + x > 0 \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$
> 4. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 - y = -2 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

5. a) Tracer le graphe de la fonction $y = 2x - 5$ (Note : c'est le texte russe qui parle de fonction)

b) Est ce que ce graphe contient le point A(–35 ; –65) ?

6. Donner la valeur de l'expression $-\frac{1}{4}xy$ pour $x = \sqrt{2}$ et $y = \sqrt{6}$

7. Trouver cos α, si $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ et $90° < \alpha < 180°$.

Tous les autres sujets sont de ce type, assez banal et répétitif, d'autant plus que l'apprentissage s'appuie sur ces modèles.

Cela paraît quand même assez efficace, puisque les élèves semblent très bons en calcul algébrique et numérique.

De plus, la calculatrice est très peu présente.

b. mais aussi beaucoup de liberté...

Cependant, il ne faudrait pas en conclure trop vite que l'enseignement russe des mathématiques, même celui qui est destiné à tous les élèves, se limite aux exemples que nous venons de voir.

La Russie est actuellement dans une période de grands changements qui a comme inconvénients le flou et la désorganisation qu'ils entraînent, mais comme avantages de larges possibilités d'innovation. Presque tout semble possible, bien que l'époque de la liberté totale commence à se transformer en une étape de restructuration et de définition de nouvelles règles.

C'est dans ce contexte que je situe les manuels dont E. Bounimovitch est coauteur et les cours auxquels nous avons assisté à l'école expérimentale de Moscou.

Dans ces manuels de l'équipe Dorofeev-Charigin, tout est nouveau : la présentation, mais aussi les programmes.

On y introduit par exemple les probabilités et la géométrie dans l'espace dès la classe de 5e (notre 6e), ce qui ne se faisait pas d'habitude.

Ainsi, on trouve par exemple dans le manuel de 6e les deux exercices de probabilité suivants :

Exercice 1
Sacha a une boîte contenant 25 boules blanches et 50 boules rouges. Macha a une boîte contenant 40 boules blanches et 80 rouges. Chacun tire une boule de sa boîte et la remet dedans, puis recommence. Les tirages sont répétés jusqu'à ce que l'un d'entre eux tire une boule blanche. Celui-ci a alors gagné. Si les deux tirent une boule blanche en même temps, la partie est nulle et ils recommencent.

1) Sacha pense que le jeu n'est pas équitable car il a moins de boules blanches que Macha. Etes-vous d'accord avec lui ? Expliquez.

2) Macha pense que le jeu n'est pas équitable car Sacha est plus fort qu'elle en probabilités. Etes-vous d'accord avec elle ? Expliquez.

3) A votre avis, le jeu est-il équitable ?

Exercice 2
Oleg a joué pendant trois mois à une loterie dont le tirage est hebdomadaire.

Il n'a jamais gagné. Il continue à jouer car il pense que la loterie est un jeu aléatoire, que parfois on gagne et parfois on perd. Et, puisqu'il n'a pas gagné pendant longtemps, il pense qu'il va bientôt gagner. Etes-vous d'accord avec lui ?

Malheureusement, je n'ai assisté à aucun cours de probabilités à ce niveau.

La classe de 5^e que nous avons visitée à Moscou utilise ces manuels.

Nous y avons assisté à un cours de géométrie dans l'espace très vivant.

Il y a 26 élèves dans la classe.

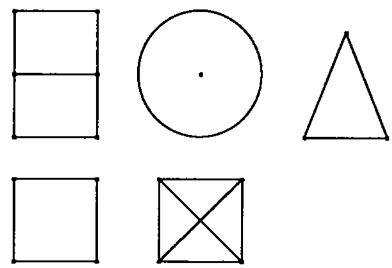
Nous sommes dans une salle réservée à l'enseignement des mathématiques, où il y a beaucoup de matériel : une télé, un rétroprojecteur, mais surtout de nombreux volumes, cubes, cônes, cylindres, pyramides, beaux objets d'une vingtaine de centimètres de hauteur, et d'autres en fil de fer.

La plus grande partie de la leçon se fait oralement. Les élèves sont très attentifs, participent beaucoup, lèvent la main, mais ne parlent que lorsqu'ils sont interrogés. Ils se lèvent d'ailleurs lorsqu'ils sont invités à prendre la parole.

Le professeur, une jeune femme dynamique et enthousiaste, demande d'abord où on peut trouver les solides usuels présentés dans notre environnement.

Puis elle montre quelques figures préparées au tableau.

Elle demande quels sont les solides qu'il est possible de voir ainsi et comment il faut les placer pour avoir cette vue. Les élèves viennent manipuler les objets pour montrer à leurs camarades.



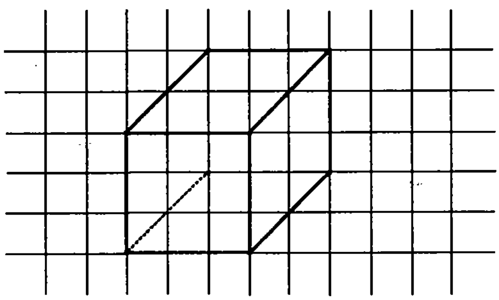
On fait ensuite des dessins de pyramides, en perspective cavalière (sans en fixer les règles), avec différentes bases, et on en compte le nombre de sommets et de faces.

Réciproquement, il faut préciser la base d'une pyramide à mille faces.

On s'intéresse ensuite à la surface latérale d'un cube de 3cm de côté, le problème étant de savoir s'il est possible de fabriquer un tel cube à partir d'une feuille rectangulaire de côtés 3cm et 16cm.

On finit la leçon en dessinant sur le cahier un cube de 3 cm de côté en perspective cavalière, et en le divisant sur le dessin en cubes de 1cm de côté. Il faut trouver combien de fois il faut couper le cube (par des plans) pour qu'il soit décomposé ainsi.

Pour cet exercice de dessin, le seul travail écrit fait pendant la séance, les élèves ont beaucoup de mal à diviser leur cube en cubes unités, surtout parce que l'élève envoyé au tableau pour représenter le grand cube a choisi le quadrillage du tableau de façon peu judicieuse :



Beaucoup d'autres copient ce cube avec le même choix de quadrillage et divisent alors les arêtes orthogonales au plan du tableau en deux et non en trois.

Le professeur ne se rend pas vraiment compte de ce problème car elle ne circule pas dans la classe, ne corrigeant l'exercice qu'au tableau.

c. Et les élèves en difficulté ?

