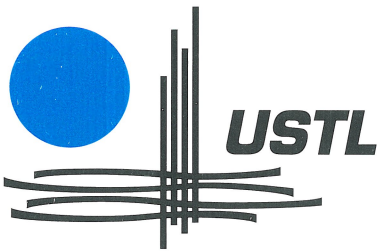


Actes du Colloque Inter-IREM Premier Cycle

# MATHÉMATIQUES au COLLÈGE les enjeux d'un enseignement pour tous



Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques





Actes du Colloque  
Inter-IREM Premier Cycle

# MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE

Les enjeux d'un enseignement pour tous

Lille 21-22-23 Juin 1999

Publié avec l'aide du Conseil Général du Nord

IREM de Lille Éditeur



# Préface

Le collège est, en France, le dernier lieu de la scolarité obligatoire où un enseignement commun des mathématiques est proposé à tous les élèves.

Cet enseignement est passé d'un enseignement de "structures" dans les années 70 à un enseignement de "modélisation" dans les années 90, sans que soit peut être posée la question de fond :

Quels en sont les enjeux et les spécificités ?

La réponse peut aller d'un utilitarisme primaire (donner des techniques et des algorithmes utilisables dans d'autres domaines ou disciplines, voire dans la vie "courante") à une philosophie teintée d'humanisme (donner un instrument d'intelligibilité au monde).

Cette question fondamentale guide le "sens" qu'on va donner à cet enseignement. Est-il le même dans d'autres pays ? Ceux qui nous entourent ? Ceux en voie de développement ? Peut-on espérer une réponse universelle ? Les mathématiques ne sont-elles pas liées, au niveau de l'enseignement, à la culture environnante et n'avons-nous pas développé des spécificités propres à notre histoire ?

Pour tenter d'éclaircir ces questions, le Colloque Inter-IREM 1<sup>er</sup> Cycle

## **MATHEMATIQUES AU COLLEGE** **Les enjeux d'un enseignement pour tous**

a réuni de nombreux participants venus d'une vingtaine d'Académies pour travailler les thèmes suivants :

L'enseignement des mathématiques peut-il être universel ?

par Jean-Pierre KAHANE,

L'histoire des mathématiques : sens ou légitimité de ce que nous enseignons ?  
thème confié à la Commission Histoire et Épistémologie des Mathématiques.

- L'histoire donne-t-elle du sens aux concepts que nous enseignons au collège ?
- L'histoire légitime-t-elle la construction actuelle de cet enseignement ?
- Si l'histoire est la "vitrine" culturelle des mathématiques, pourquoi n'est-elle pas présente dans leur enseignement ? Est-elle assez présente dans la formation des enseignants ?

La géométrie : un incontournable dans l'enseignement obligatoire?  
thème confié à la Commission Géométric.

Le "poids" de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques n'est-il pas une spécialité française?

Quels sont les enjeux de son enseignement, aussi bien d'un point de vue historique que d'un point de vue du cursus scolaire (ce qui se passe avant et après le collège)?

- Le rôle essentiel de la géométrie n'est-il pas de mettre en place la "démonstration", avec le passage du monde physique au monde mathématique?

L'information chiffrée : nécessité d'une formation mathématique?  
thème confié à la Commission Statistique et Probabilité.

Les statistiques, voire les probabilités, ne sont-elles pas une des marques plus visibles des mathématiques dans notre vie quotidienne?

- Les programmes actuels préparent-ils vraiment les élèves à comprendre et analyser toutes les informations chiffrées qu'ils recevront dans la vie d'adulte?
- Le rôle de l'enseignement des mathématiques dans ce domaine doit-il se limiter à la construction des modèles de traitement de cette information, ou ne doit-il pas aller jusqu'à une formation à l'analyse des phénomènes qu'elle décrit?

La didactique : un apport pour l'élève? pour l'enseignant?  
thème confié à la Commission Didactique.

La didactique est-elle suffisamment présente dans l'enseignement des mathématiques au collège?

Comment former à l'analyse de situations?

Les rallyes : des mathématiques périscolaires?  
thème confié à la Commission Rallye.

- Les rallyes ne sont-ils que des mathématiques périscolaires ou ont-ils des retombées dans les classes?

Quel avenir pour les rallyes et autres compétitions mathématiques?

