REPERES - IREM . N° 37 - octobre 1999

FIGURES ET GEOMETRIE : LA TENTATION DU SENS ? ...

Fable elliptique

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

«On ne va pas bien loin quand on va tout droit.»
Le Petit Prince *(Saint Exupéry)*

(Le présent texte est celui de la conférence d'introduction pour le colloque de la Commission Inter-Irem de géométrie, à Bayonne en juin 1996.)

Permettez-moi tout d'abord de remercier les organisateurs de ce colloque de m'avoir confié la conférence d'ouverture. C'est un grand honneur et une lourde responsabilité, d'autant qu'ils ont bien insisté sur le fait qu'ils tenaient à une conférence "généraliste", profonde, limpide et éclairante sur le thème retenu : "le rôle de la figure en géométrie" ! Je me suis évidemment demandé longuement (sans doute comme vous-mêmes) ce qu'il était possible de raconter sur ce sujet qui soit *profond*, *limpide* et *éclairant* ; et je dois avouer que mon intention première a été de vous "faire un conte"... Il faut dire que je voyais à cela deux bonnes raisons... et deux inconvénients.

La première bonne raison était tout simplement que le titre même du colloque me semblait particulièrement approprié à un conte, et même à un conte qui aurait pu constituer le premier de toute une série de contes à venir : le *rôle du nombre en arithmétique*, le *rôle des fonctions en analyse*, etc., et même — pourquoi pas — le *rôle de la langue en littérature*... La seconde raison était plus sérieuse car j'avais trouvé une idée qui me paraissait particulièrement enthousiasmante : c'était l'histoire d'un enfant qui, dès le début de sa scolarité se serait pris d'affection pour la géométrie, au moment même où il se passionnait pour les figures, et notamment pour la figure que nous avons tous tenté de réussir un jour :

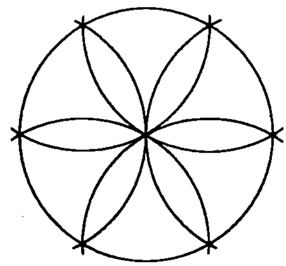


fig. 1

l'étoile à six branches réalisée au compas... Seulement tout se serait passé dans un pays imaginaire, et dans ce pays imaginaire il y aurait eu une sorte de corporation imaginaire que l'on aurait appelé la *Noosphère*, constituée de toutes les personnes élégantes et graves qui s'intéressent à la transposition du savoir savant en savoir enseigné. Et cette *Noosphère* imaginaire aurait joué un vilain tour à notre héros... Elle aurait décrété — pour des raisons, évidemment, qui nous échappent, mais qui auraient relevé d'une réflexion profonde sur les savoirs savants et les savoirs enseignés — elles aurait décrété, donc, que les *parallèles n'existaient pas*, c'est-à-dire que deux droites quelconques se coupaient toujours, pour peu que l'on aille assez loin à l'infini ! Il n'y avait là aucune illégitimité puisqu'au demeurant nul ne sait ce qui se passe vraiment aux confins de l'univers... mais c'était un bien mauvais tour joué à notre héros car la géométrie élémentaire en devenait beaucoup moins élémentaire... à commencer par le fait que, pour des raisons raisonnantes qui tiennent à la somme des angles d'un triangle, son "étoile" ne se refermait pas !

L'idée était donc d'autant plus intéressante que c'était un moyen original de rentrer dans la problématique bien connue entre "figures exactes" et "figures fausses". Seulement c'est là qu'intervenaient les deux inconvénients dont je vous ai déjà parlé. Le premier n'est pas des moindres : c'est que ce conte-là, je vous l'ai déjà raconté, il y a deux ans, au colloque de Lille([1]), et certains d'entre vous auraient bien fini par s'en apercevoir... Le second, c'est qu'il m'aurait donc fallu inventer une suite aux aventures de mon héros et que celui-ci s'est finalement mis à devenir agaçant au plus haut point et même complétement insupportable... En effet, ceux qui ont suivi l'histoire contée à Lille s'en souviennent sans doute : elle se termine avec le fait que l'enfant, une fois ses études achevées, se retrouve lui-même parmi les personnes élégantes et graves de la *Noosphère*, c'est-à-dire qu'il finit lui-même par s'impliquer dans les problèmes de la "transposition didactique". Comme disent ceux qui n'ont pas peur des mots... Et je dois reconnaître que, depuis, il ne me parle plus que de "sens des mathématiques", de "sens de la géométrie", de "sens de la mesure", de "plaisir du sens", et que sais-je encore... Bref, j'ai bien l'impression qu'il a succombé à la "tentation du sens" et j'en ai eu la confirmation le jour où il m'a laissé entendre que, de son point de vue, la géométrie n'était au fond qu'un chapitre particulier de la philosophie...

C'en était naturellement trop ! J'ai renoncé à vous "faire un conte" et je vais simplement vous "faire une conférence" très classique, en trois parties, qui soit *profonde*, *limpide* et *éclairante* sur les rapports entre les figures et la géométrie...

*

* *

Je connais assez bien un petit collégien de 5e qui vient de temps en temps me consulter avant de rendre ses devoirs. Il m'a soumis au début de l'année l'exercice suivant : « Tracer un triangle ABC dont les côtés mesurent 4 cm, 6 cm et 8 cm et déterminer son aire. »

Bien entendu, il n'y a aucune raison pour que vous sachiez résoudre le problème puisque vous ignorez la règle du jeu. Je vous indique donc le "contrat didactique"... Comme vous le savez, la mode pédagogique n'est plus de faire réaliser soigneusement ce triangle dans un car-

1 — voir « Constructions géométriques : la conquête de l'inutile ?», dans les Actes du Colloque de Lille, ou dans le numéro 19, avril 1995, de la revue Repères.

ton fort (ou dans tout autre succédané du platine irridié) afin de déterminer son aire par une pesée de précision. Mais il faut cependant noter que l'exercice reposait sur la construction de la hauteur AH, sur sa mesure au double-décimètre et sur la détermination des aires respectives des triangles AHB et AHC, car il s'agissait à ce moment-là de *découvrir* la formule donnant l'aire de ABC connaissant celle qui donne l'aire des triangles rectangles...

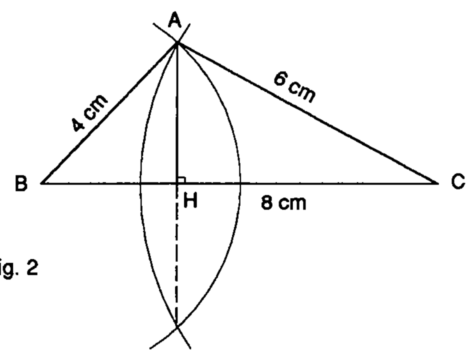


fig. 2

Ce n'est que plus tard dans sa scolarité que notre collégien ira plus avant dans l'étude de sa figure. Il apprendra sans doute d'abord à justifier par le raisonnement des propriétés classiques, comme — par exmple — celle de la concourance des trois hauteurs... Comme dans la plupart des activités de ce genre, il conviendra de *compliquer* astucieusement la figure afin de faire apparaître des phénomènes plus évidents ou simplement déjà connus. Il pourra par exemple, en ce qui concerne les hauteurs, construire le triangle "double" du triangle initial (fig. 3a) de manière à ce que celles-ci apparaissent comme les *médiatrices* du nouveau triangle. Il pourra aussi tracer le triangle dont les sommets sont les pieds des trois hauteurs, pour que ces dernières soient les *bissectrices* du triangle "pédal" (fig. 3b). Il aura encore la possibilité — pourquoi faire simple lorsque l'on peut faire compliqué ? — de penser à tracer

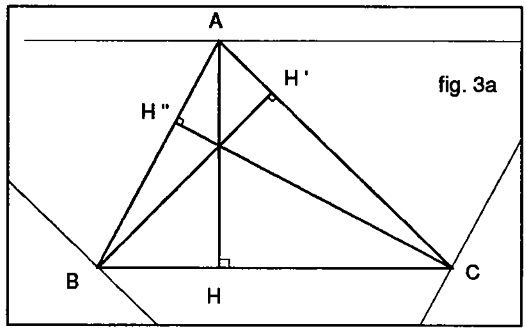


fig. 3a

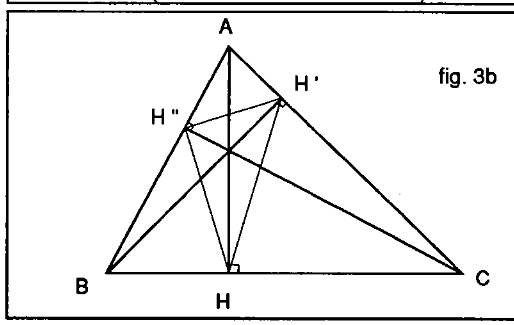


fig. 3b

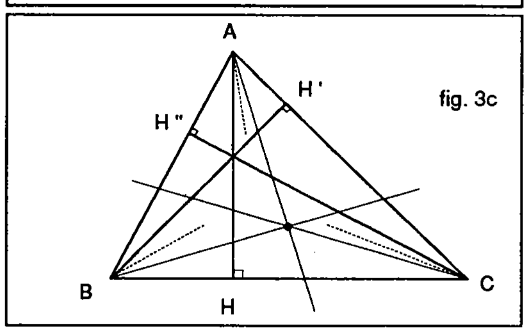


fig. 3c

les symétriques de chacune des hauteurs par rapport aux bissectrices des angles correspondants... il s'apercevra alors que ces droites *passent par le centre du cercle circonscrit* et donc qu'elles sont concourantes... Peut-être pensera-t-il alors à utiliser la propriété de moins en moins connue, mais qui sert lorsqu'il est question des "symédianes" : «si trois droites issues des sommets sont concourantes, leurs symétriques respectives par rapport aux bissectrices le sont aussi»...

En fait, il apprendra assez vite à ramener toutes ces considérations à des *calculs*... Ainsi, les propriétés d'orthogonalité se traduiront peu à peu à partir de la nullité d'un produit scalaire entre vecteurs ; si bien que la concourance des hauteurs pourra reposer sur un calcul très simple qui met en jeu la linéarité :

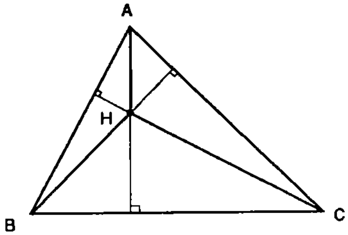


fig. 4a

« *si* AH *et* BH *sont deux hauteurs, cela équivaut au fait que :*

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ et } \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 .$$

Il faut alors voir que $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Mais : $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}).(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB})$

$= \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{HB}$

$= \overrightarrow{AH} .(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ ... »

Il est possible aussi de faire appel à des calculs "non commutatifs" — à des calculs sur

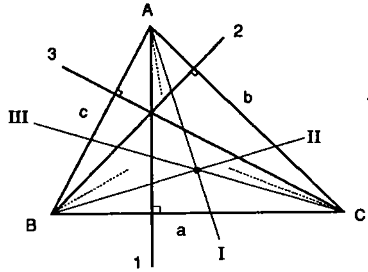


fig. 4b

des transformations — pour justifier d'un seul coup le théorème que j'ai évoqué sur les symétriques par rapport aux bissectrices :

«*Supposons* (fig. 4b) *que nous sachions que les droites* I, II *et* III *sont concourantes et désignons par* 1, 2 *et* 3 *leurs symétriques par rapport aux bissectrices des angles correspondants. Avec les notations de la figure, la symétrie dans l'angle en* A *va entraîner, sur les composées de symétries par rapport aux droites passant par* A :

$1 \circ c = b \circ I$, *ou encore :*

$$1 = b \circ I \circ c .$$

On voit par là que, parce que les droites b, I *et* c *sont concourantes, le produit des trois symétries* $b \circ I \circ c$ *est aussi une symétrie. En fait il est facile de se convaincre que cette propriété caractérise les triplets de droites concourantes ou parallèles.*

Dès lors nous disposons des hypothèses :

$1 = b \circ I \circ c$, $2 = c \circ II \circ a$, $3 = a \circ III \circ b$

et nous savons que $I \circ II \circ III$ *est une symétrie ; donc que*

$$(I \circ II \circ III) \circ (I \circ II \circ III) = \text{Identité} ,$$

et il ne nous reste plus qu'à calculer le produit

$$(1 \circ 2 \circ 3) \circ (1 \circ 2 \circ 3) .$$

C'est-à-dire :

$[(b \circ I \circ c)\circ(c \circ II \circ a)\circ(a \circ III \circ b)]\circ$
$\circ[(b \circ I \circ c)\circ(c \circ II \circ a)\circ(a \circ III \circ b)]$

et à voir que l'on obtient bien l'identité... »

Mais le "top niveau" du calcul est sans conteste du ressort de la "géométrie supérieure"

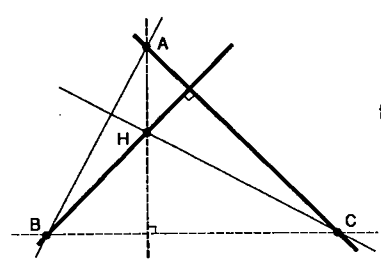


fig. 4c

qui consiste à pouvoir "invoquer" des calculs qui n'ont même pas besoin d'être effectués

«Considérons (fig. 4c) *la "courbe" formée par les deux droites* AC *et* BH. *Son équation est le produit des équations des deux droites, et comme celles-ci sont perpendiculaires, on voit immédiatement que ce produit a des termes carrés très simples :* $E_1 = (x^2 - y^2 + \ldots)$

Et si nous considérons de même le couple formé par les droites perpendiculaires CB *et* AH, *nous obtiendrons une équation :*

$$E_2 = (x^2 - y^2 + \ldots)$$

Or ces deux "courbes" du second degré ont quatre points en commun, si bien que toutes les autres courbes du second degré passant par ces quatre points ont une équation de la forme :

$$E_3 = \lambda\, E_1 + \mu\, E_1 \ .$$

C'est en particulier le cas pour la courbe formée du couple AB, CH, *dès lors tous les termes carrés de cette dernière équation sont aussi de la forme :* $E_3 = (\lambda+\mu)(x^2 - y^2) + (\ldots)$... *Ce qui prouve que ce troisième couple est nécessairement constitué de droites orthogonales... »*

Plus tard, notre petit collégien découvrira des outils qui lui permettront de s'attaquer à des formes beaucoup plus compliquées, comme celles qui sont représentées sur les figures 5a ou 5b et qui mettent en jeu, non plus des droites, mais des courbes. Chemin faisant, il apprendra même les outils élaborés qui servent à *démontrer les évidences les plus criantes*... Il apprendra par exemple à justifier "correctement" le fait que si la hauteur AH de la figure 2b est remplacée par une courbe continue quelconque, celle-ci partage encore nécessairement l'intérieur de ABC en deux domaines distincts (fig. 6a)... Il se cassera même sans doute les dents à trouver (ou simplement comprendre) les trésors d'astuce et de technique topologique permettant de démontrer qu'un autre chemin continu joignant B à un point H' du côté opposé (fig. 6b) rencontre obligatoirement au moins une fois le chemin initial qui relie A à H !