Dans l'école expérimentale de Moscou, numéro 710, on trouve théoriquement les élèves du quartier. C'était la règle à l'époque soviétique où existait une carte scolaire.

Maintenant, les parents sont libres d'envoyer leurs enfants dans l'école de leur choix, l'école étant libre de les accepter on non. Il y a donc des concours plus ou moins difficiles pour entrer dans certaines écoles.

Certaines ne prennent que des élèves primés aux olympiades. Ce n'est pas le cas de l'école numéro 710, mais le niveau y est quand même plus élevé que la moyenne.

De manière générale, pour les élèves en difficulté, les écoles prévoient des cours de rattrapage avec des manuels spéciaux.

Par exemple en mathématiques en 6^e, il y a 5 cours (séquences) hebdomadaires pour tous, 2 cours supplémentaires pour les meilleurs, 2 cours de rattrapage pour les plus faibles, où les élèves de deux classes parallèles sont regroupés.

Le redoublement existe, mais moins qu'en France. Il n'y a pas d'habitude dans ce domaine, car à l'époque soviétique, il n'y avait pas de mauvais élèves, seulement des mauvais profs. On ne mettait donc pas de mauvaises notes.

Malgré ces explications, nous ne comprenons pas bien pourquoi la quasi totalité des élèves que nous voyons semblent très motivés, travailleurs et peu en difficulté.

Des statistiques sur la répartition des élèves dans les différentes écoles et suivant les classes d'âge nous renseigneraient peut-être davantage. Par exemple, quel pourcentage d'une classe d'âge termine l'équivalent de notre lycée d'enseignement général ? Mes amis me disent que c'est le cas de presque tous. Et toutes les écoles russes de ce type sont-elles de niveau comparable ? (Cela pourrait par exemple se mesurer aux taux d'admission dans les meilleures universités.)

2. Les cours facultatifs, avec des exercices de recherche

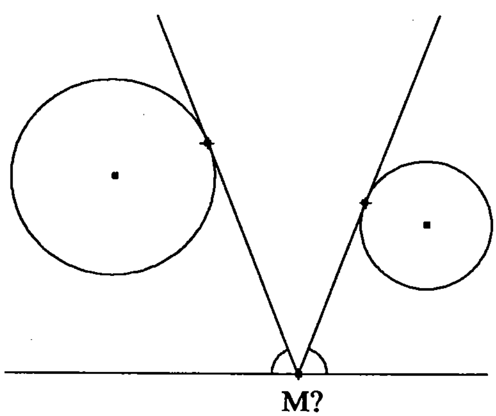
Toujours à l'école expérimentale de Moscou, nous avons vu un cours de mathématiques supplémentaire pour de bons élèves de 9^e. C'est un groupe de 12, 9 garçons et 3 filles.

Dans ces séances, on ne fait pas de cours, on ne fait que des exercices. Les exercices peuvent utiliser des notions qui ne figurent pas au programme. Dans ce cas, on présente très rapidement cette notion en tant qu'outil de résolution de problème, sans en faire une étude théorique complète.

Le cours auquel nous assistons propose des exercices de construction à l'aide de transformations du plan, mais cet objectif n'a pas été formulé.

Le professeur n'est pas un enseignant de l'école, mais un étudiant préparant une thèse de mathématiques.

Il donne au tableau le 1er énoncé, sous forme de figure :



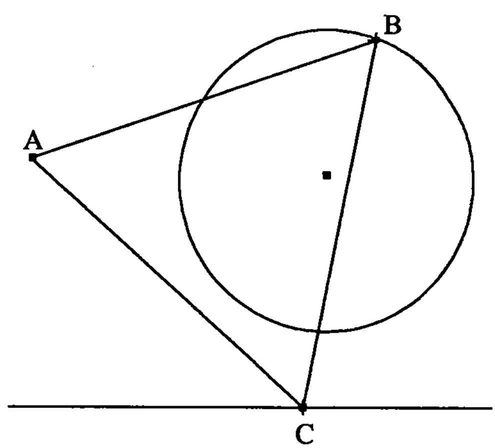
Deux cercles C1 et C2 ainsi qu'une droite D sont donnés. On cherche M tel que les angles marqués sur la figure soient égaux.

Les élèves cherchent en quatre groupes de trois élèves. Les trois filles travaillent ensemble.

Une solution est trouvée très rapidement.

Un élève l'expose oralement au tableau. Les autres ne prennent pas de notes. On ne se soucie pas de rédiger une réponse, mais on se pose le problème de l'existence et du nombre de solutions.

Puis on passe au 2^{e} exercice, toujours sous forme de figure :

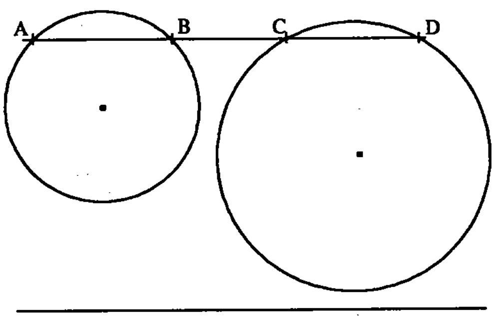


Une droite D, un cercle Γ et un point A sont donnés. On cherche B sur Γ et C sur D tels que le triangle ABC soit équilatéral.

La aussi, les groupes trouvent très rapidement et on corrige en discutant le nombre de solutions.

La rotation n'est pas au programme obligatoire de la classe, le professeur fait juste une petite figure de rappel avec une courbe et son image par une rotation de 60°.

On passe au 3^{e} exercice :



On donne deux cercles C1 et C2 et une droite Δ. On cherche une droite Δ' parallèle à Δ qui coupe C1 et C2 en A, B, C, D tels que AB = CD.

On corrige rapidement, toujours en s'appuyant seulement sur la figure, sans rien écrire.

A la fin de cette séquence, la seule trace que possèdent les élèves est une feuille sur laquelle se trouvent trois figures d'étude, souvent à main levée.

Ces cours spéciaux existent aussi à l'école primaire. Mais après la classe de 8^{e}, on peut aussi choisir une spécialité, sans obligation. Finalement, le nombre de séquences hebdomadaires de mathématiques peut aller d'un minimum de 3 à un maximum de 12, en terminale spécialité math. Dans ce cas, les élèves se retrouvent très souvent en petits groupes, et le travail à la maison est limité à la matière de spécialité et à une ou deux autres comme le russe. Par exemple, une classe de spécialité math n'aura de devoirs à la maison ni en physique, ni en chimie... On considère qu'il leur suffit d'apprendre les autres matières en classe, pendant les cours.