Les TICE : des incontournables?  
thème confié à la Commission Informatique et à la Commission Images et Math.

- Comment les TICE apportent-ils une aide à l'élève? une aide à l'enseignant?  
Peut-on prévoir leur importance dans le futur?

Une société malade de ses enfants?

- Quel rôle l'école peut-elle avoir dans cette situation? Et les mathématiques en particulier?
- De quels moyens structurels et qualitatifs les enseignants ont-ils besoin pour améliorer la socialisation des enfants, pour resocialiser les élèves difficiles?

La richesse, la variété, la qualité des conférences, des exposés, des débats, des tables rondes, des ateliers témoignent de la vitalité du réseau *IREM*.



Les travaux réalisés pendant ce colloque nous confirment que nous devons continuer à travailler avec les autres commissions afin de nous forger une opinion sur leur façon d'aborder les problèmes, de nous ouvrir de nouvelles pistes ou de conforter celles dans lesquelles nous nous sommes engagés.

Venus d'horizons différents, enseignants, formateurs ou chercheurs du collège à l'université, par leur plaisir de participer, ont rappelé la nécessité des *IREM* dans leurs structures académiques et nationales.

Par cette volonté d'échanges, notre réflexion sur l'évolution de l'enseignement des mathématiques ne pourra que continuer d'avancer tant du point de vue du contenu que de la manière de l'enseigner.

Nous remercions très vivement tous les membres de l'*IREM* de Lille qui ont préparé ce colloque. Leur accueil chaleureux et le travail accompli ont contribué à la parfaite réussite du colloque.

**Christian MASSOT et Brigitte POULAIN**  
**Responsables de la *Commission Inter-IREM Premier Cycle***



## *E*ducation

### Un colloque sur l'enseignement des mathématiques au collège

# Comment faire aimer les « maths »

L'ENSEIGNEMENT des mathématiques a eu son lot de réformes dont certaines (souvenons-nous des « maths modernes » !) ont laissé derrière elles quelques traumatismes longs à guérir.

D'où l'utilité des IREM (Institut de recherches et d'enseignement des mathématiques) répartis à raison d'un par académie sur tout le territoire et dont le but est de s'interroger sur la meilleure façon d'enseigner une matière fondamentale. Matière au demeurant souvent décriée et qui, malheureusement, n'est pas appréciée à sa juste valeur.

Le thème du colloque organisé avec un ravonne-

ment national par l'IREM de Lille durant trois jours depuis lundi consiste justement à s'interroger sur la démarche de l'enseignement des « maths » au collège.

Plusieurs conférences se sont enchaînées qui ont successivement abordé dans l'enceinte de la cité scientifique à Villeneuve-d'Ascq les enjeux majeurs visant à une bonne prise en compte de la matière dans le secondaire. Si les intervenants ne remettent pas en cause les programmes, ils souhaitent en revanche une meilleure formation des enseignants. Le but étant de faire aimer les mathématiques dans le sens où, bien enseignées,

elles sont bien plus que des axiomes, théorèmes et autres définitions réputées rébarbatives.

De ce colloque seront tirées des propositions. Les IREM, dépendant de l'Université, constituent uniquement une force de proposition. Il ne tient cependant qu'au ministère compétent de s'inspirer de leurs travaux pour affiner la qualité de l'enseignement.

L'essentiel, comme aime à le rappeler M. Vassallo, directeur de l'IREM de Lille, est de toujours rester en position de se questionner : « *En ce domaine, insiste-t-il, les questions sont à mon sens plus importantes que les réponses* ».

René CANAL

3070A





# Avant-Propos

Lorsque les responsables de la Commission Inter-IREM Premier Cycle m'ont proposé d'organiser ce Colloque à Lille, j'ai été ravi d'accepter, après en avoir parlé aux animateurs susceptibles de m'aider dans ce travail.

N'ayant pas organisé de Colloque pour cette Commission depuis longtemps, alors que ceux des Commissions Géométrie, Épistémologie et de la COPIRELEM avaient eu lieu quelques années auparavant, l'IREM de Lille s'est tout de suite mobilisé dans son ensemble avec enthousiasme pour mener à bien ce projet et profiter de cette occasion pour réfléchir davantage sur les choix des thèmes et les sujets à approfondir.