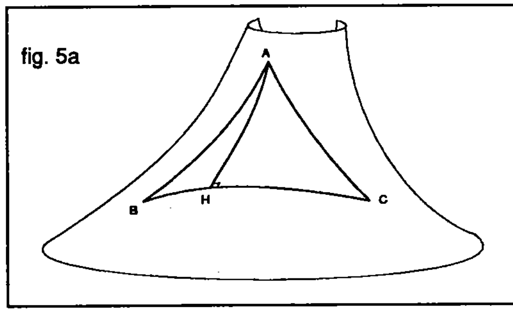


fig. 5a

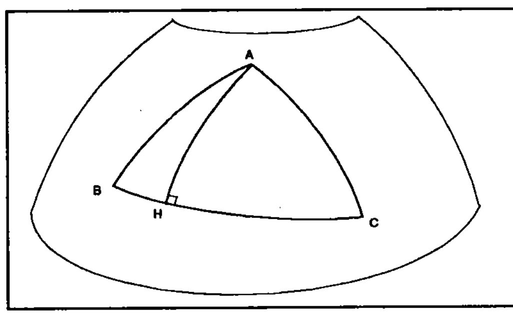


fig. 5b

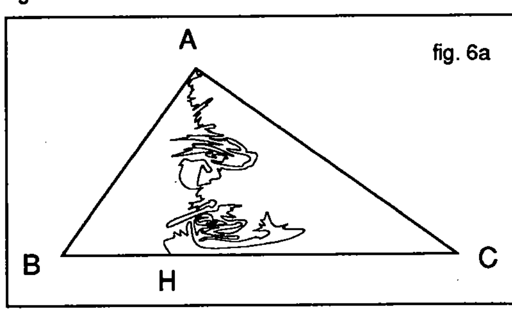


fig. 6a

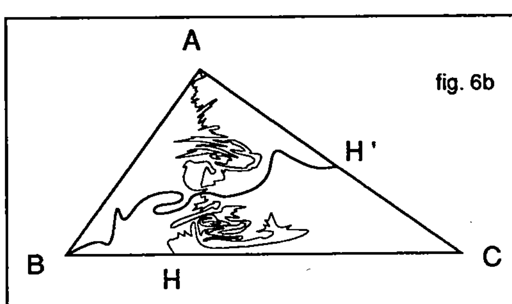


fig. 6b

Encore plus tard, il n'est pas impossible que se close le cycle initié par son exercice d'aujourd'hui, et qu'il apprenne la théorie la plus générale de la mesure des aires... susceptible de justifier dans le contexte formel ces aires des triangles AHB et AHC qu'il calcule de manière si naturelle ! Mais il apprendra sans doute que, contrairement, cette fois aux "évidences les plus criantes", il devient fort possible que le chemin tortueux de la figure 6a sépare le triangle en deux domaines dont les aires propres ne suffisent plus à retrouver celle du triangle total... car *la courbe frontière possède elle-même une aire non nulle* qu'il est alors indispensable de prendre en compte...

Bref. J'étais encore loin à ce moment-là de me douter des déboires que me vaudrait cet exercice et que je vous raconterai dans la deuxième partie... Mon petit collégien m'apporta sa copie. Il trouvait une hauteur AH mesurant 3,1 cm. Sans même regarder sa figure, je lui empruntai sa calculatrice et tapai discrètement comme l'on ferait à une caisse de supermarché pour rentrer son code confidentiel. Je trouvai pour mon compte AH = 2,9047... et des poussières dont je vous fais grâce. Je n'eus alors aucun mal à inspecter sa figure pour détecter ici et là des imprécisions dans la construction. Et je lui conseillai vivement de refaire sa copie ! J'espérais un peu, je l'avoue, qu'il chercherait à savoir comment j'avais bien pu procéder... Il était suffisamment dépité d'avoir à refaire sa copie qu'il ne pensa même pas à poser ce genre de question et je dus lui dire sentencieusement de moi-même que j'avais utilisé un résultat connu depuis bien plus de deux millénaires et que l'on attribuait à Pythagore. J'ajoutai que j'avais fait appel à une autre formule qu'il rencontrerait peut-être vers "Bac+2", sous le nom de "déterminant de Gram", mais qui, elle aussi, était vieille comme les rues : la formule dite de Héron donnant l'aire d'un triangle en fonction de la longueur des côtés et du demi-périmètre :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

Un peu vexé par l'obligation où je l'avais placé de refaire sa figure, il me fit sèchement remarquer qu'à sa connaissance, les Grecs, eux, n'avaient pas besoin de calculatrices ! Je sautai sur l'occasion — car il ne croyait pas si bien dire — pour lui expliquer que les choses

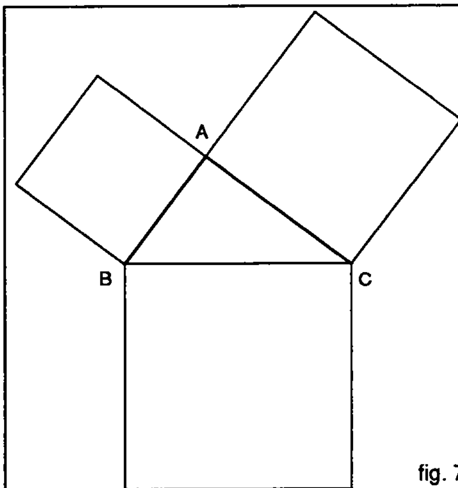


fig. 7a

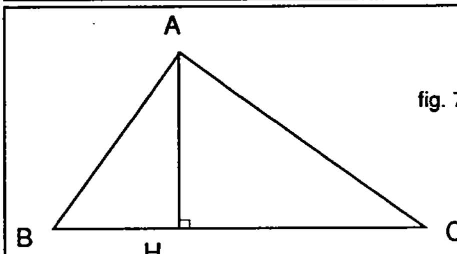


fig. 7b

étaient encore plus compliquées qu'il ne le pensait... En effet, les Grecs, d'une certaine façon, ne disposaient même pas des nombres au sens où nous nous sommes habitués à les utiliser. Pour eux, le théorème de Pythagore n'exprimait guère qu'une égalité de surfaces entre le carré construit sur l'hypoténuse et les carrés construits sur les côtés de l'angle droit (figure 7a). Et il pouvait aussi exprimer une relation simple entre des *rapports* égaux issus de la considération des triangles semblables ABC, HBA et HAC de la figure 7b. Seulement, et faute précisément de disposer d'une notion performante de "nombres", les Grecs avaient le plus grand mal à considérer que ces deux propriétés exprimaient en fait exactement la même chose : d'un côté l'opération de multiplication consistait à passer de deux longueurs à une aire, de l'autre, l'opération de division consistait en la considération de proportions très abstraites...

La formule de Héron est à cet égard une fabuleuse curiosité épistémologique ! D'abord les Anciens la croyaient juste pour les quadrilatères au prix d'une extension bien naturelle :

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}\ ,$$

(ce qui n'est vrai que pour les quadrilatères inscriptibles). Mais surtout il faut bien noter que cette formule exprime le *carré d'une aire*, alors que ce concept n'a aucun sens dans l'optique grecque des opérations traduisant une combinatoire déduite de la figure... C'est en fait là une sorte de préfiguration d'un univers qui ne sera exploré que beaucoup plus tard : l'univers des nombres...

Car une fois ceux-ci dégagés de leur gangue géométrique, on s'apercevra peu à peu qu'ils entretiennent avec les figures des rapports ambigus, mystérieux et fort intéressants : non seulement les figures simples (comme les sections du cône) se ramèneront à des équations qui permettront de retrouver leur propriétés "géométriques", mais, l'habitude étant prise de manipuler cette combinatoire de signes qu'on appelle l'algèbre, on pourra peu à peu aller jusqu'à considérer que les propriétés géométriques de base ne sont que le résultat de la donnée de formes algébriques particulièrement souples à maîtriser. Et puis ce sera comme si l'univers des nombres et l'univers des figures entretenaient des liens de parenté surprenants : les nombres négatifs (d'abord considérés comme des parasites), les nombres imaginaires (d'abord utilisés comme de mystérieux auxiliaires), se révéleront comme intimement liés à la géométrie de position ou à celle des similitudes, etc., etc. Sans oublier que les calculs que j'ai évoqués plus haut comme ceux qui concernent les équations (autour de la figure 4c) sont en réalité beaucoup plus proches des figures qu'il n'y paraît parfois : mon agencement des équations ne consistait en rien d'autre qu'en la considération d'une droite dans une géométrie plus générale (et moins dessinable) qui est celle des coniques elles-mêmes ! Cette espèce de "fatalité" entre combinatoire des signes et figuration des formes ne s'arrêtera même pas là, car on peut dire que les progrès engendrés à partir du XIXème siècle dans l'étude des formes ont donné naissance à leur tour à une forme nouvelle de *calcul*...

D'abord étudiées parce qu'elles permettaient de distinguer les diverses formes possibles de surfaces, les "coupures" (par exemple) ont pris une importance combinatoire inattendue en matière d'études de formes bien plus générales.

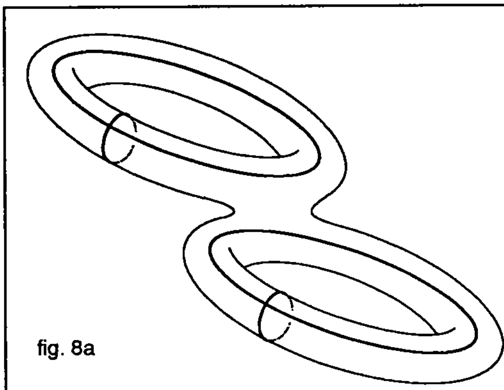


fig. 8a

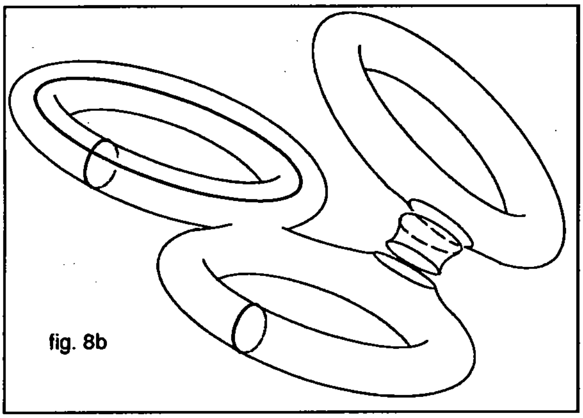


fig. 8b

figures... et, pour conclure, je citai même à mon petit collégien l'exemple suivant : on s'était aperçu au début de ce siècle que la stabilité du système solaire avait peut-être quelque chose à voir avec les propriétés des déformations (pas trop mal fichues) de son triangle (cf. fig 9). Malheureusement, le problème débouchait sur une questioon d'arithmétique particulièrement épineuse à propos de laquelle les gens séchèrent pendant de nombreuses années...

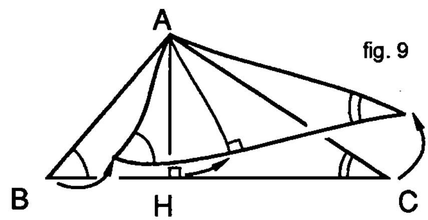


fig. 9

On assista alors, tout au long du XXème siècle à la montée en puissance d'une nouvelle algèbre (dite homologique) qui prit en compte les multiples propriétés de combinaisons entre formes simples afin de mesurer la complexité des formes plus sophistiquées... Mais ici encore cette ambivalence entre calculs abstraits qui peuvent à certains moments donner le sentiment que l'origine géométrique des problèmes peut se fondre entièrement dans l'abstraction des schémas les plus formels, ne doit pas faire oublier que nombre de techniques et d'outils d'analyse se rapportent au plus près de la considération des figures, comme c'est le cas pour ce que l'on appelle les chirurgies, qui mettent en jeu les constructions les plus concrètes... Dès lors, si l'on devait faire la part des choses entre figures et calculs, on s'apercevrait bien vite, à tous les niveaux de cette ambiguïté mystérieuse : *toujours le calcul rejoint la figure et bien rares sont les exemples où il serait possible de se passer de l'un ou de l'autre*. L'histoire est en définitive jalonnée de rencontres inattendues entre nombres et

Evidemment, je l'avais un peu inquiété en parlant de la stabilité du système solaire : il fallut le rassurer. Je lui confiai qu'un mathématicien venait récemment de gagner une belle médaille en résolvant le problème... et qu'il l'avait précisément résolu en réussissant à agencer de façon géométrique les difficultés arithmétiques... J'ajoutai que je devais rencontrer ce mathématicien à un colloque à Bayonne, en juin, que je lui demanderais comment il avait fait et que je lui raconterais la solution en rentrant.

Je lui rendis sa calculatrice, je lui prêtai mon compas de précision — avec tige filetée et molette pour maintenir fermement les deux branches —, il refit son dessin... Il trouvait 2,9053 cm. Ce n'était pas trop mal. Je lui conseillai d'arrondir à 2,9. Et il rendit son devoir le lendemain matin...

*

* *

Jusqu'ici tout allait plutôt bien. J'en étais arrivé au point d'être convaincu que, comme dirait Thom :

> *« la géométrie euclidienne classique peut être considérée comme une magie ; au prix d'une distorsion minime des apparences (le point sans étendue, la droite sans épaisseur,...) le langage purement formel de la géométrie décrit adéquatement la réalité spatiale. En ce sens on pourrait dire que la géométrie est une magie qui réussit».*

On pouvait même ajouter qu'elle réussit dans la mesure où ses propriétés les plus élémentaires s'agencent de façon "magique" pour déboucher sur des combinatoires qui ressemblent à s'y méprendre aux calculs qu'il est si simple d'effectuer sur les nombres naturels. Et même qu'elle réussit si bien que ces "calculs" font apparaître des propriétés, des parentés ou des analogies "structurales" insoupçonnées à l'avance...

Mais c'était un peu comme lorsque l'on vient de résoudre un problème et que, sans parvenir à en trouver la véritable raison, on se trouve taraudé par le sentiment désagréable d'avoir laissé quelque chose de côté : le sentiment, en quelque sorte, d'avoir "oublié un cas de figure"...