Voilà les mathématiques que l'on peut faire au lycée.

Mais en dehors existent en plus les cercles ou clubs mathématiques, gratuits, pour élèves volontaires, dont un des buts avoués est de préparer aux olympiades.

A Kalouga, j'ai assisté à une séance de ce type. Elle se déroulait à l'université pédagogique, en fin d'après midi donc après les cours au lycée, et le professeur était un enseignant de l'université, spécialiste des olympiades.

A Kalouga, tous les enseignants encadrant ces activités sont d'excellents mathématiciens, anciens étudiants de l'université Lomonossov de Moscou.

Ce cours est pris en charge financièrement par la municipalité.

Il s'agissait ici d'élèves de 8^{e} et de 9^{e}, qui sont en général les plus jeunes à qui ce genre d'activité est destiné. Les professeurs des différentes écoles de la ville présentent les clubs à leurs élèves et les invitent à y participer. Tout élève qui le souhaite y est accepté.

La séance que j'ai vue commence par des exercices de suites logiques, dans lesquels les jeunes présents excellent.

Par exemple : une boîte noire donne

en entrée :	27	33	19	42
en sortie :	4	1	0	?

Certains lèvent la main pour donner la

réponse dès que l'énoncé est terminé. Le professeur vérifie et leur demande de devenir juges pour les autres.

Un autre exemple de boîte noire (version francisée) est présenté dans l'encadré ci-dessous.

On leur propose ensuite un exercice de logique ensembliste.

Il faut trouver qui sont les plus nombreux : "Les chats sauf les chats qui ne sont pas des Vassia" ou bien "Les Vassia sauf les Vassia qui ne sont pas des chats".

Curieusement, cet exercice semble beaucoup plus problématique. Le professeur est obligé de donner beaucoup d'indications et guide la résolution, en montrant qu'il est possible de représenter les ensembles sous forme de diagrammes de Venn. J'apprends d'ailleurs avec surprise que les russes appellent cela des cercles d'Euler !

Voici l'exercice suivant :

La proportion des yeux bleus parmi les blonds est plus élevée que celle des yeux bleus dans la population totale.

On demande de comparer la proportion de blonds parmi les gens aux yeux bleus à celle des blonds dans la même population totale.

Cet exercice est difficile aussi. Le professeur propose de redessiner des ensembles, mais il faut dire que, comme chez nous, ils sont totalement passés de mode, et donc déroutants pour les élèves.

Une autre difficulté de ces deux exercices est qu'ils s'appuient sur des phrases compliquées, et que les cours de mathématiques russes ne semblent pas beaucoup entraîner à manipuler la langue.

Les exercices suivants consistent à placer des pièces imprenables sur des échiquiers, et exploitent les transformations géométriques associées aux différentes pièces. Les élèves proposent de nouveau assez facilement des solutions.

Toute la séance s'est déroulée dans la bonne humeur, avec très peu de contraintes mais beaucoup d'attention de la part des élèves. On ne leur demande pas de prendre des notes. On n'interroge que les volontaires. On ne vérifie pas du tout si tout le monde a compris les exercices proposés. On veut seulement que le groupe les résolve.

On fait des mathématiques comme un jeu, mais les jeunes ont très envie de le gagner.

3. Les Olympiades

Du 18 au 25 avril 1997 a eu lieu à Kalouga la finale des XXIII^{e} Olympiades Russes de Mathématiques.

C'est la quatrième et dernière étape des

Exemple de boîte noire :

En entrée, les mots :	grenier	maison	escalier	chambre	nombreux
En sortie, les nombres :	1	0	0	3	?

olympiades nationales. Il y a d'abord un concours par ville, puis par petite région, puis par grande région et enfin la finale qui réunit les élèves sélectionnés lors des étapes précédentes. En 1997, 160 élèves de toutes les régions se retrouvent ainsi pour une semaine à Kalouga. (Chaque année, c'est une autre ville qui organise la finale).

Leur voyage et leur séjour sont payés par les régions, quelquefois très lointaines, qui les envoient.

Les candidats se répartissent en trois niveaux, selon la classe qu'ils fréquentent : 9^e, 10^e, 11^e.

Les épreuves se déroulent sur deux jours. Il y a quatre exercices à résoudre en cinq heures le premier jour, et quatre, également en cinq heures, le deuxième.

Chaque exercice vaut le même nombre de points, mais chaque jour, ils sont classés en principe du plus facile au plus difficile. Les candidats savent donc qu'ils ont intérêt à les résoudre dans l'ordre, et en général, ceux qui résolvent le quatrième exercice ont également fait les autres.

Le jury se compose d'une trentaine de membres, professeurs et anciens lauréats des olympiades.

Dès la fin de la première épreuve, le jury commence son travail. Chaque membre reçoit les sujets avec des propositions de solutions. Les copies sont anonymes. La première correction est une double correction "horizontale" : chacun évalue le même exercice dans un certain nombre de copies, puis échange ces copies avec un collègue qui fait de même. Enfin, on compare les deux notes et on décide d'une note commune.

Le lendemain, pendant que les candidats passent la deuxième épreuve, on fait une double correction "verticale", chacun évaluant tous les exercices des copies qui lui sont attribuées.

Puis on note la deuxième épreuve en suivant le même processus.

Après une mise en commun des différents résultats et une délibération, le jury attribue une note à chaque candidat à l'issue de la troisième journée.

La quatrième journée, les candidats peuvent consulter leurs copies et leurs notes et émettre des objections auprès du jury s'ils les contestent.

Ce n'est qu'ensuite que le classement définitif est établi. La proclamation du palmarès ainsi que la distribution des prix clôturent alors solennellement les olympiades.

Le dispositif de correction peut sembler très lourd, mais il s'explique, car l'enjeu est bien plus important qu'il n'y paraît à première vue.

D'abord, on peut gagner des prix d'une certaine valeur pour le niveau de vie russe, par exemple une télé pour le premier prix, des radiocassettes (ces prix également sont payés par les régions qui participent aux olympiades)...

Mais on peut noter qu'il y a aussi des prix humoristiques : un élève a reçu un livre d'exercices d'écriture de niveau CP, parce qu'il écrivait très mal.