Le résultat de cette réflexion mûrie avec les membres de la Commission Premier Cycle a été de faire appel aux contributions des différentes Commissions Inter-IREM et de prendre en compte des thèmes très variés et des sujets riches permettant d'apporter des contributions aux questions soulevées depuis quelques temps par les réformes successives.

Les mathématiques sont belles et utiles comme le dit Jean-Pierre Kahane dans sa profession de foi, mais elles sont aussi difficiles car si pour un arbre quelconque nous savons comment il a fait pour pousser, les idées mathématiques ont souvent des origines très différentes et peu (ou mal) connues. Il faut déjà comprendre ces idées pour soi ainsi que leur développement avant de les transmettre aux élèves et leur laisser le temps de mûrir ces idées et la liberté de se construire leur façon de "voir" les mathématiques. C'est là toute la joie du travail mathématique. Dans son intervention, Jean-Pierre Kahane a toutefois invité les enseignants à ne pas perdre de vue certains côtés "simples" des mathématiques qui sont aussi à la base de la construction du savoir. Je pense en particulier à l'appel fait que les tables de multiplication soient complètement acquises à l'issue de l'école primaire.

Un des mes collègues de Lille qui adore et connaît bien la géométrie dirait "qu'il faut s'asseoir sur les mathématiques"; autrement dit qu'il faut du temps à leur consacrer. Je pense que les trois jours de ce Colloque furent un moment intense consacré aux mathématiques et un nouveau point de départ de la réflexion autour d'elles.

Il fut l'occasion aussi de parler des approches diverses que l'on peut en avoir.

Il fallait donc ne pas perdre l'occasion de garder une trace de ce moment intense et le résultat est maintenant entre vos mains. Il contient la presque totalité des interventions.

Je tiens à remercier tout d'abord les organisateurs de ce Colloque, Christian Massot et Brigitte Poulain, Présidents de la Commission Premier Cycle, Françoise Chamontin et Marc Picot, tous les membres du Comité Scientifique, puis tous les animateurs de l'IREM de Lille et tous les intervenants qui en ont fait un moment fort de plaisir intellectuel et de convivialité. J'associe à ces remerciements le secrétariat de l'IREM de Lille qui a assuré avec dévouement la préparation de ces journées et l'accueil des participants.

Je remercie Jacques Dubeau, Président de notre Université qui nous a laissé la libre utilisation du bâtiment d'Enseignement des Mathématiques pendant ces trois jours.

Je remercie chaleureusement l'ADIREM pour la généreuse dotation qui a permis l'organisation de ce Colloque et le Conseil Général du Nord pour l'aide qu'il a apporté pour l'édition de ces Actes.

Pour la confection de ces "Actes", je remercie les animateurs IREM qui ont assuré la récolte des interventions et leur mise en page : Françoise Chamontin, universitaire de notre U.F.R. de Mathématiques, et Bernard Cazier professeur de Collège et en formation continue. Sans eux, ses actes n'existeraient pas. Ils ont consacré des jours (et des nuits!) pour que le travail soit le plus complet possible. Ils ont eu à cœur de trouver une présentation de ses beaux textes qui les rendent accessibles au plus grand nombre. Je crois que leur pari est réussi. Merci aussi à Carlos Sacré pour la gentillesse avec laquelle il leur a prodigué ses conseils et les a fait bénéficier de son expérience en matière d'édition, et à tous les collègues qui ont relu attentivement chaque article pour chasser les imperfections, et les fautes de frappe...

Je remercie aussi Nadine Claeys de l'imprimerie de notre Université qui a pris à cœur la réussite de ce travail, ainsi que Éric Cassette du Centre de Ressources Informatique.

Je souhaite que la lecture de ces actes

- ouvre des perspectives de réflexion pour tous les professeurs de Collège ou de Lycée qui le liront,
- encourage d'autres collègues universitaires à rejoindre les équipes d'enseignants du collèges dans les IREM,

car les IREM restent un des lieux où on peut penser avec une rare passion et avec d'autres, les mathématiques pour les mathématiques, "pour le plaisir du sens".

Je crois à raison que ce Colloque fut un moment inoubliable de convivialité entre tous les participants et je pense en particulier à la soirée passée ensemble à Lille. J'espère qu'ils s'en souviendront et savoureront un plaisir nouveau à la lecture de ces actes.