Je songeai tout d'abord à ces figures qui m'avaient surpris quand j'étais étudiant (qui eurent droit de cité jusqu'au début du XXème siècle) et qui ne faisaient que prolonger la tradition des géomètres du XVIIème, autour de la notion "d'indivisibles" et "d'infiniment petits". Vous les avez sans doute déjà rencontrées vous aussi. Il s'agit, par exemple, de l'idée qui consiste à considérer un courbe comme un polygone à une infinité de côtés qui seraient infiniment petits : la tangente à la courbe en un point n'est alors rien d'autre que le prolongement d'un tel côté infinitésimal (cf fig 10a) et on voit (pour le cas du cercle) que le triangle infinitésimal dispose alors d'une curieuse propriété : il est isocèle et il nous faut considérer que ses deux angles à la base sont des angles droits !

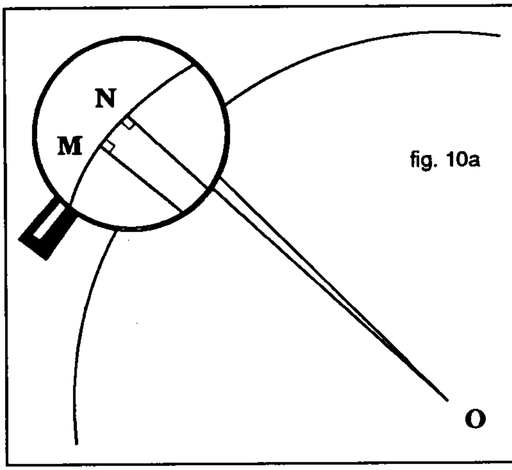


fig. 10a

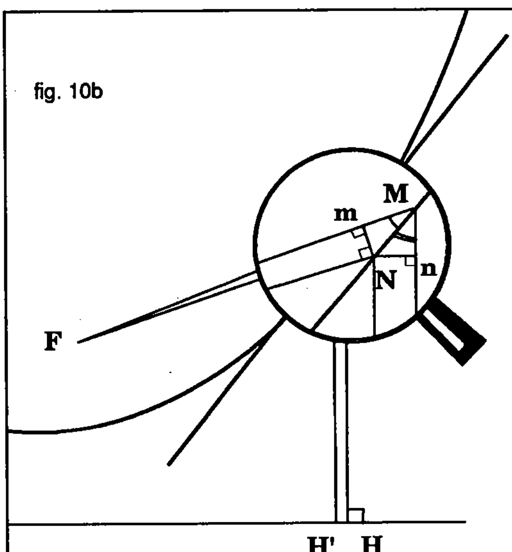


fig. 10b

Mais utilisons alors de tels triangles "exotiques" pour étudier la tangente à la parabole, c'est-à-dire à la courbe définie comme ensemble des points équidistants d'un point F et d'une droite D (cf fig 10b)... Cette courbe est, elle aussi, à considérer comme un polygone aux côtés infiniment petits ; regardons deux extrémités adjacentes M et M' d'un tel côté : le cercle de centre F passant par M coupera FM' de manière à former un "côté" infinitésimal qui possède la propriété de la figure précédente. Donc le triangle FMN est isocèle et ses deux angles à la base sont droits... Il ne reste plus qu'à remarquer que le triangle rectangle M'MN se retrouve exactement en M'MP pour conclure à l'égalité des angles et au fait que la tangente MM' est bissectrice de l'angle FMH !

On pourrait multiplier les exemples de ce genre... mais rappelons que ces figures sont généralement réservées aux physiciens... Un autre exemple plus récent est particulièrement diabolique. Il rappelle (ou prolonge ?) les paradoxes de Zenon et touche à la notion de pavages...

Considérons pour commencer un gentil pavage du plan par des carreaux réguliers (fig 11a) et imaginons que nous décidions de le modifier parce que nous ne disposons pas de carrés mais seulement de demi-carrés. Le paveur pourra alors retrouver le même dessin en accolant deux à deux ses demi-carrés, mais il pourra très bien se moquer complétement de la façon dont il adjoindra les deux moitiés dans chacune des alvéoles. Mettons qu'il soit un peu arithméticien et qu'il s'amuse à choisir selon un code simple (0 = "vers la droite" ; 1 = "vers la gauche"),, parmi les deux orientations dont il dispose à chaque fois, de manière à retranscrire les décimales de π (en base deux...) sur la première ligne, puis celles de π^2 sur la deuxième, etc. Comme vous vous en doutez, il obtiendra ainsi un pavage qui n'a plus aucune chance d'être périodique !

fig. 11a

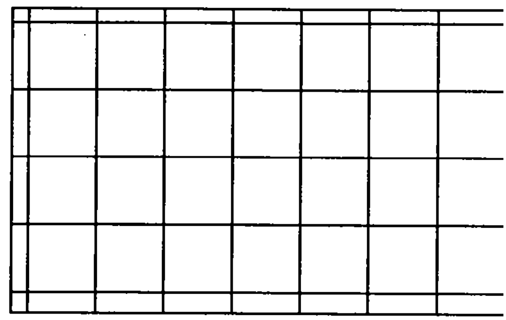
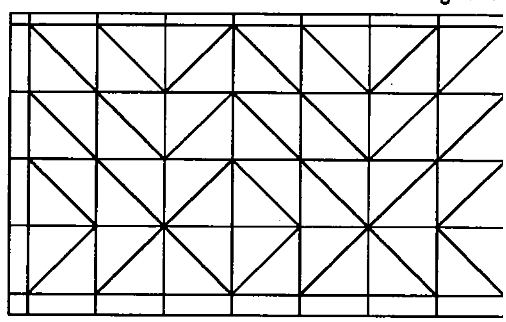
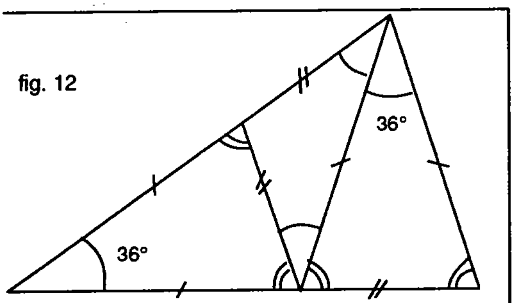


fig. 11b



Bien, mais supposons maintenant que vous ayez fait de même de votre côté et que vous ayez procédé avec le nombre *e* ... Ces deux pavages ne sont pas les mêmes mais il se passe un phénomène un peu surprenant : vous ne pourrez évidemment en dessiner qu'une partie finie, eh bien il se trouve nécessairement que cette partie finie qui, pour vous, représente *votre* pavage a toutes les chances de se trouver aussi à un certain endroit dans le pavage de votre concurrent ! cela provient du fait que, jusqu'à preuve du contraire la suite des décimales de π est "uniformément" aléatoire et contient donc presque sûrement quelque part n'importe qu'elle séquence choisie à l'avance... Vous me direz sans doute que ceci n'est qu'à moitié convaincant et vous n'aurez sûrement pas tort, mais je n'ai choisi cet exemple que pour vous mettre l'eau à la bouche ! Certains sophistes des temps modernes ont précisément mis au point des exemples un peu plus compliqués qui possèdent véritablement de telles propriétés ! Ceux-ci reposent sur des propriétés du pentagone régulier et du nombre d'or qu'il est facile de retrouver à partir de la figure 12, qui traduit un phénomène propre un triangle isocèle dont l'angle au sommet vaut $\pi/5$.

fig. 12



(voir ensuite l'encadré des deux pages suivantes)

Je méditais sur toutes ces utilisations de la figure à propos de l'infini (qu'il s'agisse de "l'infiniment petit" ou de "l'infiniment grand") ; sur ces figures si "magiques" que l'on ne sait pas vraiment en expliquer la portée ou, à l'inverse, sur ces figures impuissantes à représenter toutes nos "images mentales" et qui intéressent tant les mathématiciens d'aujourd'hui... peut-être d'ailleurs, tout simplement, parce qu'ils ont découvert que les questions les plus abstraites de l'analyse finissaient par déboucher sur des dessins !

Je méditais donc sur toutes ces questions, lorsque je fus brutalement rattrapé par la réalité, c'est-à-dire par mon petit collégien et par son professeur. Le fameux exercice dont je vous ai parlé venait d'être corrigé et j'allais enfin connaître la note de mon protégé...

Considérons (cf. fig. 13a de la page suivante) un secteur de 36° et poursuivons la construction de la figure 12 en répétant les triangles isocèles...

Il est facile de voir que l'on obtient ainsi une suite de triangles isocèles semblables à l'un ou l'autre des deux premiers (triangle grisé et triangle blanc). Par des rotations et une récurrence évidentes, ces triangles — de plus en plus grands — peuvent être eux-mêmes redécoupés de façon identique à celle des sections initiales auxquelles ils sont égaux. On obtient ainsi un pavage complet (et irrégulier) du secteur de départ par des facettes qui sont de l'un ou l'autre des deux types gris ou blanc (cf. fig. 13b page suivante).

Comment obtenir — à partir de cette idée — un pavage de *tout le plan* par des facettes de cette sorte ? Une méthode simple consisterait à utiliser 10 secteurs tels que celui de la figure 13a et à les juxtaposer autour de leur sommet commun... Mais le pavage obtenu serait muni d'une symétrie d'ordre 10 autour de ce point.

Pour aboutir à un pavage *sans aucune symétrie*, un carreleur compétent commencerait par acheter des plaques "toutes faites" de toutes les tailles, comme celles qui sont représentées sur la figure 13c. Ensuite, il poserait sur le sol un triangle simple gris (triangle 1 de la figure 13d) et lui accolerait une plaque (n°2 sur la figure 13d) de façon à ce que la réunion de ces deux plaques (n°1 et n°2) réalise un triangle semblable au triangle isocèle "pointu"... En continuant la construction comme il est indiqué sur la figure 13d, il est alors possible de paver tout le plan "en spirale" et, si vous poursuivez un peu le schéma, vous vous rendrez compte que tout se passe comme si le secteur entier de la figure 13a tournait indéfiniment autour de la facette n°1 et comme si ce mouvement lui permettait (à lui seul) de recouvrir progressivement tous les points du plan...

Mais supposons maintenant qu'un autre carreleur décide de réaliser un *pavage différent* du précédent. Il s'y prendra de la même manière, mais décidera, de temps en temps, de "ralentir" sa spirale en cherchant à obtenir un triangle intermédiaire sur lequel il pourra poursuivre ensuite ses constructions (cf. fig. 13e : au lieu de passer de 2 à 3 comme précédemment, on place le n°3 et on place ensuite le n°4). Le deuxième carreleur devra donc décider d'une "loi" infinie gouvernant ses "temporisations" et il obtiendra une spirale différente du premier. Les pavages obtenus sont-ils vraiment différents ? La réponse est oui, car on ne pourra jamais définir un isomorphisme entre les deux si les "lois" sont vraiment différentes.

Mais les deux carreleurs ne s'en apercevront jamais, car à chaque instant de la construction les pavages inachevés sont identiques à une section commençante du secteur initial de la figure 13a !

fig. 13a

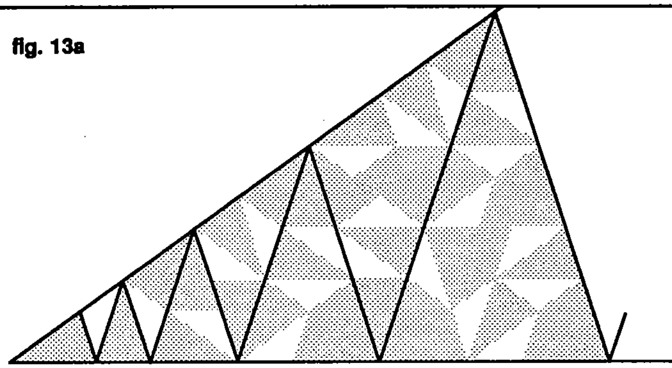


fig. 13b

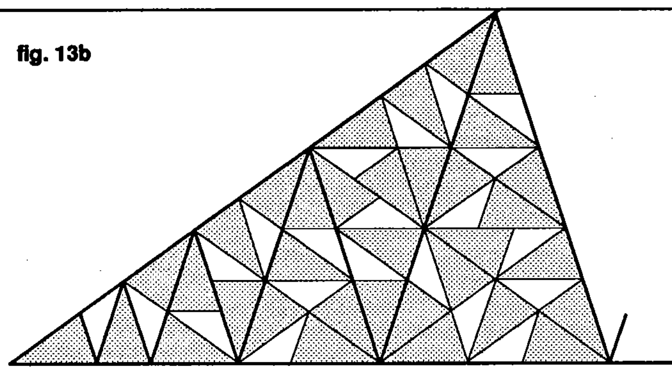
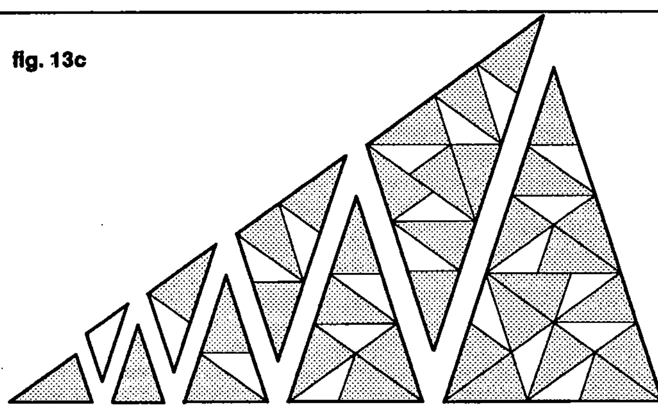


fig. 13c



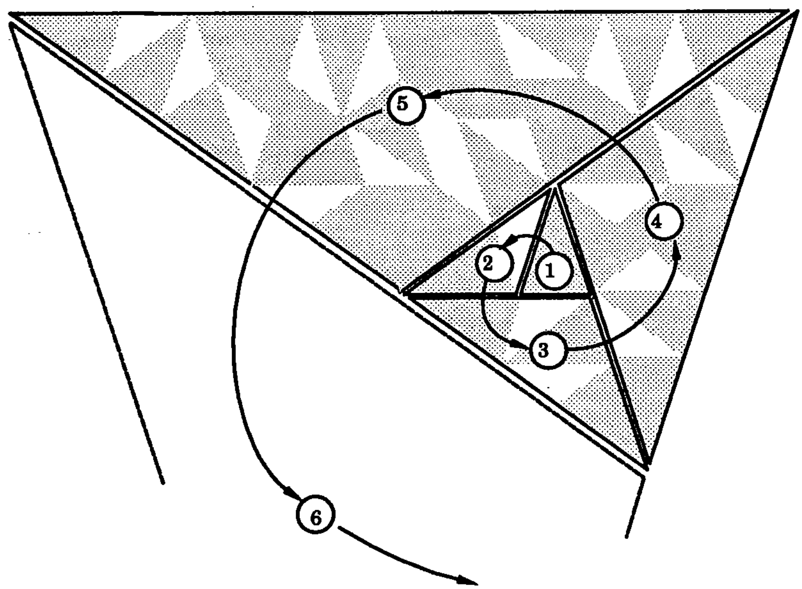


fig. 13d

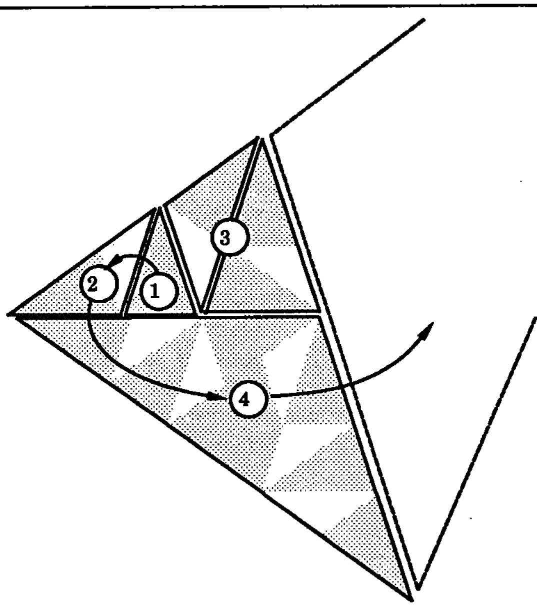


fig. 13e

Et inutile, je pense, de faire durer votre attente : j'étais nul, ou quasiment ! "Nous" n'avions obtenu que trois sur cinq...