Ensuite, six candidats primés participeront à la finale internationale, ce qui signifie qu'on leur offrira une semaine de voyage lointain (cette année, en Argentine) inaccessible à une famille russe ordinaire.

Enfin, un prix aux olympiades ouvre beaucoup de portes : par exemple, les premiers prix assurent une entrée à la prestigieuse Université Lomonossov de Moscou, où la sélection est sinon très sévère.

Les énoncés ne sont pas anonymes, chacun est suivi du ou des noms de ses auteurs. Un prix du meilleur énoncé est également attribué aux auteurs par les concurrents.

Voici quelques exemples d'exercices proposés aux candidats (2) :

Classe de 9^e, exercice 1

Soit $P(x)$ un trinôme à coefficients positifs. Prouver que pour tous les nombres réels x et y, on a l'inégalité : $\left(P(xy)\right)^2 \leq P(x^2).P(y^2)$.

Classe de 9^e, exercice 8

Dans une grille carrée 10×10, on place les nombres 1, 2, ... , 100.

On note S la plus grande somme obtenue en additionnant deux nombres voisins dans la grille.

Trouver la valeur minimale possible pour S.

(Deux nombres sont voisins s'ils sont situés dans deux cases qui ont un côté commun).

(2) J'ai donné une liste d'exercices plus complète de ces Olympiades dans *l'Ouvert* n°90 de mars 1998.

Classes de 10^e, exercice 3

Deux cercles se coupent en A et B. Une droite passant par le point A recoupe les cercles en C et D.

(On suppose que les points C et D sont situés de part et d'autre de A.)

On appelle K le milieu du segment [CD], et M et N les milieux des arcs de cercles $\overset{\frown}{BC}$ et $\overset{\frown}{BD}$ qui ne contiennent pas A.

Prouver que l'angle $\widehat{MKN}$ est droit.

Classe de 10^e, exercice 4

Un polygone peut se décomposer en 100 rectangles, mais pas en 99. Prouver qu'il ne peut pas se décomposer en 100 triangles.

Classe de 11^e, exercice 2

Un roi cruel veut constituer une assemblée de sages. Pour cela, il en convoque cent et leur propose ceci :

Il les placera en file indienne puis mettra à chacun un chapeau, bleu ou blanc ou rouge.

Chacun verra alors les chapeaux de tous ceux qui le précèdent, mais ni le sien, ni ceux des sages qui le suivent.

Puis, toutes les minutes, un autre sage devra dire une couleur. Si c'est celle de son chapeau, il sera sauf et fera partie de l'assemblée, sinon, il sera exécuté.

Le roi leur permet cependant de se concerter avant de leur mettre des chapeaux.

Quelle stratégie peuvent-ils adopter pour être sûrs de sauver le maximum d'entre eux ? Quel est ce nombre maximum ?

Classe de 11^e, exercice 4

Un cube $n \times n \times n$ est composé de cubes unités.

On donne une ligne brisée fermée sans point double, formée de segments reliant les centres de deux cubes voisins (ayant une face commune).

Nous dirons qu'une face d'un cube est marquée lorsque la ligne brisée la coupe.

Prouver que l'on peut peindre toutes les arêtes des cubes à l'aide de deux couleurs, de sorte que dans chaque face marquée il y ait des nombres impairs, et dans chaque face non marquée des nombres pairs de côtés de chaque couleur.

Classe de 11^e, exercice 7

Une sphère, inscrite dans un tétraèdre, touche une de ses faces au point d'intersection de ses bissectrices, une autre au point d'intersection de ses hauteurs, et une troisième au point d'intersection de ses médianes.

Prouver que le tétraèdre est régulier.

(On trouvera en annexe des commentaires et les solutions de ces exercices d'Olympiades.)

L'encadré ci-contre présente les réponses et les prix.

Il y avait peu de filles candidates : 2 en classe de 9^e, 6 en 10^e, 2 en 11^e, mais presque toutes ont obtenu des prix : 1 en 9^e, 5 en 10^e, 1 en 11^e.

Ce que j'ai vu de la préparation et de l'organisation des olympiades m'a permis de comprendre qu'il était impossible à nos élèves de rivaliser avec les concurrents russes lors des épreuves internationales. Les candidats russes sont préparés par des séances hebdomadaires encadrées par des spécialistes, par quatre compétitions annuelles, plus des camps de vacances mathématiques dans des régions de villégiature, pendant trois ou quatre ans.

Par conséquent, nos élèves ont un statut d'amateurs dans une compétition où ils affrontent des candidats quasi professionnels.

Voici le nombre de réponses justes, par classes et par exercice :

	9	10	11	
1	51	27	25	
2	40	14	10	
3	7	6	6	
4	15	1	5	
5	47	30	22	
6	39	23	12	
7	19	12	10	
8	1	1	7	
Sur	57	48	50	candidats

Voici le nombre de prix par classes :

	9	10	11
1er prix	1	3	1
2^e prix	13	6	7
3^e prix	13	9	15

REPERES - IREM . N° 36 - juillet 1999

Cependant, cette préparation russe résulte d'une volonté politique. L'argent manque actuellement pour presque tout en Russie, mais les villes et les régions continuent à investir, beaucoup, pour les Olympiades, et dans toutes les matières. On donne aux matières intellectuelles le même statut qu'au sport. Dans les deux cas, il y a au départ des clubs gratuits ouverts à tous ceux qui le souhaitent, dans lesquels les meilleurs se dégageront petit à petit.

4. La formation initiale des professeurs

Olga et Vladimir Boulytchev enseignant tous deux à l'Université Pédagogique de Kalouga, j'ai également eu l'occasion de m'intéresser à la formation des enseignants.

Dès la fin du lycée, un futur enseignant entre, après une sélection sur dossier, dans une université pédagogique où il étudiera à la fois la discipline qu'il a choisie, la didactique de sa discipline, la pédagogie et des matières complémentaires (par exemple informatique, langue étrangère.... pour les étudiants de mathématique).

Un professeur du secondaire n'a donc jamais fait d'études dans une faculté de mathématiques.

On quitte l'université pédagogique avec un diplôme interne après cinq années d'études. On essaie ensuite d'obtenir un contrat avec une école.

Actuellement, les enseignants russes ont des salaires extrêmement bas, et souvent ils ne les perçoivent pas du tout ou très en retard.