Valério VASSALLO

Directeur de l'IREM de Lille

# PROFESSION DE FOI

Jean-Pierre KAHANE

Président  
de la Commission de Réflexion  
sur l'Enseignement des Mathématiques

Il faut enseigner les mathématiques parce qu'elles sont belles et utiles.

Elles sont utiles de bien des manières. Je me bornerai à trois aspects :

★ D'abord, elles concourent à la formation de l'esprit. Elles forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action. Elles articulent de manière originale mémoire et raisonnement. Elles offrent un large champ à l'imagination.

★ Ensuite, elles constituent une langue commune, universellement répandue.

★ Enfin, comme science, elles interagissent avec d'autres sciences de façon décisive et souvent imprévue. Les nombres premiers interviennent en cryptographie, l'analyse de Fourier en astrophysique et en géométrie structurale. Les concepts mathématiques parviennent aussi bien des pratiques ancestrales que des recherches contemporaines en physique, en informatique, en économie, en chimie, en biologie ; ils s'élaborent et se combinent par le travail des mathématiciens, et se trouve ainsi disponibles loin du champ qui leur a donné naissance ; c'est ce que Wigner appelle, à tort, l'efficacité «déraisonnable» des mathématiques dans les sciences de la nature.

Mais leur utilité même, actuellement, les rend vulnérables. Le danger, c'est l'utilitarisme.

L'utilitarisme conduit à donner des recettes au lieu de contribuer à la formation de l'esprit, à renoncer à l'universalité des mathématiques, à les diviser selon la nature actuelle de leurs applications sans souci des interactions possibles, et à constituer ainsi en champ clos les mathématiques de l'ingénieur, de l'informaticien, du physicien, de l'économiste et ainsi de suite. Les mathématiques peuvent être et doivent être enseignées, en particulier au niveau de l'enseignement supérieur, en fonction des intérêts majeurs des étudiants, c'est-à-dire comme une discipline de service. Mais elles seront d'autant plus précieuses comme discipline de service qu'elles préserveront leur spécificité, comme généralistes de la connaissance. Cela vaut pour tous les niveaux où les mathématiques doivent être enseignées en vue d'applications.

Or à tous les niveaux, les mathématiques sont belles, et le sentiment de cette beauté sera d'autant mieux perçu par les élèves que les professeurs en seront mieux imprégnés.

Chacun peut se figurer l'ensemble des mathématiques à sa manière : l'édifice magnifique (le «palais intérieur» de Laurent Schwarz), ou la forêt peuplée d'espèces insolites, ou le monde des idées pures. Cet ensemble est organisé en théories superbes, comme les Éléments d'Euclide ou la théorie des fonctions d'une variable complexe. Et ces théories sont comme des enchaînements de perles, les théorèmes, qui sont, littéralement, ce devant quoi il vaut la peine de s'arrêter pour se livrer à la contemplation.

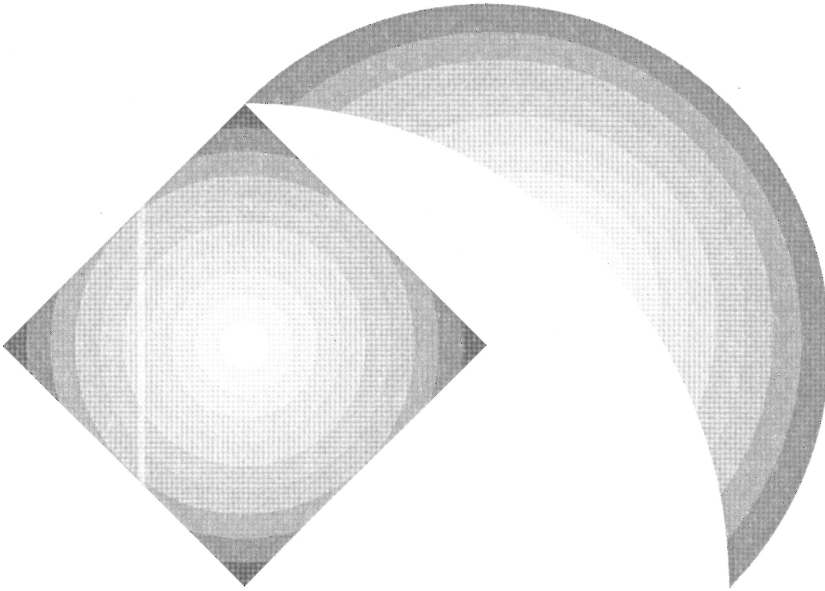
La culture commune des mathématiciens est faite de quelques dizaines de théorèmes, et elle varie avec les époques, sans jamais se couper du passé, même lointain. Le théorème de Pythagore est loin d'avoir épuisé sa vertu. Il faut à la fois élargir cette culture à des domaines nouveaux, et la rendre accessible aux amateurs que sont les professeurs de mathématiques, et, pour une part au moins, leurs élèves. Ce pourrait être un programme intéressant pour la haute vulgarisation mathématique que de recenser les théorèmes importants et faciles à exposer.