D'ailleurs l'état nerveux du collégien ne me permit même pas de connaître tout de suite les raisons exactes de cette catastrophe...

« Etait-ce parce que ses figures n'avaient pas été réalisées avec assez de soin ? » : non.

« Etait-ce parce qu'il aurait fallu arrondir différemment les mesures des segments BH et HC qui formaient la base du triangle et pour lesquelles il fallait choisir une décimale ? » : non !

« Etait-ce parce que je lui avais laissé mettre que AH était égal à 2,9 plutôt qu'à la valeur moins arrondie 2,905 ? » : Non !

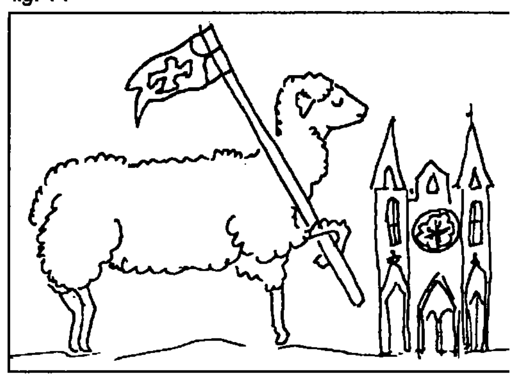
Et ce n'est qu'après beaucoup de patience et une relation minutieuse de ce que le professeur avait donné comme justifications que j'ai fini par apprendre la vérité... : il fallait mettre AH = 3 car celui-ci avait réalisé la figure pour son compte...

... et *qu'il avait trouvé* 3 cm...

Evidemment, j'aurais dû le prévoir : j'étais désespérément nul. J'eus beau essayer de faire remarquer à mon petit collégien qu'en définitive, en mettant 2,9 au lieu de 3 nous n'étions pas tombés si loin que cela du bon résultat, il ne se gêna pas pour me rétorquer — sur le ton acerbe que seule la jeunesse permet de ne pas confondre avec de l'insolence pure et simple — qu'après tout, lui, il avait commencé par dire que AH était égal à 3,1 cm et que le résultat aurait été le même... Il ne me restait plus qu'une seule issue. J'annonçai donc sur un ton magistral : « ...tout cela, n'est qu'une question de *modèle* : tout a commencé le 1er janvier 1400...

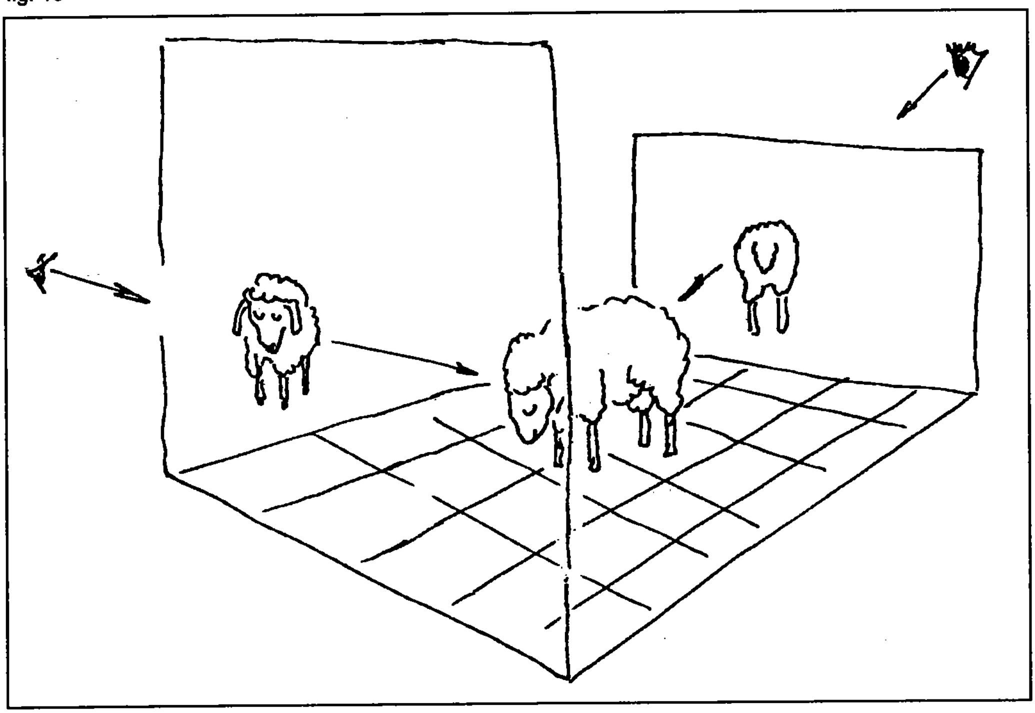
C'est-à-dire que jusqu'au 31 décembre 1399 les artistes qui concevaient les vitraux de nos cathédrales ou les fresques de nos églises ne représentaient guère le monde comme nous avons pris l'habitude de le voir aujourd'hui. Ils trouvaient par exemple tout à fait naturel de représenter l'agneau pascal beaucoup plus grand que les œuvres humaines qui l'entouraient, car sa "taille" sacrée était indiscutable comparée à tout ce qui pouvait exister sur terre !

fig. 14



Mais, le premier janvier 1400, estimant que cela faisait un peu désordre, les peintres italiens s'intéressèrent au problème. Ils mirent un mouton en pleine nature (cf. fig. 15) et l'observèrent sous toutes les coutures... Ils découvrirent ainsi les *règles de la perspective* et leurs œuvres prirent peu à peu l'allure des tableaux "réalistes" que l'on connaît aujourd'hui... Chemin faisant, les peintres ne se contentèrent d'ailleurs pas de considérer ce qu'ils voyaient sur la "fenêtre" constituée par le tableau, ils cherchèrent aussi à comprendre *ce que les autres voyaient* à partir de leur propre "fenêtre"...

C'est de cette façon qu'ils furent confrontés à de difficiles problèmes de géométrie... et ce n'est que le 1er janvier 1600 que ces problèmes furent véritablement résolus : la géométrie du monde se mettait à ressembler à la fig. 15



géométrie des anciens Grecs ! Cela tombait d'ailleurs particulièrement bien pour démarrer le XVIIème siècle car les planètes s'accordèrent aussi pour suivre des trajectoires qui ressemblaient à s'y méprendre aux sections coniques d'Euclide, Archimède et Apollonius. Même la chute des corps se fit un malin plaisir d'obéir à une règle des vitesses qui était déjà contenue dans les propriétés de la parabole... Et c'est ainsi que jusqu'au milieu du XIXème siècle on crut que l'univers tout entier obéissait aux règles de la géométrie. Ce qui permit au passage aux physiciens et mathématiciens de résoudre des tas de problèmes compliqués et même de s'amuser à inventer des géométries différentes qui auraient très bien pu s'appliquer à d'autres univers.

Tout cela marchait plutôt bien jusqu'au jour où quelqu'un se mit à considérer de nouveau notre figure 15 et dit « Attention ! tout cela marche plutôt bien, seulement vous avez oublié de tenir compte de la vitesse de la lumière... » Et il ne disait pas cela à la légère : il parlait de "La" vitesse de la lumière ! Car celle-ci ne pose évidemment aucun problème s'il ne s'agit que de renverser le sens des flèches de la figure 15, mais comme nous le savons maintenant, le problème de la vitesse de la lumière vient du fait que cette vitesse *ne change pas*, même si l'objet qui émet cette lumière se déplace dans un sens ou dans l'autre...

Ceci a des conséquences très importantes, notamment en interdisant à tout objet de se déplacer plus vite que la lumière, et il fut très difficile de faire rentrer cette propriété dans le monde géométrique en vigueur jusque là ! Prenons par exemple le cas du mouton de la figure précédente : *premièrement* il n'est pas question d'envisager qu'il se mette à se sauver à une vitesse qui soit celle de la lumière (mais cela n'a sans doute rien de gênant de son point de vue, car on a rarement observé un mouton chercher à dépasser les trois ou quatre kilomètres à l'heure)...*deuxièmement* (et à moins d'être comme le petit prince, seul sur son étoile avec son mouton), plus rien ne marche dès que l'on a affaire à deux observateurs comme sur la figure 15 : cela introduit en effet une contradiction insoluble pour que ces observateurs continuent à recevoir la lumière du mouton à la même vitesse : si l'animal se déplaçait à une vitesse proche de celle de la lumière vers l'un des deux observateurs, que verrait donc l'autre et comment l'addition des vitesses serait-elle respectée ?

La géométrie du monde s'est alors mise à ressembler à une géométrie bien plus compliquée qu'auparavant... Certes les mathématiciens, les physiciens et les géomètres furent bien surpris de tous ces phénomènes nouveaux, car ils n'avaient rien prévu de tout cela, toutefois, comme les géomètres s'en étaient plutôt bien tirés, ils firent comme si leurs connaissances leur avaient permis d'anticiper ces changements... En tout cas ils jurèrent qu'on ne les y prendrait plus et ils inventèrent la notion de "modèle" : dorénavant leurs spéculations n'auraient plus forcément à voir avec le monde tel qu'il est ou même tel qu'il devrait être ; leurs figures et leurs géométries seraient à juger uniquement dans le *monde des formes*... Et libre aux physiciens de se servir de telles ou telles pour "modéliser" l'univers : à eux désormais de se débrouiller pour voir si elles convenaient ou non à leurs problèmes de physiciens ! Mais, vous l'avez compris, il n'était pas question que je rentre dans tous les détails avec mon petit collégien. Je m'efforçai simplement de faire dialectiquement (et soigneusement) la différence entre ce que j'utilisais comme "outils" et ce que j'évoquais comme "objets", je m'appliquai à *changer de cadre* autant que faire se pouvait, *j'institutionnalisai* au moment opportun et je considérai donc que mon élève avait saisi l'essentiel de la relativité restreinte et suffisamment de relativité générale pour comprendre où je voulais en venir...

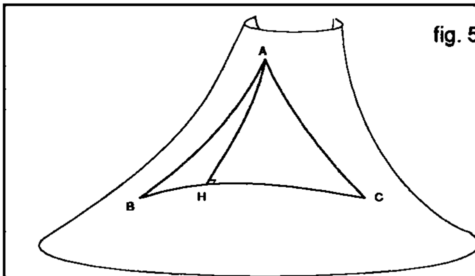


fig. 5a

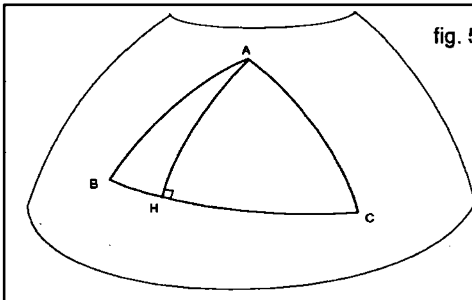


fig. 5b

Car les choses étaient simples : depuis ce jour nul ne pouvait plus prétendre savoir qu'elle était la véritable "forme" du monde. Ainsi, selon qu'on lui affecte une allure qui soit plutôt du genre de celle de la figure 5a ou de celle de la figure 5b, il était clair que la longueur de la hauteur de notre triangle ABC risquait d'être plus grande ou plus petite que prévu...

Donc son professeur avait toute latitude pour choisir le monde dans lequel il faisait travailler ses élèves... et il avait manifestement choisi un monde du type de celui de la figure 5b !! J'achevai de consoler mon petit collégien en lui racontant l'histoire de cet enfant dont je vous ai parlé dans l'introduction et à qui la "noosphère" du conte avait joué un tour aussi pendable (je ne lui ai évidemment pas dit que c'était un personnage inventé ; je lui ai laissé entendre qu'il s'agissait aussi d'un collègue que je rencontrerais bientôt à un colloque...). Tant et si bien que notre collégien fut complétement rasséréné et s'en alla en calculant (je l'espère) la courbure de l'univers utilisé par son professeur... en me laissant le soin de trouver tout seul la morale de cette fable et ce que j'allais bien pouvoir vous raconter dans ma troisième partie...

*

* *

Bien entendu, la morale de cette fable pourrait être tout simplement que le professeur de mon petit collégien s'était trompé et que je n'aurais pas trop cherché à le lui dire... Je vous laisse d'ailleurs choisir pour savoir s'il s'était trompé dans sa construction et ses mesures ou bien s'il avait parfaitement le droit de se situer en géométrie non-euclidienne... (mais notez qu'alors il a oublié que la formule donnant l'aire d'un triangle n'a plus grand chose à voir avec le classique demi-produit de la base par la hauteur) !

La vérité c'est qu'il nous arrive très souvent, à nous autres profs de maths, de faire des erreurs ou de dire des bêtises... et que cela n'a pas une importance capitale sur l'apprentissage de ces chères petites têtes blondes que le ministère nous confie ! Seulement il nous arrive beaucoup plus gravement — et à ce moment-là nous aurions bien besoin d'une *noosphère* imaginaire pour lui faire assumer toutes les responsabilités — il nous arrive, disais-je, que ce soit *tout notre discours* qui devienne quelque peu "surréaliste".