En 1997, il existait un salaire minimum officiel, de 80 MR mensuels (80 mille roubles, le taux de change étant à très peu de choses près un millier de roubles contre un franc français).

Le salaire d'un professeur confirmé était d'environ 350 à 400 MR, un peu plus à Moscou. Mais 1 jeton de métro à Moscou ou un pain coûtaient 2 MR, 1 kg de fruits (pommes, oranges ou bananes en avril) 6 à 8 MR

Le logement est en général nettement moins cher qu'en France, les énergies (gaz, électricité) ont un prix symbolique, le téléphone est presque gratuit, mais tous les produits alimentaires ou manufacturés, presque tous importés, ont un prix comparable aux prix français.

On comprend donc qu'un salaire de prof ne peut être qu'un salaire d'appoint. L'une des conséquences est que l'enseignement est encore bien plus féminisé qu'en France. A l'université pédagogique, j'ai vu beaucoup de groupes d'étudiantes où il n'y avait pas le moindre garçon.

Lorsqu'un homme est enseignant, il complète son salaire par beaucoup d'autres activités plus lucratives, et très souvent un deuxième emploi.

Une autre conséquence est que beaucoup d'étudiants cherchent un autre emploi que l'enseignement à la fin de l'université pédagogique, en particulier dans des villes comme Kalouga où il n'y a pas d'autre université.

Malgré les bas salaires, il n'est cependant pas facile de trouver un emploi d'enseignant, mais cela dépend aussi des disciplines. C'est très difficile en français par exemple, car l'étude du français est délaissée au profit de l'anglais et, de plus en plus, de l'allemand.

J'ai assisté à des cours et à des TP de math, d'informatique et de français.

Prenons par exemple un lundi matin d'avril, en 5^e année d'université pédagogique de mathématiques.

La journée commence par une séance de TP de math d'une heure trente.

Le groupe se compose d'une douzaine d'étudiants, dont la moitié arrive en retard.

La séance porte sur les probabilités, auxquelles très peu d'heures sont consacrées, et seulement en 5^e année, ce thème n'étant en général pas encore réintégré aux programmes des lycées.

Les exercices proposés sont du niveau de notre terminale S ou à peine plus difficiles.

Chaque étudiant (théoriquement, car beaucoup l'ont oublié) a un manuel de probabilités qui leur a été prêté par l'université. La plupart des énoncés en sont extraits, mais certains sont également dictés.

Quelques-uns des exercices ont été donnés à la maison. L'enseignant demande d'abord à chacun des étudiants combien il en a résolu. Ensuite, il désigne quelqu'un pour corriger chacun des exercices au tableau.

Les nouveaux exercices sont d'abord cherchés sur les cahiers, puis corrigés au tableau.

Le travail est détendu et assez actif, mais pas très rapide.

Les mêmes étudiants suivent ensuite une séance de cours d'une heure trente aussi. Cette fois-ci, il y a 25 étudiants, deux groupes de TP réunis. Les effectifs nous font rêver, mais ils sont à rapprocher des salaires des enseignants, qui ne sont guère plus élevés à l'université qu'au lycée...

Le cours de probabilité porte sur les théorèmes de Moivre-Laplace, le schéma de Bernoulli et la loi de Poisson. C'est très étrange de voir ces noms écrits en cyrillique, mais je suis encore plus surprise de constater un usage immodéré de l'alphabet latin. L'espérance est notée E, les probabilités p ou P. On trouvera donc "E = np", mais mieux, l'enseignant écrit "p = const." pour dire que p est une constante, "th." pour théorème, "ex." pour exemple, alors que les mots équivalents russes n'ont aucun rapport avec ces lettres.

A la fin de la séance, j'interroge l'enseignant, Vladimir Boulytchev, sur ces notations. Il me répond que la principale, et sans doute la seule raison pour laquelle il les utilise, est que son professeur préféré écrivait ainsi lorsqu'il était étudiant à l'université Lomonossov de Moscou.

Il faut dire qu'à Moscou, Vladimir et Olga ont eu comme professeurs Kolmogorof et d'autres mathématiciens russes célèbres de la même génération, qui étaient très imprégnés de culture française. Il paraît même que certains d'entre eux prononçaient les noms des mathématiciens avec l'accent français.

Certaines notations sont plus originales. L'intersection d'événements est notée $A_1 . A_2 . \dots . A_n$ et non $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, de même la réunion, même non disjointe, est notée $A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

$(2n+1)!!$ représente le produit $1 \times 3 \times ... \times (2n+1)$, de même, $(2n)!!$ représente le produit $2 \times 4 \times ... \times (2n)$.

Le contenu du cours est très concret. Aucun théorème n'est démontré, par contre il y a de très nombreux exemples pour comprendre le sens et la portée des résultats.

Dans la formation de ces futurs professeurs, il semble donc que l'aspect théorique et formel des mathématiques est beaucoup moins développé que ses applications.

Je manque d'éléments pour en mesurer les conséquences, mais il ne faut pas oublier, comme je l'ai déjà souligné, que les professeurs du secondaire ne sont pas les seuls à assurer la formation mathématique des élèves, en particulier des meilleurs, où interviennent aussi des universitaires.

Conclusion : l'image des mathématiques dans la culture russe

Les écoles que nous avons visitées n'ont sans doute pas été choisies au hasard.

Cependant, toutes les classes que nous avons vues semblaient appliquées, attentives, motivées.

Les relations avec les enseignants étaient toujours détendues et conviviales, et pas du tout répressives.

On met des notes de 1 à 5, 5 étant la meilleure, mais il semble que la plus mauvaise note utilisée en pratique est 2.

Les élèves semblent respecter les professeurs, mais pas les craindre.

D'autre part, les professeurs russes m'ont souvent parlé de leurs problèmes de salaire, mais n'ont jamais évoqué de conditions de travail difficiles.

Alors, qu'est ce qui explique que le travail du professeur de mathématique russe semble si facile ?

D'abord, on peut constater que l'ambiance dans les classes ressemble à ce qu'elle était chez nous il y a trente ans mais que la vie des Russes, en dehors de Moscou, est également proche de la nôtre il y a trente ans. Si nous pouvions analyser clairement pourquoi la situation est devenue plus difficile dans nos écoles, nous connaîtrions peut-être les causes de la relative sérénité actuelle de l'enseignement en Russie, et nous saurions peut-être si elle a des chances de durer.

Il semble aussi que le système de sélection russe est original : il se fait plutôt par la réussite, et pas par l'échec.