Rien n'est plus beau en mathématiques qu'une belle démonstration, rien n'est plus bouleversant que de découvrir une démonstration par ses seules forces.

*Je souhaite que nous ayons en vue un objectif inaccessible :*

*que chaque enfant, que chaque adulte, ait éprouvé au cours de sa vie la joie de la contemplation et de la découverte mathématique.*





L'éclipse du 11 août 1999, vue par un mathématicien

Cette image est due à André STOLL de l'IREM de STRASBOURG



**LA MESURE DES GRANDEURS AU COLLÈGE :**  
**UNE PRÉPARATION À L'APPRENTISSAGE DE L'ANALYSE.**

**Jean-Pierre FRIEDELMEYER**

IREM de STRASBOURG

## La mesure des grandeurs au collège

Dans son ouvrage célèbre intitulé "*La mesure des grandeurs*"<sup>1</sup>, Henri Lebesgue souligne que :

*"Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est le point de départ de toutes les applications des mathématiques<sup>2</sup> et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie ; d'autre part, cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet même de l'Analyse. Aussi parle-t-on de la mesure des grandeurs dans les trois enseignements : primaire, secondaire, supérieur ; le rapprochement de ce que l'on fait dans les trois ordres d'enseignements fournit un exemple de ces efforts de compréhension d'ensemble, de coordination qui me paraîtraient pouvoir servir plus efficacement à la formation des futurs professeurs que le travail exigé d'eux : le figiolage verbal de leçons isolées."*

Nous en avons souligné trois idées qui nous paraissent fondamentales :

1. Elle est le point de départ de toutes les applications des mathématiques.
2. Elle fournit le nombre, c'est à dire l'objet de l'analyse.
3. Elle fournit un exemple de compréhension d'ensemble.

C'est dire d'abord que l'enseignement des mathématiques au collège ne doit pas être pensé à l'intérieur et en fonction des seuls programmes et objectifs du collège, mais bien plutôt dans une dynamique qui, s'appuyant sur les acquis de l'école primaire, conduit l'élève au lycée et à l'université. Le thème de la mesure des grandeurs est en ce sens le plus représentatif d'une double transversalité qui doit inspirer continuellement l'enseignement des mathématiques au collège : transversalité verticale comme nous venons de le signaler qui organise les programmes dans une vue

---

1. H. LEBESGUE : "*La mesure des grandeurs*" ré-édition A. Blanchard 1975 - page 2

2. c'est nous qui soulignons

d'ensemble allant depuis l'école primaire jusqu'au début de l'université; transversalité horizontale aussi, en ce que le thème de la mesure des grandeurs conditionne directement l'apprentissage des sciences en général, et particulièrement celui des sciences physiques; car la physique est expérimentale, et l'expérimentation passe nécessairement par la mesure des grandeurs. C'est en ce sens, par exemple, que l'on peut comprendre la question posée lors de ce colloque et qui concerne la géométrie:

*"Le rôle essentiel de la géométrie n'est-il pas de mettre en place la démonstration, avec le passage du monde physique au monde mathématique?"*

La réalité physique est appréhendée, et saisie, d'emblée en termes de grandeurs et de variation des grandeurs. Mais pour que cette saisie devienne scientifique, il faut qu'elle soit l'objet de mesures, c'est à dire traduite en termes de nombres et de fonctions.

Les programmes de mathématiques du collège entérinent d'ailleurs très largement cet ancrage dans la réalité physique avec des rubriques telles que: la mesure du temps (en 5ème), les grandeurs quotient (en 4ème), les grandeurs composées (en 3ème).