Et, pour tout dire, nous ne serions pas là aujourd'hui à discuter du "rôle de la figure en géométrie" si — il y a une trentaine d'années — notre fameuse "noosphère" (responsable de tout...) ne s'était pas gravement trompée au sujet de la géométrie. Car vous vous en rappelez certainement : les années 70 et la réforme des "maths modernes" n'aboutirent à rien moins qu'à une *répudiation de la figure* dans l'enseignement de la géométrie...

Certains diront sans doute qu'il s'agit là d'un problème de "transposition didactique". C'est malheureusement tout le contraire : c'est une question de malentendu... Il n'y a jamais vraiment eu de problème de la figure dans le monde des géomètres. Ceux-ci n'ont d'ailleurs qu'un seul but qui est de comprendre le mystère des formes et il est clair qu'il leur faudrait être bien masochistes pour considérer que les questions sur les formes peuvent se passer de figures ! Simplement, les questions qui se rattachent à l'étude de ces fameuses formes sont souvent si compliquées et nécessitent de tels détours que le statut accordé aux figures dépend des époques et même parfois des modes.

Prenons quelques exemples...

Lorsque le géomètre croit que des courbes comme les coniques s'étudient en traduisant leur forme par un nombre appelé "excentricité", il finit par se dire que cela n'est rien d'autre qu'un invariant algébrique qui pouvait donc se prévoir algébriquement... Puis quand il se décide à ne chercher la clé de ces problèmes de formes qu'en termes d'invariants, il finit par se rendre compte que ceux-ci ne suffisent pas et se retrouve confronté à de nouvelles formes pour traduire les diverses possibilités...

Lorsque le géomètre s'imagine que les formes étudiées depuis les grecs peuvent se ramener à des équations ou à des fonctions, il finit par se convaincre que tout n'est que formule analytique destinée à exprimer ces équations et ces fonctions mais, se rendant compte des limites de ces formules vis-à-vis de phénomènes "pathologiques", il revient à l'idée de ne plus regarder comme fonction que des correspondances déterminées par leur graphe, c'est-à-dire leur image dans une représentation cartésienne... Autant dire que c'est à l'objet géométrique lui-même de définir les fonctions ! Et tout cela, d'ailleurs, pour s'apercevoir que ces mêmes images l'obligent à caractériser celles qui sont "acceptables" et donc à retomber dans une caractérisation par des *formules* (logiques cette fois) qui l'amènent dans les profondeurs métamathématiques de la théorie des ensembles... ou dans des formes encore plus éthérées relevant des espaces fonctionnels...

Lorsque le géomètre résolut enfin le problème de la mesure des aires les plus compliquées il s'empressa de réfléchir sur le cas des ensembles impossibles... Etc., etc. Et celui qui entreprendrait une histoire de l'importance accordée aux figures s'apercevrait assez vite qu'elle ne relève guère, en définitive, que d'une sorte de psychanalyse dont la tâche consisterait à faire la part entre les rôles du discret et du continu, de la figure et du symbole, du lisse et du singulier et des tas d'autres "dialectiques" auxquelles elles nous confrontent en permanence...

L'erreur essentielle des années 70 et des "maths modernes" aura consisté à ne pas voir que la "vérité changeante" par rapport au statut des figures chez les géomètres n'aurait jamais dû être prise "à la lettre", et surtout pas en matière d'enseignement !

C'est que le fond du problème n'est pas là où on l'a placé en décidant que la clé de tout reposerait au sein de la notion de structure. Cela ne veut pas dire évidemment que la notion de structure ne serait pas importante et ne fournirait pas une des clés possibles offertes aux géomètres, cela signifie tout simplement que l'on ne peut pas commencer à apprendre des clés sans savoir de quel genre de serrure nous parlons ! Or les serrures qui intéressent le géomètre ne sont — quoi qu'on en dise — rien d'autre que celles qui permettent de pénétrer dans le monde des "formes" ! et, à cet égard, le géomètre se comporte souvent comme le "petit prince" du conte, qui demande à l'aviateur naufragé de lui dessiner un mouton... Rappelez-vous : le dessinateur est bien en peine de satisfaire son petit compagnon car aucun des dessins proposés ne trouve grâce à ses yeux, jusqu'à ce que celui-ci insiste pour que son mouton soit dessiné... dans une boîte destinée à le protéger ! Et à la vérité les géomètres se sont toujours révélés bien pire que tous les "petits princes" de tous les contes imaginables : lorsqu'ils ont trouvé une boîte, il passent le plus clair de leur temps à mettre cette boîte dans une autre boîte et à en chercher d'autres qui protègeraient encore mieux leurs "moutons"... Et ainsi de suite depuis la nuit des temps !

Mais ce qui est important c'est que les observateurs extérieurs — et notamment (et peut-être même surtout) les philosophes — *n'ont jamais accès* à ce genre de comportement : lorsqu'ils voient la boîte ils s'attachent à celle-ci en ignorant qu'elle contient un mouton et ne considèrent alors que l'emballage logique (ou algébrique, ou structuraliste,...) en s'imaginant qu'il a un sens. Ils en déduisent le plus souvent que les géomètres ont inventé un "langage universel", c'est-à-dire capable de parler de tout et de rien, et il se disent que ce langage est bon pour la philosophie... Et si, par hasard, ils aperçoivent une partie du mouton, alors ils cherchent les rapports entre celui-ci et la "réalité" et ils se trompent tout autant. Car il n'y a pas non plus de rapports "rationnels" entre les formes des moutons du mathématicien et le monde physique qui nous entoure. Lorsqu'il arrive qu'un "modèle" puisse se révéler satisfaisant c'est, le plus souvent, par une conjonction fortuite, née *d'abord* de *chimères* : nombres pythagoriciens, polyèdres réguliers de Kepler, nœuds de Kelvin, classifications par des structures simples ou semi-simples, fascination pour les invariants discrets, catastrophes, etc., etc. Et, la plupart du temps, tous ces "modèles" — qui sont au début d'une théorie comme une envie de percer quelque nouveau secret du monde — finissent presque par hasard, une fois décantés, affinés et reformulés, par s'agencer dans des "théories qui marchent" d'une façon qui était loin d'être prévue au départ...

Bref le philosophe passe son temps à délaisser la proie pour l'ombre... Mais il arrive aussi que ce soit le mathématicien lui-même qui s'arrête de "faire de la géométrie" pour faire un peu de philosophie et s'interroger sur ce qu'il fait : on dit qu'il réfléchit sur les "fondements"... mais ce n'est qu'une manière de dire que son mouton commence à lui poser des problèmes avec sa boîte, soit que le mouton se trouve un peu à l'étroit, soit que la boîte en question commence à se révéler un peu lassante et démodée...

Seulement, s'il n'est pas vraiment plus avancé que le philosophe, le géomètre est tout juste un petit peu plus malin, car il sait qu'il n'y a pas grande différence entre la boîte et le mouton ! Alors que fait-il ? Eh bien il a généralement deux solutions pour sortir de là : ou bien il s'en sort en ayant trouvé une autre boîte dans laquelle il s'empresse d'enfermer le mouton... en même temps que l'ancienne boîte, ou bien — s'il est un peu trop philosophe... —, il s'invente quelque dialectique nouvelle entre deux genres d'univers : l'un, par exemple, correspondrait au mouton et serait "géométrique", l'autre qui correspondrait à la boîte et serait, par exemple, "algébrique"... A moins que ce ne soit le contraire, puisque cela n'a en fait aucune importance ! Mais le "géomètre-un-peu-trop-philosophe" s'ingénie alors à chercher les liens qui pourraient exister entre ces deux univers...

Et c'est ainsi que l'on voit refleurir régulièrement des subtiles distinctions comme celles qui concernent (par exemple) la "droite géométrique" et la "droite numérique", dans lesquelles il ne serait pas très difficile de retrouver les vielles querelles sur la différence entre proportion et longueur qui devaient agiter les débats des philosophes grecs... Mais c'est précisément de cela qu'il s'agit : succombant à la "tentation du sens", il arrive au géomètre de tomber dans le piège : il fait de la métaphysique !... cela n'a naturellement rien de répréhensible en soi, mais cela empoisonne généralement le problème de la didactique... car les métaphysiciens ont presque toujours tort ! Ils ont tort *épistémologiquement* car ils vont dans le sens contraire de l'histoire. D'abord les mathématiciens n'ont jamais résolu le problème de la "dualité" entre les nombres et les figures (ils ne font que le retourner dans tous les sens et, même si ces querelles ont un intérêt il est bien peu probable qu'elles puissent avoir une incidence évidente sur l'enseignement...), ensuite le problème de la figure est beaucoup plus compliqué qu'il n'y paraît à un regard superficiel : l'histoire ne montre pas du tout que le destin de la figure soit d'être absorbé par les "discours", qu'il s'agisse de celui du "calcul", des "structures" ou de tout autre formalisme, elle montre au contraire que les formes et les figures (même lorsque l'on croit avoir trouvé un moyen de s'en passer pour les raconter) finissent toujours par resurgir au cœur des problèmes de géométrie.

Prenons un exemple parmi d'autres... Considérons un mouton comme celui de la figure 16a... :

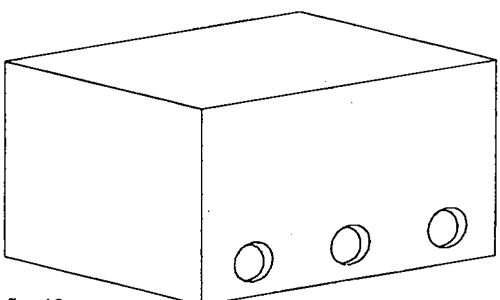
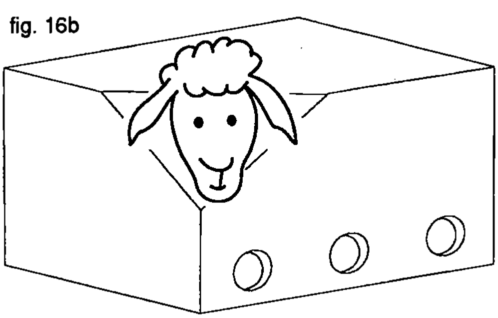


fig. 16a

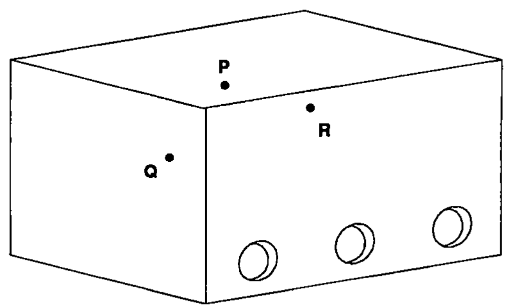
Vous noterez tout d'abord que ce que je viens de dire est parfaitement exact : si vous ouvrez la boîte comme un philosophe, c'est-à-dire comme sur la figure 16b, vous apercevrez parfaitement notre mouton...

fig. 16b



mais vous venez d'ouvrir la boîte comme un métaphysicien, alors même que nous avons affaire ici à un mouton mathématique ! Pour ouvrir la boîte correctement c'est juste un peu plus difficile : il faut (par exemple) décider de réaliser la coupe de façon à ce que l'ouverture passe par trois points que vous aurez choisis à l'avance sur les faces :

fig. 17a



Et c'est seulement à ce moment-là que vous commencerez à percevoir le mouton qu'elle contient... Il vous faudra en effet commencer par choisir un point m arbitraire sur l'arête convenable (cf. fig. 17b), de façon à ce que les droites mP et mR vous fournisse la droite d'intersection du plan mPR avec la face contenant le point Q. Vous disposerez alors (en continuant les tracés dans le plan mPR) du point d'intersection n de la droite PR avec cette même face...

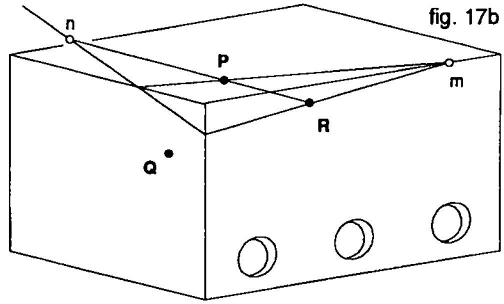
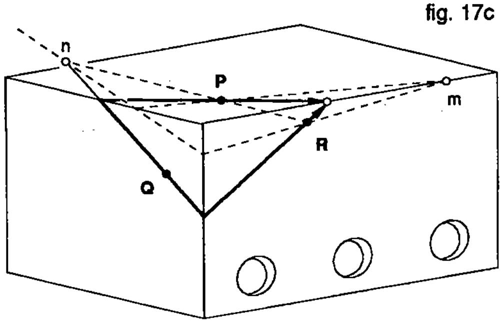


fig. 17b

Alors seulement, il vous suffira de construire (dans l'ordre) : la droite d'intersection nQ entre le plan cherché PQR et la face contenant Q (cf. fig. 17c), puis les deux droites intersection avec les deux autres faces qui contiennent P et R... :

fig. 17c

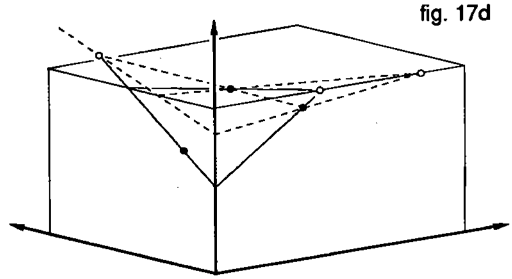


Vous l'avez sans doute compris : le "mouton" qui nous intéresse ici n'est pas vraiment à l'intérieur de notre boîte. Il est en fait à la source même de cette construction et ce n'est que lorsque vous voudrez l'apprivoiser — ou même le "raconter" — qu'il vous faudra bien choisir une "boîte" pour le contenir... Vous choisirez alors certainement, pour vous conformer au cheminement que je viens de vous faire parcourir, de mettre tout cela dans une boîte qui ne sera rien d'autre que la "théorie" des points, des droites et des plans de l'espace... Une boîte qui sera évidemment tissée des propriétés indispensables... ramenées d'ailleurs à quelqu'armature formée par celles qui sont encore plus indispensables... et malheureusement indémontrables et que nous appellerons "axiomes"...

Comment ne pas imaginer que celui qui ne rencontrerait que cette "boîte mathématique" ne voie pas d'emblée le mouton qui s'y trouve enfermé ?