On propose toujours plus de travail et plus de difficultés aux meilleurs, il y a même des manuels d'exercices pour eux, mais dans une certaine mesure, par exemple pour les clubs mathématiques, il suffit d'être volontaire, sans autre forme de sélection, pour aller plus loin.

Une étudiante de l'université pédagogique m'a posé la question suivante : “En Russie, nous aimons les élèves doués, au Japon, on aime les élèves travailleurs, et en France ?”.

Je lui ai répondu que je crains qu'en France nous n'appréciions que les élèves à la fois doués et travailleurs.

Je ne sais pas vraiment ce que devient

un élève en échec en Russie, mais j'ai l'impression qu'on ne l'ennuie pas trop. Pour reprendre le parallèle avec l'entraînement sportif, on n'exige pas de celui qui est trop lent au sprint qu'il passe de 16 secondes aux 100 mètres à 15. On lui permet cependant de s'exercer à cela s'il le souhaite et on intensifie l'entraînement de ceux qui sont susceptibles de rivaliser avec l'élite.

Les meilleurs par contre sont très sollicités. La sélection est sévère.

Par exemple Macha, la fille de mes amis, en classe de 8^{e}, suivait des cours par correspondance à l'université de Moscou. Elle enverra ainsi régulièrement des devoirs pendant quatre ans, comme élément de son dossier de candidature à l'entrée à l'université. La participation aux clubs et aux olympiades en fera également partie.

Macha suit une école spécialisée en langues étrangères. Elle a six cours d'anglais par semaine depuis la classe de 3^{e}, et deux cours de français depuis la 6^{e}. Mais son école est l'une des meilleures dans toutes les matières, parce que c'est la seule de Kalouga qui sélectionne à l'entrée.

Je pense aussi que les études et les matières intellectuelles, les mathématiques en particulier, bénéficient encore actuellement en Russie d'une bien meilleure image qu'en France.

J'ai souligné que les villes et les régions, qui ont pourtant beaucoup moins de moyens qu'en France, financent généreusement les Olympiades et leur préparation.

Les universitaires s'intéressent beaucoup à la formation des jeunes.

C'est une longue tradition en Russie. Ainsi Kolmogorof dirigeait à Moscou un internat pour jeunes élèves doués, où les meilleurs en mathématiques d'URSS achevaient leur enseignement secondaire.

Mes amis russes y ont été élèves.

Je vais conclure avec une de leurs plaisanteries. Vladimir et Olga sont de grands amateurs de poésie, et j'ai rarement vu autant de recueils de poèmes que chez eux dans une bibliothèque française, mais ils m'ont dit, à propos d'un de leurs camarades d'études de mathématiques à l'université : "Il n'avait pas suffisamment d'imagination pour être mathématicien, alors il est devenu poète"...

(Il ne s'agit en aucun cas d'Evgueni Bounimovitch, qui a assez d'imagination pour être à la fois mathématicien et poète...)

Post scriptum

Je suis retournée en Russie cet été 1998 pendant quatre semaines. J'ai d'abord observé les petits changements.

Le premier janvier 1998, 1000 anciens roubles sont devenus 1 nouveau rouble, mais les marchandes continuent à compter en anciens roubles. Dans la division par mille, ce sont les kopecks qui posent problème. En effet, 200 anciens roubles sont devenus 20 kopecks.

Moscou est de plus en plus luxueuse et de plus en plus occidentale, je n'y suis plus vraiment dépaysée. D'ailleurs, beaucoup de Moscovites me demandaient leur chemin, ce qui montre peut-être que dans la capitale, une Française ne se distingue plus d'une Russe.

La ruineuse reconstruction de la cathédrale Saint-Sauveur était presqu'achevée.

Dans la périphérie de Moscou, il y avait d'impressionnants chantiers d'autoroutes qui engloutissaient probablement les dollars par puissances de 10.

Au delà, quelques dizaines de kilomètres plus loin, commence la Russie profonde, pauvre mais authentique, où peu de choses ont changé ces dernières années.

Je voulais aussi entendre quelques signes d'espoir. Par exemple, Evgueni Bounimovitch a été élu député à la Douma (parlement russe) et y exerce des responsabilités dans le domaine de l'enseignement.

J'ai malheureusement quitté le pays le 15 août plus pessimiste que jamais sur son avenir, au moment où s'observaient à Moscou les premiers effets de la crise financière.

Il fallait environ 6 roubles pour obtenir un dollar US en juillet, et le cours s'est maintenant stabilisé aux environ de 20 roubles pour un dollar. Dans un pays où presque tous les produits sont importés, on mesure l'ampleur du drame.

J'ai reçu depuis des nouvelles alarmantes de mes amis. Ils évoquent l'image du choléra pour décrire la crise. Beaucoup d'entreprises et de banques font faillite et la faillite d'une banque signifie là-bas la perte des économies qu'on y avait placées. Les magasins sont vides et les rares articles y sont hors de prix. Les récoltes de l'été ont été les plus mauvaises depuis des années et on peut craindre un hiver de famine si l'aide internationale n'est pas mobilisée.

Malgré tout, c'est la fierté, l'humour et le système D qui l'emportent une fois de plus. Les Russes ont déjà traversé tant de difficultés qu'ils ont l'habitude de se battre sans se plaindre. Vladimir travaille encore plus dur qu'auparavant. Il essaie de gagner de l'argent dans le domaine informatique. Son travail d'enseignant ne lui permet plus de vivre, mais il y reste attaché. Chacun s'organise pour survivre.

Et plus que jamais, la plus grande richesse de ce pays et sa plus grande chance pour l'avenir est sa culture et son niveau d'éducation très élevé...

ANNEXE
Commentaires et solutions des exercices des Olympiades (3)

Classe de 9e, exercice 1

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Alors, le calcul donne

$[P(xy)]^2 - P(x^2)P(y^2) = -abx^2y^2(x-y)^2 - ac(x^2-y^2)^2 - bc(x-y)^2$, d'où le résultat.

Classe de 9e, exercice 8

La plus petite valeur possible pour S est 106.