Plus précisément, on trouve une rubrique Grandeurs et mesures pour chacune des classes, avec les thèmes suivants:

- en sixième:
  - Périmètre et aire d'un rectangle, aire d'un triangle rectangle.
  - Longueur d'un cercle.
  - Volume d'un parallélépipède rectangle à partir d'un pavage.
- en cinquième:
  - Somme des angles d'un triangle. Aire du parallélogramme, du triangle, du rectangle.
  - Mesure du temps.
  - Aire latérale et volume d'un prisme droit, du cylindre de révolution
- en quatrième:
  - Grandeurs quotients courantes.
  - Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.
- en troisième:
  - Grandeurs composées.
  - Aire de la sphère, volume de la boule.

On peut seulement regretter que ces rubriques soient coupées d'autres parties explicites du programme placées dans d'autres thèmes tels que Fonctions numériques avec:

- en sixième:
  - Changements d'unités de longueur, d'aire.
  - Étude d'exemples relevant ou non de la proportionnalité.
- en cinquième:
  - Mouvement uniforme.
  - Changements d'unités de temps et de volume.



en quatrième :

Vitesse moyenne.

Changements d'unités pour des grandeurs quotients courantes.

– en troisième :

Étude générale de l'effet d'une réduction d'un agrandissement sur des aires, des volumes mais aussi des thèmes comme Nombres et calcul numérique et

l'utilisation des touches  $\sqrt{\quad}$  ou  $\cos(\quad)$ .

Or Lebesgue a raison : la mesure des grandeurs fournit aussi ce qui fait l'un des domaines les plus riches des mathématiques : le nombre et l'analyse.

Historiquement, l'analyse s'est constituée et développée principalement autour du thème de la mesure des grandeurs. La notion de nombre irrationnel, de réel, le calcul différentiel et intégral, sont nés de problèmes de mesures de longueurs, d'aires, de volumes. Ces problèmes ont leur ancrage dans une réalité physique, mais ont conduit très tôt à des découvertes qui dépassent largement la simple intuition. Ils sont donc exemplaires pour mettre en évidence la frontière entre le fait constaté et le fait démontré : leur ancrage dans la réalité physique les rend accessibles à l'intuition de l'élève mais l'incapacité de cette intuition à rendre compte de toutes les situations et à résoudre certains problèmes (grandeurs incommensurables, surfaces limitées par des courbes), l'oblige à dépasser le stade empirique pour accéder au stade théorique de l'analyse mathématique.

Il y a en effet une difficulté insurmontable dans la démonstration de la plupart des résultats élémentaires de la mesure des grandeurs : les formules connues depuis l'antiquité nécessitent pour leur démonstration un recours et une gestion de l'infini. Démontrer des formules aussi classiques que :

- aire du rectangle égale longueur fois largeur,
- aire du disque égale  $\pi R^2$ ,
- périmètre du cercle égale  $2\pi R$ , etc. . .

suppose la mise en place d'une théorie du continu et du nombre tout à fait inaccessible à l'élève du collège ou de l'école primaire.

D'où la tentation de limiter l'apprentissage de ces formules à une activité du type artisanale au même titre que le travail d'un arpenteur, tonnelier, charpentier, lesquels en font effectivement une utilisation quotidienne. Cela est tout à fait justifié et légitime à l'école primaire. Mais au collège, le moment est venu d'initier l'élève à une activité proprement mathématique, c'est-à-dire une activité de raisonnement, de justification et de démonstration qui dépasse la simple mise en forme de faits et de résultats observés ou expérimentés ? L'enseignement des mathématiques au collège doit sensibiliser progressivement l'élève au fait que la réflexion, le raisonnement, l'abstraction, en un mot la pensée, peuvent aller plus loin dans la précision, la justesse de certains résultats, et l'inciter peu à peu à une démarche scientifique qui aille au delà du sensible pour découvrir la beauté et la richesse des objets mathématiques idéaux.

Alors la rigueur exigée dans les mathématiques n'apparaîtra plus comme un exercice ennuyeux et inutile, mais bien au contraire comme le garant d'une pensée juste et conquérante d'un monde inaccessible aux seules données des sens.