Mais ce n'est pas tout : comme vous le savez, les géomètres disposent aussi d'une autre boîte dans laquelle ils n'ont aucune peine à enfermer ce mouton-là... Il nous suffit de mettre quelques flèches sur certaines arêtes bien choisies de notre emballage initial (cf. fig. 17d) et nous obtiendrons un "repère"...

fig. 17d



Dès lors, le "mouton" se retrouvera enfermé dans une nouvelle "théorie" où il ne sera peut-être plus question que d'équations, de relation linéaires, de systèmes, etc., mais qui sera pratiquement équivalente à la précédente... Que ferons-nous de cette nouvelle boîte ? Pourquoi ne pas l'enfermer elle-même dans une autre pour laquelle nous aurions prévu un axe supplémentaire et que nous appellerions "espace-temps" ? Et pourquoi ne l'enfermerions-nous pas dans une boîte encore un peu différente où l'on n'entendrait plus parler que de vecteurs, d'espaces vectoriels, et qui serait de "dimension n" ? Et pourquoi nous limiterions-nous — pour notre boîte — à des espaces de dimensions finies ?...Ou même à des scalaires qui formeraient un "corps" et pas simplement un "anneau" ?... Et pourquoi "commutatif" alors que l'on pourrait commencer par tout mettre dans une seule boîte dont l'armature serait bâtie à partir d'anneaux quelconques ?...

Est-il besoin de reposer la question de tout à l'heure : « Comment ne pas imaginer que celui qui ne rencontrerait que cette "boîte mathématique" ne voie pas d'emblée le mouton qui s'y trouve enfermé ? »...

Mais revenons plutôt à notre mouton et regardons mieux les figures précédentes. Il s'est en fait produit sous nos yeux un phénomène qui aurait pu susciter la curiosité de notre petit prince : la construction que nous avons effectuée ne dépendait-elle donc pas du choix du point *m* que nous avions choisi au départ ?... Et pourquoi les deux dernières droites que nous avons tracées se coupaient-elles bien sur l'arête contenant *m* ? Evidences ! répondront immédiatement les petits princes qui ont compris le contenu de la boîte qui parle de plans, de droites et de tous les autres éléments de l'espace que nous avons utilisés. Mais si nous nous rappelions que notre mouton — comme toutes les figures que je vous ai présentées jusqu'ici ! — sont, avant toutes choses, contenues dans une "boîte" qui s'appelle tout simplement le "plan du tableau" ou le "plan de la feuille de papier"... ? N'y aurait-il pas là le moyen d'enjoliver quelque peu cette boîte "géométrie plane" à laquelle nous sommes si habitués et — par la même occasion — de la mettre elle-même dans une autre boîte plus satisfaisante ?

(cf. les encadrés intermèdes qui suivent...)

Encadré 2 : passage à la géométrie projective...

Dans la construction précédente, il est clair que les deux droites αP et βR se coupent sur l'arête du cube.

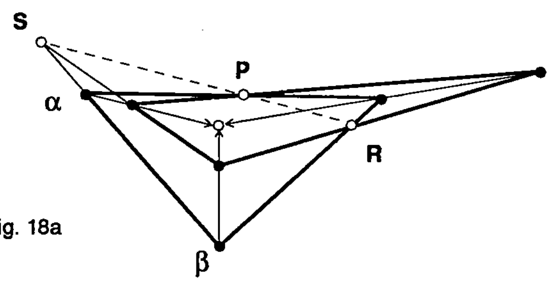


fig. 18a

Cette propriété de "géométrie plane" de la figure 18a est une conséquence du "théorème de Desargues" :

" dans les conditions de la figure 18b *: les points* α, β *et* γ *sont alignés..."*

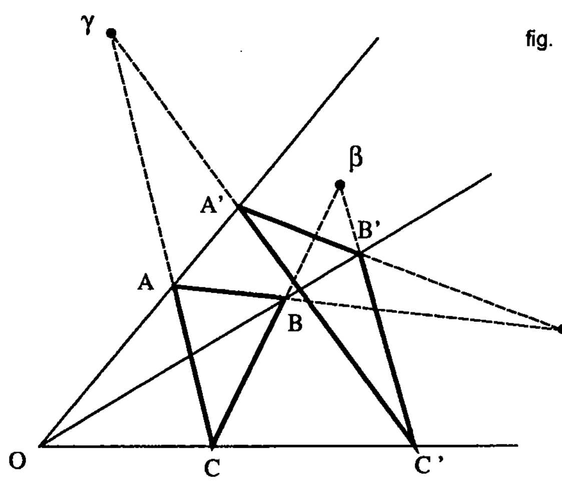


fig. 18b

Ce résultat est en réalité une généralisation de la propriété bien connue des triangles homothétiques dessinés sur le plan horizontal de la figure 18c : si deux couples de côtés sont parallèles, alors il en va de même du troisième couple... Mais, vue en "perspective fuyante" depuis le point Ω, cette configuration donne sur le plan vertical une configuration du type de celle de la figure 18b. Dès lors les trois parallélismes se traduisent par un alignement des trois "points de fuite" sur la "ligne d'horizon" ou, si l'on préfère, sur la "droite de l'infini"...

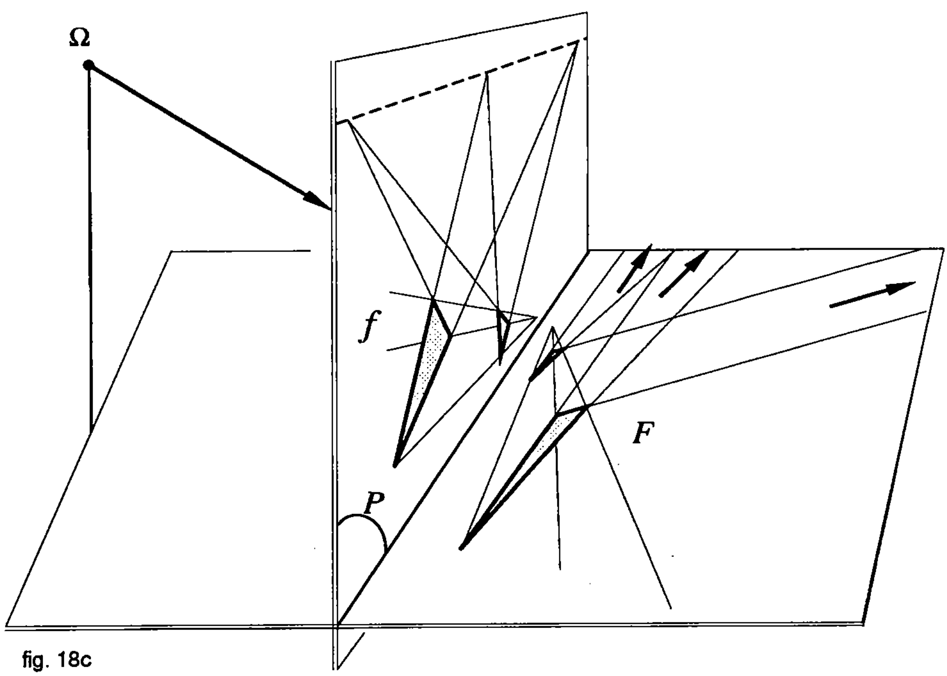
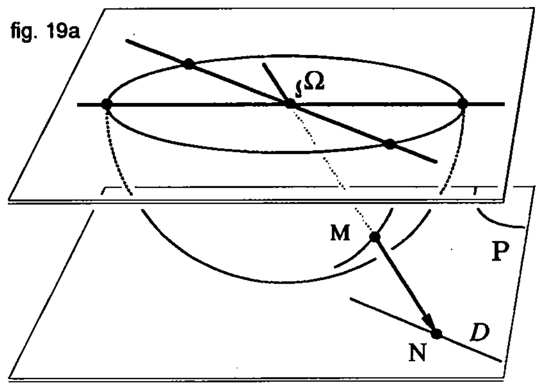


fig. 18c

Cette analogie possible entre concourance et parallélisme conduit à mettre le plan dans une nouvelle "boîte"... C'est-à-dire à rajouter des "points à l'infini" de façon à considérer que la "ligne d'horizon" de la figure 18c "fait désormais partie" du plan et permet de visualiser ce qui se passe "à l'infini".

fig. 19a



On ne considère donc plus seulement le plan (P sur la figure 19a) mais on associe à chacun de ses points N la droite ΩN... Le plan "projectif" est alors défini comme ensemble de toutes les droites passant par Ω, les "points à l'infini" sont les droites parallèles à P...

L'objet ainsi construit est malheureusement difficile à visualiser ! Les points du plan horizontal P de la figure 19a correspondent évidemment aux points de la demi-sphère, mais les parallèles à P ("points à l'infini") ne sont en bijection qu'avec *la moitié* de l'équateur...

Il faut donc recoller tout cela (demi-sphère et demi-équateur) de façon à conserver la continuité naturelle entre les droites passant par Ω... Imaginons la demi-sphère en caoutchouc : il faut souder son bord sur lui-même de façon à identifier chaque point de l'équateur avec le point diamétralement opposé.

Une méthode "en deux temps" est résumée sur les figures 19b et 19c ; elle consiste à séparer la demi- sphère en trois parties A, B, C et à recoller séparément... : A et B se réuniront pour former un "disque" et C se recollera sur lui-même pour former une "bande de Möbius"... Il ne restera plus qu'à recoller le disque bord à bord avec la bande de Möbius...

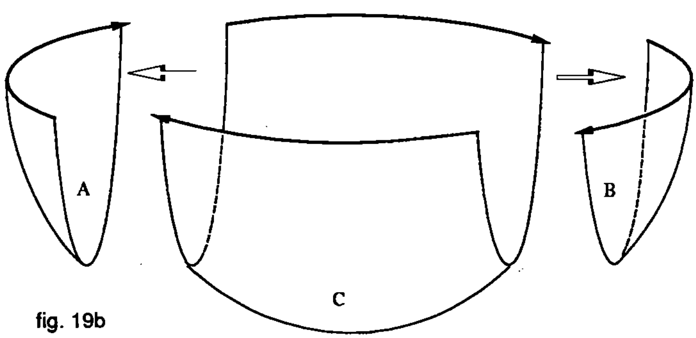
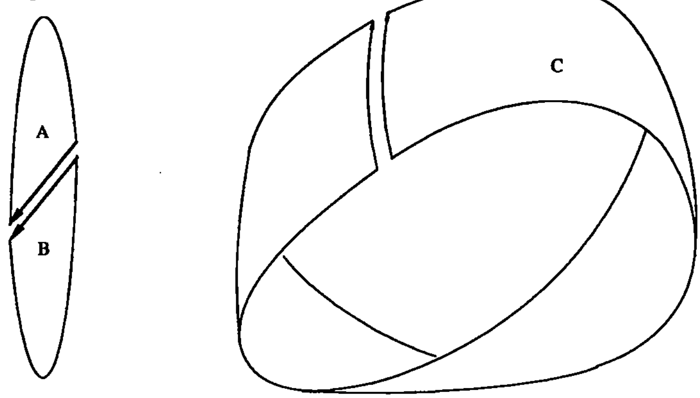


fig. 19b

fig. 19c



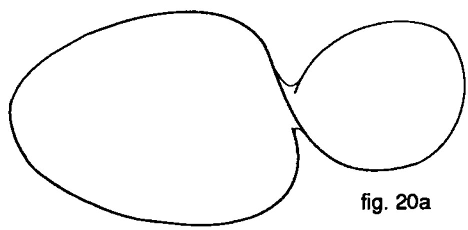


fig. 20a

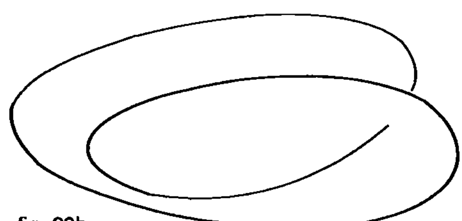


fig. 20b

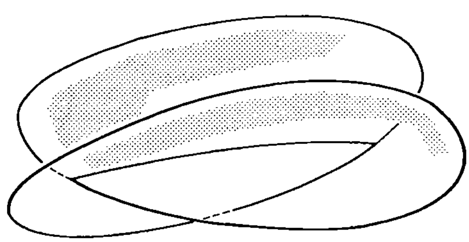


fig. 20c

Imaginons que nous cherchions à recoller, dans la figure 19c, le bord du disque au bord de la bande de Möbius... Il nous faudrait d'abord (figures 20a-b-c) tordre le disque sur lui-même, puis le faire s'interpénétrer, de manière à ce que son bord prenne l'allure de la courbe qui constitue le bord de la bande... Mais on voit dans ces conditions que le recollement ne pourra s'effectuer qu'en créant des points où la surface se brise et n'a plus de plan tangent...

En fait, on démontre qu'il n'est pas possible de "plonger" le plan projectif dans l'espace et que la surface obtenue devra nécessairement se recouper.

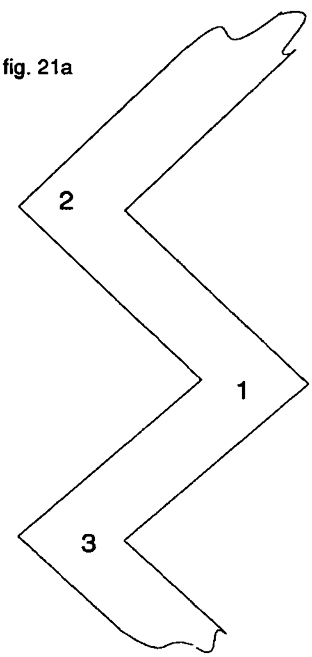
On peut cependant opérer de manière à ce que le résultat soit quand même une surface (qui se recoupe suivant certaines lignes) mais posédant partout un plan tangent : c'est ce que l'on appelle une "immersion"...

Encadré 3 : vers la surface de Boy...

Concrétement nous allons y parvenir en plaçant les auto-intersections, non pas dans le disque, mais dans la bande de Möbius...