Voici une grille dans laquelle S = 106 :

46	55	47	54	48	53	49	52	50	51
60	41	59	42	58	43	57	44	56	45
36	65	37	64	38	63	39	62	40	61
70	31	69	32	68	33	67	34	66	35
26	75	27	74	28	73	29	72	30	71
80	21	79	22	78	23	77	24	76	25
16	85	17	84	18	83	19	82	20	51
90	11	89	12	88	13	87	14	86	15
6	95	7	94	8	93	9	92	10	91
100	1	99	2	98	3	97	4	96	5

Prouvons maintenant que $S \geq 106$ pour toute disposition des nombres dans la grille.

– On utilise le **lemme** suivant :

> Si dans un rectangle 2×10, on coche n cases 2 à 2 non voisines, avec $1 \leq n \leq 9$, alors le nombre de cases non cochées du rectangle, voisines de cases cochées, est strictement supérieur à n.

(3) Les solutions données ici s'inspirent des corrigés proposés par les auteurs russes des exercices.

(On prouve ce lemme en décomposant le grand rectangle en 10 rectangles 1×2)

– Supposons maintenant qu'on ait une grille où $S \leq 105$. Recopions-la en écrivant à la même place les nombres à partir de 100 dans l'ordre décroissant sur une grille vierge.

La grille 10×10 se décompose en 5 bandes horizontales 10×2 disjointes et en 5 bandes verticales 2×10.

Appelons n_0 le nombre après l'inscription duquel on trouve pour la première fois au moins un nombre, soit dans chaque bande horizontale, soit dans chaque bande verticale. Nous dirons qu'il s'agit du moment critique.

– On remarque d'abord que $n_0 \geq 68$. (Car s'il reste une bande horizontale et une bande verticale vides après avoir inscrit les 33 nombres de 100 à 68, alors les 64 cases de la grille qui ne sont dans aucune de ces deux bandes peuvent se diviser en 32 rectangles 1×2. Comme il y a 33 nombres, l'un au moins des rectangles contient 2 nombres voisins de somme $\geq 68 + 69 > 105$).

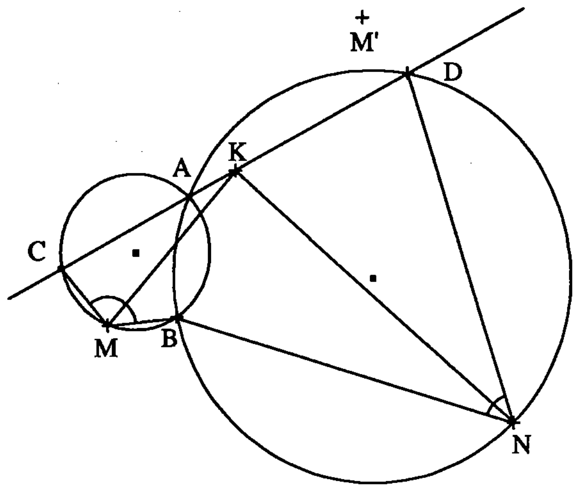
– Nous remarquons ensuite qu'au moment critique, il y a moins de 10 nombres dans chaque bande.

(Sinon, si une bande horizontale par exemple contient 10 nombres ou plus, elle en contenait au moins 9 avant n_0, et alors le moment critique était déjà atteint à cause des 5 bandes verticales puisqu'on ne pouvait pas remplir les 2 cases d'un rectangle 1×2 de la bande horizontale avec des nombres $\geq n_0 \geq 68$ sans que leur somme dépasse S).

– On applique alors le lemme aux 5 bandes de même direction qui contiennent au moins un nombre au moment critique : à ce moment, il y a dans la grille $101 - n_0$ nombres ; d'après le lemme, ces nombres ont au moins $(101 - n_0) + 5 = 106 - n_0$ cases voisines vides. Même si ces cases vides sont remplies avec les nombres les plus petits possibles, l'un de ces nombres sera donc supérieur ou égal à $106 - n_0$, et il sera voisin d'un nombre supérieur ou égal à n_0, donc leur somme sera au moins 106, ce qui contredit $S \leq 105$.

L'exercice 3 donné en 10^e (le même a été donné en 11^e) était un bel exercice de géométrie pour l'ancien programme de spécialité de terminale S si on donnait quelques indications. Sous cette forme, il nécessite les propriétés des angles d'un quadrilatère inscrit, c'est pourquoi il pose quelques problèmes pour le nouveau programme, mais il est peut-être possible de l'adapter.

En voici la figure :



Exemple d'indications :

Soit α une mesure de $(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB})$ et β une mesure de $(\overrightarrow{NB},\overrightarrow{ND})$.

1) Soit f la composée $rot_{N,\beta} \circ rot_{M,\alpha}$. Etudier $\alpha + \beta$ et f (C). En déduire f.

2) Utiliser M' = $rot_{N,\beta}(M)$.

Classe de 10^e, exercice 4

– Lemme :

Si un polygone à 2k côtés peut se décomposer en rectangles, alors il existe une décomposition en au plus k – 1 rectangles.

Preuve : la somme des angles du polygone est S = (2k – 2) × 180° et tous ses angles ont 90° ou 270°.

Si tous ont 90°, alors c'est un rectangle (et on a 2 × 2 côtés et 2 – 1 rectangle).

Sinon, il y a au moins un angle de 270°. On prolonge alors un de ses côtés et on coupe le polygone en deux suivant cette droite. L'étude des différents cas montre que la somme de tous les angles des 2 polygones obtenus est inférieure ou égale à la somme des angles du polygone de départ et que le nombre total des angles de 270° a diminué.

S'il reste encore des angles de 270°, on recommence l'opération avec les nouveaux polygones. Finalement, nous obtenons n polygones sans angle de 270°, donc n rectangles, avec comme somme des angles : $S = 360° \times n \leq (2k - 2) \times 180°$ d'où $n \leq k - 1$, ce qui démontre le lemme.

– Un polygone qui se décompose en rectangles a un nombre pair de côtés.

Du lemme il résulte qu'un polygone qui se décompose en 100 rectangles, mais pas en 99 a un nombre de côtés strictement supérieur à 200, sinon on pourrait le diviser en 99 rectangles.

– Divisons-le en m triangles et examinons la somme de leurs angles : $S = 180° \times m$.

Etudions maintenant S en observant le lien entre les angles des triangles et ceux du polygone qu'ils composent.

Chaque angle du polygone entre pour au moins 90° dans la somme des angles des triangles (un angle de 270° peut être réduit de 180° si son sommet se trouve sur le côté d'un des triangles) et donc $S = 180° \times m > 200 \times 90°$ d'où $m > 100$.