Pour cela nous n'obtiendrons pas celle-ci comme sur la figure 19c, mais nous partirons d'une bande un peu déformée, comme sur la figure 21a ci-contre.

fig. 21a



Nous placerons ensuite cette bande (qu'il suffit d'imaginer en papier) de la manière qui est schématisée sur la figure 21b, en nous servant par exemple des axes d'un repère comme guides...

fig. 21b

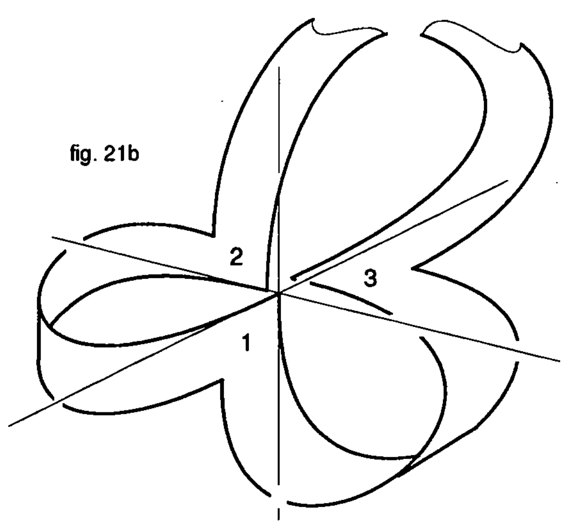
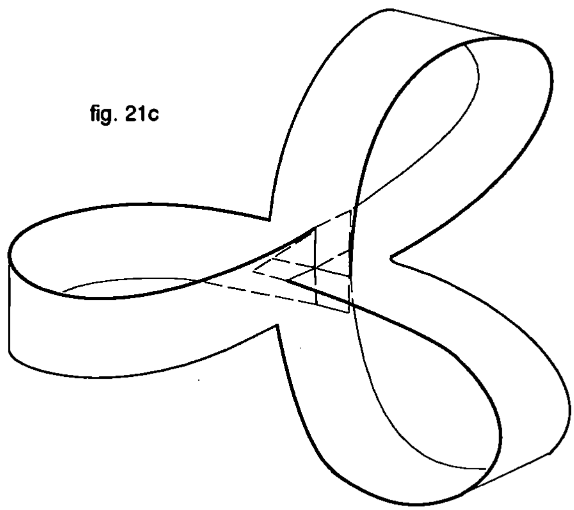


fig. 21c



Ensuite, nous ferons s'interpénétrer les angles à l'origine du repère (figure 21c) : nous aurons obtenu une bande de Möbius qui se recoupe quelque peu...

et nous imaginerons enfin que la bande initiale de la figure 21a est remplacée par celle de la figure 21d...

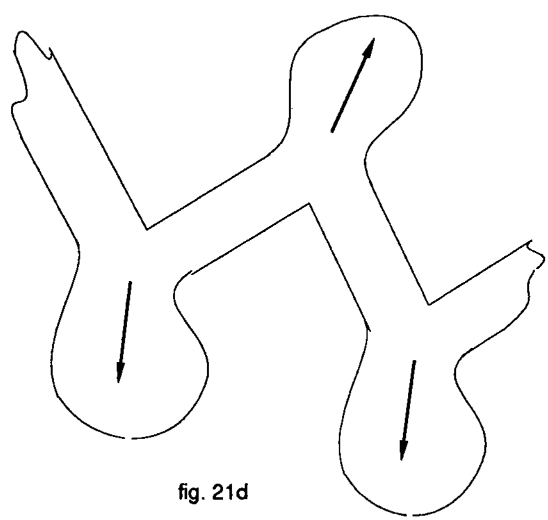
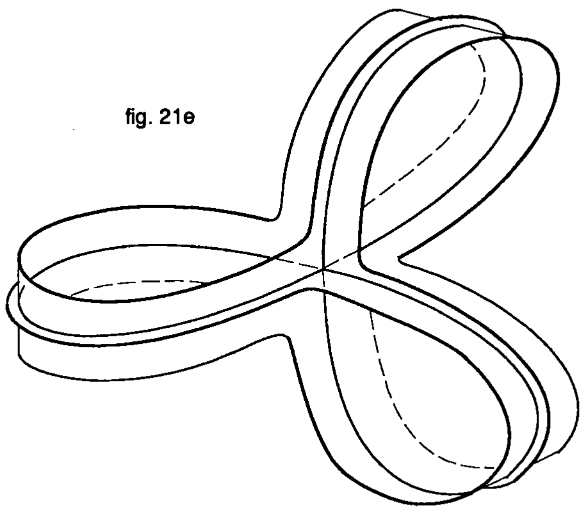


fig. 21d

fig. 21e



C'est-à-dire que les angles s'élargiront en "spatules" qui viendront traverser les boucles de la figure 21c pour donner la figure 21e, dans laquelle la bande de Möbius se recoupe selon trois courbes, mais possède un bord extérieur bien visible.

Il reste à recoller le bord du disque à ce bord selon la méthode des figures 22a-b-c-d...

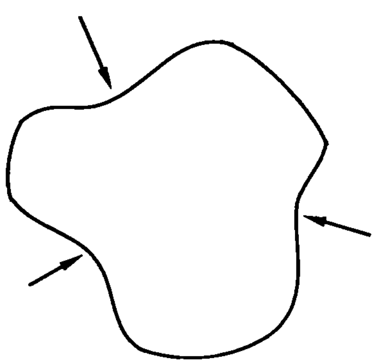


fig. 22a

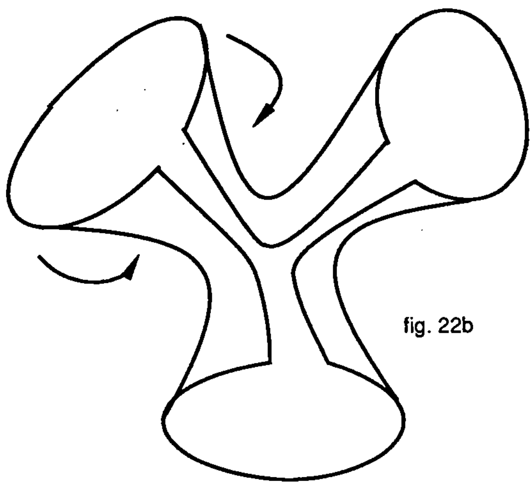


fig. 22b

fig. 22c

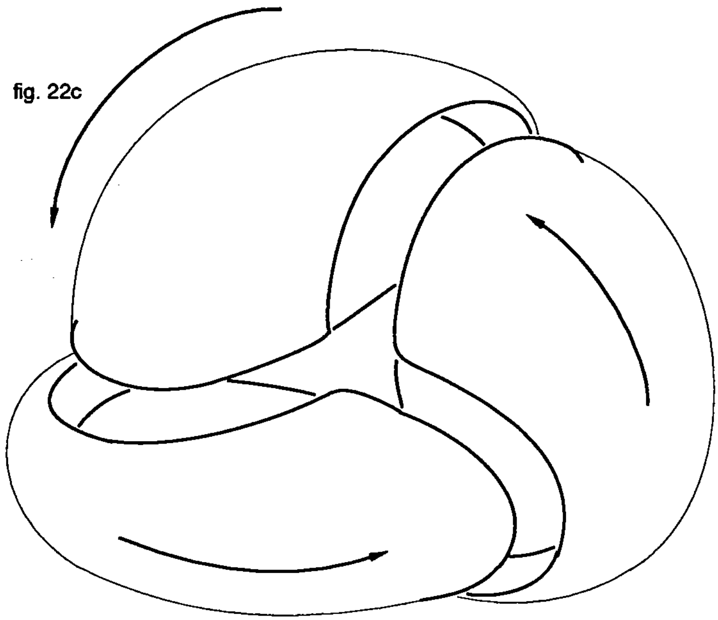
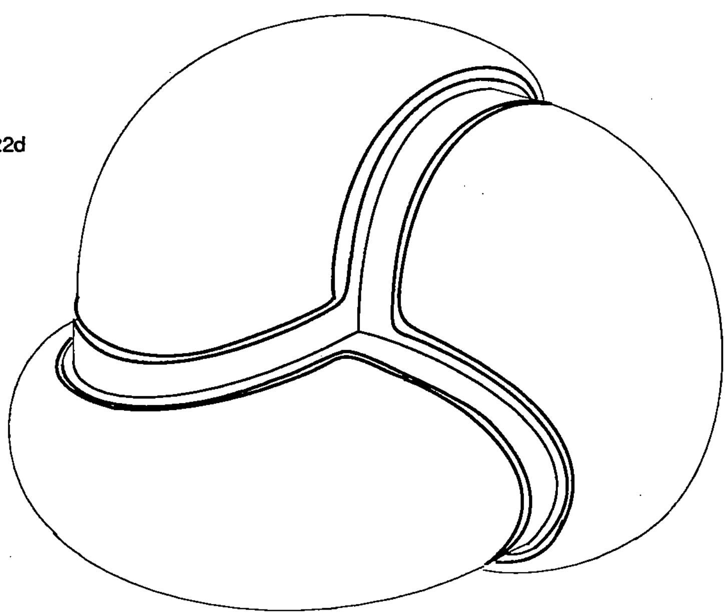
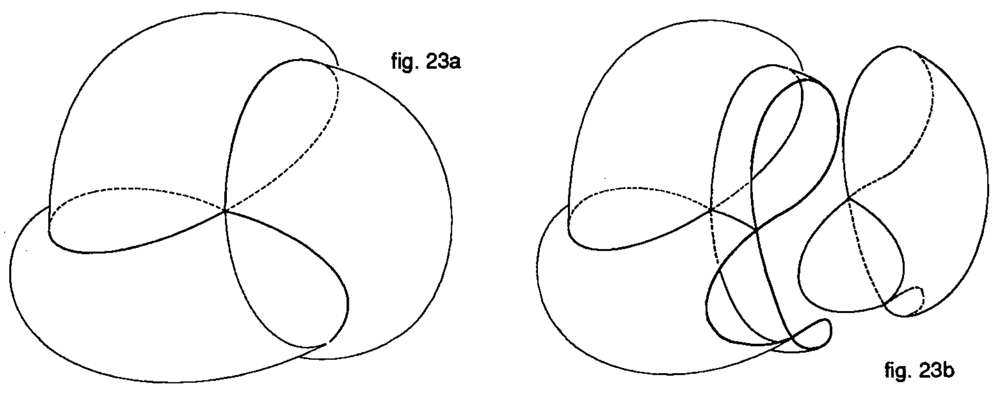


fig. 22d





Cette surface particulière (dite "surface de Boy" et inventée en 1901) est finalement une image assez belle de la nouvelle boîte dans laquelle nous venons d'enfermer la géométrie plane...

Mais si nous nous arrêtions un peu sur cette figure, nous pourrions noter qu'elle est en fait "emblématique" du tournant qui aura marqué la géométrie, notamment depuis le début de ce siècle. Comme je l'ai dit en effet, il ne s'agit d'abord pas d'une représentation parfaite du plan projectif : ce n'en est qu'une "immersion" dans l'espace habituel ! C'est-à-dire que les géomètres se sont peu à peu habitués à manipuler des objets qui, certes, existent bel et bien "quelque part" mais qu'il leur est impossible d'en donner une image permettant de le comprendre à ceux qui n'en sentiraient pas la nécessité ni l'origine... Et il y a pire... Car vous connaissez les géomètres : il ne leur suffit même pas de se dire que leurs objets sont difficiles à représenter ! il leur faut en plus *se prouver* à eux-mêmes qu'il est vraiment impossible de le faire et que ce n'est pas seulement là le signe d'une impuissance passagère, simplement due au fait que la solution leur aurait échappée !

Bref. Cette double obligation de travailler sur des espaces terriblement abstraits et de forger des outils susceptibles de répondre à des questions comme celles que je viens d'évoquer a en fait soustendu une très grande partie de la géométrie du vingtième siècle et aura sans conteste été l'un des moteurs de ce que l'on a appelé les "maths modernes". D'autant plus que les outils mis au point se sont même révélés encore plus performants que ce que l'on osait imaginer au départ et on fait prendre conscience d'une foule d'analogies entre des domaines très variés des mathématiques. Et c'est sans aucun doute dans ce succès qu'il faudrait chercher l'origine de "l'universalité" que les années 70 ont voulu prêter à l'algèbre, au formalisme et au "structuralisme"...

Et pourtant...

Je voudrais, pour terminer, évoquer ici une anecdote qui ressemble un peu à un conte et qui a eu lieu dans les années 60, en pleine période où la "noosphère" (si tant est qu'elle existe...) se persuadait que les figures n'étaient en définitive qu'une entrave au bon apprentissage de la géométrie... Il se trouve en effet qu'un jour un géomètre démontra un théorème qui surprit tout le monde et qui dit, en gros, la chose suivante : « *il est possible de retourner une sphère sans la casser ni la déchirer* ». En traduisant et en utilisant la notion d'immersion que nous avons rencontrée à propos de la surface de Boy, cela signifie que l'on peut trouver une façon de passer d'une sphère à la même sphère "retournée", c'est-à-dire dont l'intérieur serait passé à l'extérieur, tout en restant parmi les *immersions* de celle-ci dans l'espace ! Seulement voilà : ce théorème fut démontré "par le calcul" — ou plus précisément grâce aux outils algébriques que j'évoquais tout à l'heure — et *sans rien voir* de la suite des déformations à opérer pour aboutir au résultat...

Inutile de vous dire que les géomètres se creusèrent ensuite la tête pour imaginer les formes intermédiaires qui pouvaient bien réaliser ce prodige ! Ils séchèrent un certain temps et finirent par comprendre... c'est-à-dire par comprendre la figure...

Je me suis évidemment longuement interrogé, avant cette conférence, pour savoir s'il était bien sage de vous parler de ce problème et d'essayer de vous en expliquer la solution... : allais-je vous le *démontrer* ? allais-je vous le *montrer* ?...

La difficulté est bien sûr que le problème est loin d'être simple ! et j'ai donc longtemps hésité : si je le leur *démontre*, il n'y verront rien... si je leur *montre*, il risquent de vouloir une démonstration... et puis je vais me faire tomber dessus par une foule de "tireurs embusqués" comme il y en a toujours dans toutes les conférences !

fig. 24a : *un retournement qui ne marche pas car la dernière opération passera par une arête de rebroussement...*

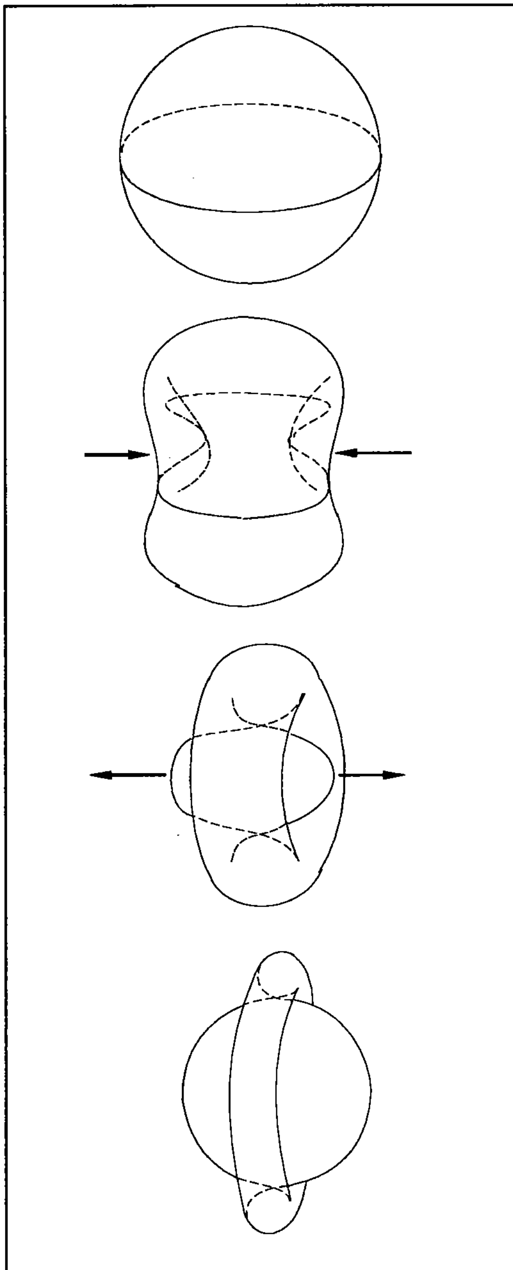
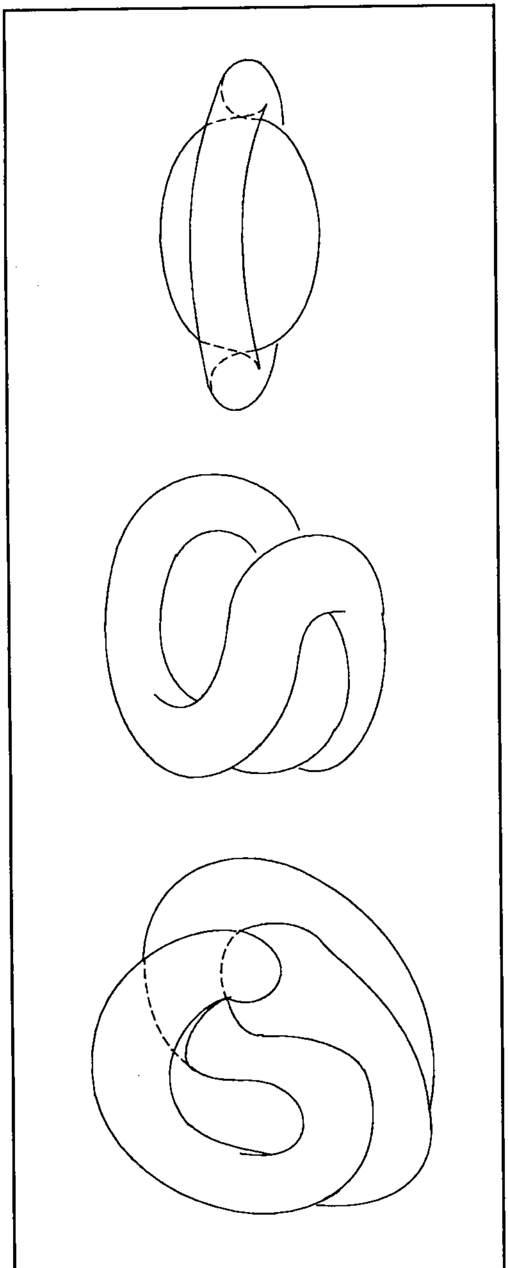


fig. 24b : *un retournement qui finit par aboutir...*



J'entends déjà les puristes qui diront : « Il ne va tout de même pas faire comme si ce n'était pas un problème de π_3 de SO_3 !... »...

Et les didacticiens qui maugréeront : « Mais cela ne va pas ! il est en train de nous faire des "théorèmes en acte" !... »...

Sans compter les pédagogues qui viendront me dire : « Tu n'as rien compris ! tout cela est essentiellement un problème de *dévolution* ! ou bien la *dévolution* est réussie et tes auditeurs peuvent trouver tous seuls ; ou bien elle est ratée et de toute façon... »...

J'en étais donc presque arrivé à me dire qu'il ne me restait plus qu'à *dévoloir* correctement et que cela suffirait !

"Dévoloir" ?...

A moins que ce ne soit "dévoluer"... ?... ou "dévolutionner" ?... Jusqu'au moment où je me suis rendu compte que les pédagogues n'avaient, en fin de compte, pas jugé utile d'inventer un quelconque verbe *d'action* pour l'adjoindre à ce qui serait censé être le résultat d'une *action*...

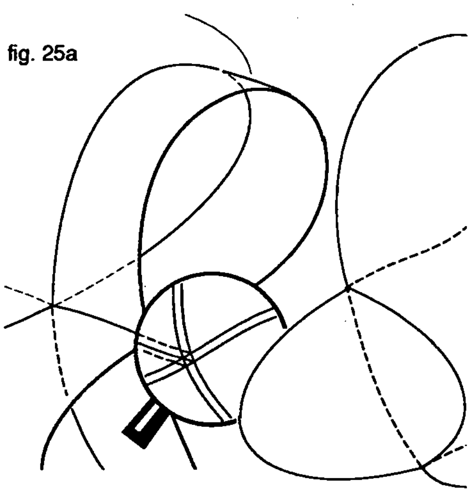
Tiens, tiens...

Enfin, j'en étais là de mes réflexions et j'étais prêt à renoncer sur la question faute de savoir s'il me fallait *montrer* ou *démontrer*, lorsque je me rappelai qu'après tout « faire ou défaire c'est toujours travailler ! ». Je me dis alors subitement que je n'allais ni vous *montrer* ni vous *dé-montrer* quoi que ce soit...

Mais qu'il me suffisait simplement de vous le « *dé-démontrer* » !...

D'ailleurs vous l'avez sans doute remarqué : toutes les figures que j'ai faites ne sont au fond que des *dé-démonstrations*... Mais à vrai dire il y a plus : c'est que, véritablement, la première méthode qui a été trouvée pour commencer à "voir" le retournement de la sphère ne fut rien d'autre qu'une dé-démonstration au sens où celui qui a mis la construction au point le premier n'a fait que suivre tant bien que mal la preuve initiale presque purement algébrique ! Son idée fut de considérer la surface de Boy de notre figure 23, mais d'imaginer d'abord que la surface représentée avait une *épaisseur*... Bien sûr, après tout ce que je vous ai dit auparavant sur les points, les lignes et les surfaces idéales, *sans épaisseur*, vous allez trouver que je cultive quelque peu le paradoxe !

fig. 25a

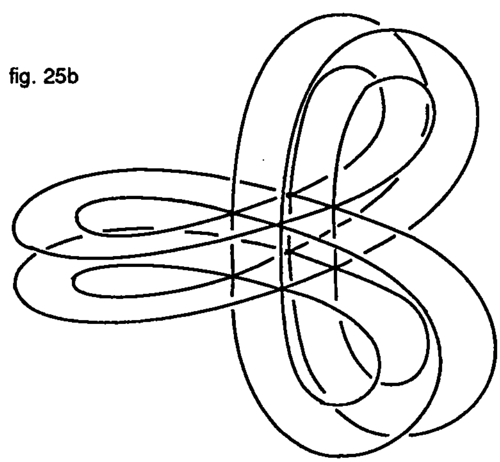


Il n'en reste pas moins qu'il est très intéressant (comme sur la figure 25a) de considérer que la surface de Boy est suffisamment *épaisse* pour que nous puissions la dédoubler et, en ne regardant que les deux *faces* de notre objet épaissi, obtenir une nouvelle surface qui soit en fait le "double" de la surface de Boy...

Mais ne vous méprenez surtout pas : nous n'obtenons pas deux surfaces mais *une seule*, car le plan projectif est ainsi fait (à cause de sa bande de Möbius...) que ce que nous venons de trouver n'est rien d'autre que *la sphère*, repliée sur elle-même de manière à recouvrir deux fois le plan projectif !...

Cela étant, observez par exemple les lignes suivant lesquelles la surface de Boy se recoupait elle-même :

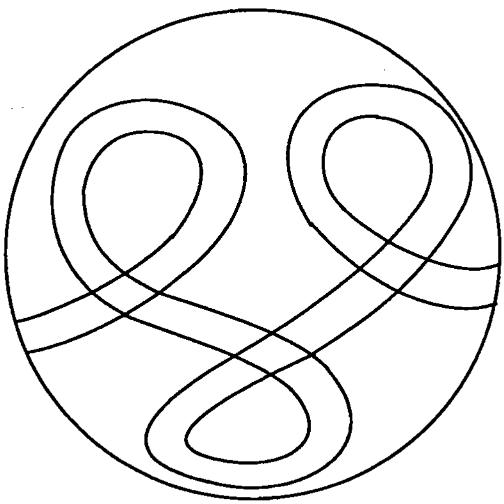
fig. 25b



elles sont évidemment dédoublées elles aussi et ressemblent au schéma de la figure 25b... (Notez que l'on obtient au centre une configuration que les didacticiens appelleront bientôt un "mouton équilatère"... et qui est plus connue sous le nom vulgaire de "cube"... mais il est clair qu'ici ce n'est pas ce qui est *dans la boîte* qui est joli à regarder, mais ce qui est *autour*...)

En "déployant" la figure obtenue (avec ses multiples lignes et les morceaux de surface qui s'appuient sur celles-ci) on peut alors retrouver sur la sphère d'origine (figure 25c) la manière dont il conviendrait de placer les différents morceaux pour obtenir une immersion qui prenne l'allure de celle de la figure 25a...

fig. 25c



L'idée est maintenant à la fois très simple et très compliquée. Il nous "suffit" :

— 1) d'amener la sphère sur la figure 25a en n'utilisant que des déformations parmi les immersions,

— 2) une fois dans cette position, de faire *se traverser* les deux feuillets, face à face, au travers de la surface de Boy,

— 3) de *redémonter* la figure obtenue par le chemin inverse de celui du 1)...

Inutile de vous dire que cela est très difficile à visualiser... et c'est pourtant, en suivant les étapes sur la figure 25c et en n'utilisant (presque) que des déformations du type de celles que je vous ai dessinées sur les figures 24a et 24b, que l'on s'est tout d'abord contenté de "voir" ce que pouvait mettre en jeu le fameux théorème sur le retournement de la sphère !

L'histoire pourrait-elle s'arrêter là ? Ce serait évidemment dommage, surtout dans la mesure où j'ai annoncé que c'était "presque un conte"... Mais la vérité est en fait encore plus belle que dans un conte : quelques années plus tard un géomètre s'est rendu compte en considérant l'espèce de "chips" de la figure 24b qu'il suffisait de très peu de choses pour aboutir encore beaucoup plus simplement au résultat voulu... Peut-être y parviendrez-vous vous-même ?... Laissez-moi simplement vous préciser un dernier détail avant de mettre un terme à cette conférence : le géomètre en question, qui s'appelle Bernard Morin, est... aveugle.

*

* *

Voilà. Le problème de la figure n'est pas un problème métaphysique, pas plus qu'une quelconque question de sens. La figure en géométrie est un *langage*, au même titre que tous les langages "discursifs", "algébriques" ou "formalisés" qu'il arrive aux géomètres d'utiliser pour traiter des secrets qu'ils ont réussi à percer dans l'univers des formes. J'ai tenté de vous montrer quelques-uns des aspects de ce *langage* en vous en rappelant la richesse et, je l'espère, l'efficacité...

Les vraies questions cependant ne concernent pas que ce côté "métaphysique" ou non du rôle de la figure en géométrie, car notre préoccupation est sans doute avant tout de parler du rôle de la figure dans *l'enseignement de la géométrie*... Mais comment faire lorsque l'on sait que ce qui a une chance d'intéresser un élève ce n'est certainement pas la métaphysique d'un mouton, mais plus sûrement le mouton ? Comment transmettre ce langage de la figure tout en gardant en mémoire qu'il ne s'agit que d'un *niveau de langue* dans une science qui en utilise beaucoup d'autres ? Comment ne pas passer "à côté" de la magie offerte par ce langage de la figure ?... Comment, tout simplement, apprend-on un langage en même temps que ses "niveaux de langue" ?

Comme je vous l'avais laissé entendre au début de cet exposé, c'était évidemment mon ambition de vous apporter ici la réponse à toutes ces questions... Mais chacun comprendra que cela déborderait sensiblement le temps qui m'a été imparti... aussi permettez-moi donc simplement de vous indiquer pour conclure les deux ou trois choses qui m'ont été apprises par ma fréquentation de l'Irem de Lorraine depuis une dizaine d'années...

La première (je vous les donne dans le désordre, mais vous verrez que les différentes permutations sont toutes porteuses de sens), la première c'est qu'il est plus difficile de dessiner un mouton qu'une boîte contenant un mouton... La seconde c'est qu'il ne viendrait cependant à l'idée d'aucun aviateur naufragé de dessiner, de lui-même, un mouton dans une boîte plutôt que de faire un effort pour dessiner un semblant de mouton... La troisième, enfin, c'est qu'il ne suffit généralement pas de dessiner un mouton pour parvenir à faire aimer les moutons aux enfants...

Cette dernière vérité vaut bien un colloque de temps en temps où s'interrogeraient tous ces aviateurs naufragés qui sont tous les jours confrontés au problème de transmettre le "sens de la géométrie" à des tas de petits princes plus préoccupés de retourner sur leur étoile ! Et je suis finalement assez d'accord avec les organisateurs de celui-ci pour penser qu'un tel colloque aurait sans doute mérité une conférence d'introduction qui soit profonde, limpide et éclairante sur le sujet... Mais vous avez dû vous rendre compte, je pense, que je n'ai pas su, pour ma part, résister à la tentation de vous raconter une histoire inventée... J'espère cependant que vous y trouverez quelques éléments pour votre propre réflexion, et je voudrais que vous me permettiez de dédier ce conte au petit collégien qui m'en a fourni le prétexte, ainsi qu'à tous les élèves de collège auxquels je pensais lorsque je l'ai écrit... : peut-être certains d'entre eux le liront-ils un jour, peut-être y trouveront-ils, entre les lignes, un peu de la fascination que peut susciter l'univers des formes et qui n'est rien d'autre que le sujet de la géométrie...

Peut-être comprendront-ils alors ce que le conte est là pour signifier sans oser l'avouer : que les géomètres sont comme les enfants ; qu'ils font en permanence semblant de désirer profondément quelque jouet et qu'en définitive ils passent le plus clair de leur temps à jouer avec la boîte...

Quoi qu'il en soit, je souhaiterais qu'ils y trouvent en guise de conclusion, cette phrase de Wagner, ou plutôt cette phrase que Wagner fait dire à un de ses héros et que je livre aussi à votre méditation :

« Là où le maître échoue, que peut faire l'élève ?... s'il a toujours obéi ! ... »