– Remarque : le polygone formé par les cases d'un carré 100x100 non situées au dessus de la diagonale principale donne l'exemple d'un polygone formé de 100 rectangles et que cette diagonale divise en 101 triangles.

L'exercice 2 donné en 11^e est un exercice d'arithmétique qui peut éventuellement trouver sa place en enseignement de spécialité de terminale S, même s'il est à la limite du programme puisqu'il repose sur la notion de congruence modulo 3.

Eléments de réponse :

Ils peuvent sauver 99 sages au moins.

En effet, on peut attribuer aux couleurs bleu, blanc, rouge les nombres 0, 1, 2 respectivement.

Il suffit alors que le dernier de la file annonce la couleur correspondant à la somme modulo 3 des nombres attribués aux 99 chapeaux qu'il voit devant lui. Par soustraction, chacun des 99 autres trouvera la couleur de son chapeau.

Classe de 11^e, exercice 4

Soit PQ une arête horizontale quelconque de l'un des petits cubes et R_{PQ} le rectangle vertical dont le côté inférieur est PQ et le côté supérieur est dans la face supérieure du grand cube.

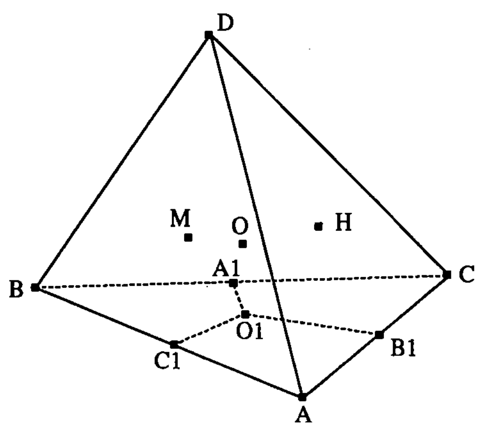
Soit n_{PQ} le nombre d'intersections de la ligne brisée avec le rectangle R_{PQ}.

On colorie PQ en blanc si n_{PQ} est pair et en noir si n_{PQ} est impair.

On colorie toutes les arêtes verticales et toutes les arêtes situées dans la face supérieure du cube en blanc.

On prouve ensuite que le coloriage obtenu convient, en étudiant d'abord le cas des petites faces verticales PQRS par comparaison des rectangles R_{PQ} et R_{RS}, puis celui des petites faces horizontales PQRS en raisonnant sur le parallélépipède rectangle limité par PQRS, les rectangles R_{PQ}, R_{QR}, R_{RS} et R_{SP} et un carré de la face supérieure du cube.

Classe de 11^e, exercice 7



Soit O le centre de la sphère. Supposons qu'elle passe par O_1, centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, par H, orthocentre du triangle ACD et par M, centre de gravité du triangle ABD.

Soit A_1, B_1, C_1 les points de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec ses côtés.

– Alors $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1$ et par conséquent les triangles rectangles $OO_1A_1 = OO_1B_1 = OO_1C_1$ sont isométriques d'où $\widehat{OA_1O_1} = \widehat{OB_1O_1} = \widehat{OC_1O_1} = \varphi$.

De plus $O_1A_1 \perp BC$ et $OO_1 \perp BC$ d'où $OA_1 \perp BC$, donc φ est l'angle des 2 plans BOC et BO_1C.

D'autre part, comme la sphère de centre O est tangente aux plans BDC et BAC, BOC est le plan bissecteur du couple de plans BDC et BAC, donc l'angle des plans BDC et BAC est égal à 2φ.

REPERES - IREM . N° 36 - juillet 1999

De même les plans ADC et ADB font avec le plan ABC des angles égaux à 2φ.

Il en résulte que le projeté orthogonal O' du point D sur le plan ABC est équidistant de AB, BC et CA et comme O' et C sont du même côté de AB, O' et B du même côté de AC et O' et A du même côté de BC, on en déduit que $O' = O_1$, c'est à dire que DO_1 est une hauteur du tétraèdre et elle passe par O car $OO_1 \perp ABC$.

– Comme $AB \perp O_1C_1$ et $AB \perp DO_1$, on a $AB \perp DO_1C_1$. De même $AC \perp DO_1B_1$.

Soit M_1 et H_1 les projetés orthogonaux de O respectivement sur DC_1 et DB_1.

Alors $OM_1 \perp DC_1$ et $OM_1 \perp AB$ (car $AB \perp DO_1C_1$) donc $OM_1 \perp ADB$ et par conséquent $M_1 = M$ et M est sur DC_1.

De même $OH_1 \perp ADC$ donc $H_1 = H$ et H est sur DB_1.

Donc la droite DM est à la fois médiane et hauteur du triangle ADB ($AB \perp DO_1C_1$ donc $AB \perp DC_1$) et par conséquent $AD = DB$. On en déduit que $AO_1 = BO_1$, et ensuite que $AC = BC$ donc les points C, O_1, C_1 sont alignés et C_1 est le milieu de AB.

– On a $CH \perp AD$ et $OH \perp AD$ (car $OH \perp ADC$) donc $OC \perp AD$. De plus $AB \perp DO_1C_1$ et C est sur C_1O_1 et O sur DO_1 donc $OC \perp AB$.

On en déduit que $OC \perp ABD$ mais comme $OM \perp ABD$, les points O, C, M sont alignés.

Il en résulte que M est le centre du cercle inscrit dans ABD (car le cône de sommet C tangent à la sphère de centre O coupe le plan ADB orthogonal à OC suivant le cercle inscrit dans ABD puisque les plans CAD, CBA et CBD sont tangents à la sphère).

Comme M est aussi centre de gravité du triangle ABD, on en conclut que ABD est équilatéral.

– Observons le triangle CDC_1. Dans celui-ci, DO_1 et CM sont des hauteurs et C_1O une bissectrice, donc C_1, O_1, C sont symétriques de C_1, M, D par rapport à C_1O. Or M est centre de gravité du triangle ABD, donc $MC_1 = 2\ MD$ d'où $C_1O_1 = 2\ CO_1$ et donc O_1 est centre de gravité du triangle ABC.

Comme O_1 est aussi centre du cercle inscrit dans le triangle ABC, on en déduit que ABC est équilatéral.

– On a donc $AC = BC = AB = AD = DB$, mais comme de plus les triangles BDO_1 et CDO_1 sont des triangles rectangles isométriques, on a aussi $DB = DC$ donc le tétraèdre est régulier.