Seulement, pour en arriver là, on ne peut se contenter de dire : voilà, on vous a donné à l'école primaire ou en sixième, cinquième, des formules sans vous les démontrer - le moment est venu à présent, en quatrième, en troisième (en seconde?), de les démontrer : cela ne les intéressera pas et de toute façon, cela n'est pas réalisable car trop difficile. Ce que l'on peut faire, par contre, c'est mettre en place quelques questionnements, quelques démarches, quelques progressions qui préparent aux raisonnements et aux démonstrations propres de l'analyse mathématique à partir des connaissances acquises par les élèves à l'école primaire et dans les premières années de collège, et qui s'appuient sur quelques rubriques du programme : particulièrement la rubrique Grandeurs et mesures.

L'exposé qui suit, plutôt que de s'en tenir à un discours théorique, coupé de l'enseignement au quotidien, préfère partir de quelques questions ou problèmes ouvrant des pistes de réflexion et d'expérimentation, autour de trois types de préoccupations :

1. Il y a des formules concernant la mesure des grandeurs que les élèves connaissent depuis l'école primaire ou qui font partie des programmes de collège. Comment placer les élèves dans un questionnement mathématique sur ces formules développant une démarche de raisonnement et progressivement de validation de ces formules?
2. Comment amener les élèves à une conscience claire et précise de l'existence de nombres qui ne sont ni des entiers ni des fractions d'entiers, mais qui pourtant sont indispensables pour mesurer de façon exacte certaines grandeurs?
3. Comment familiariser les élèves avec des démarches spécifiques de raisonnement en analyse, c'est-à-dire qui mettent en œuvre le continu et donc l'infini?

Plusieurs équipes pédagogiques, particulièrement dans les IREM, travaillent et progressent sur ces objectifs.

Nous nous proposons d'explorer ici quelques pistes que peut nous fournir l'histoire des mathématiques, qui comme nous l'avons signalé plus haut a rencontré beaucoup de problèmes liés à la mesure des grandeurs. La progression proposée se développera en trois étapes qui tentent de donner un début de réponse aux trois interrogations formulées ci-dessus :

1. **Montrer sur des exemples simples, mais non triviaux, ce que peut être une démarche de raisonnement et de démonstration au collège.**

Le point d'appui - déjà développé ailleurs - est que les grandeurs, considérées en elles-mêmes, c'est-à-dire sans être forcément liées à l'idée de leur mesure, sont une source inépuisable de propriétés simples à démontrer, ne nécessitant qu'un arsenal réduit d'axiomes ou de propriétés de base.

Nous croyons en effet qu'une des raisons des difficultés actuelles de l'apprentissage d'une véritable démarche mathématique au collège tient au fait de ne pas séparer l'étude des grandeurs de leur mesure. Par exemple, rien que déjà pour mesurer les côtés d'un triangle rectangle, interviennent les radicaux, c'est-à-dire des nombres irrationnels, concept inaccessible sans une préparation méthodique qui fera l'objet de la deuxième étape. Or le théorème de Pythagore peut se penser et s'énoncer sans recours à la mesure et au nombre.

2. **Dégager de manière convaincante la nécessité d'introduire des nombres dits irrationnels,**

posés par un acte de pensée qui manifeste à la fois la réalité de ces nombres, en ce qu'ils mesurent des grandeurs physiques, sensibles et observables, et leur caractère abstrait, en ce qu'ils ne peuvent pas s'écrire exactement avec les chiffres usuels. L'impossibilité d'écrire ces nombres exactement, mais la possibilité d'en donner une valeur approchée aussi précise que l'on voudra introduit alors aux démarches spécifiques de l'analyse mathématique mettant en jeu les processus infinitaires.

3. **Quelques exemples de démonstration introduisant au raisonnement de l'analyse.**

Ceux-ci peuvent alors être abordés sur quelques exemples simples développés dans une troisième partie par une approche des problèmes liés au continu où nous tenterons quelques premières démonstrations de formules classiques comme l'aire du rectangle, la longueur de la circonférence et l'aire du cercle ou le volume de la sphère.

## Les aires : outil heuristique, outil démonstratif.

Il est une idée simple concernant les grandeurs, simple parce que liée à l'intuition sensible du jeune élève et qui est d'ailleurs explicitement inscrite dans les programmes du collège, c'est celle d'agrandissement et de réduction avec, sous jacente, l'idée de conservation de la forme. On a déjà cité certains extraits de programme à ce sujet. Voici ce qui concerne la Troisième :

CONTENUS	COMPÉTENCES EXIGIBLES
<p><b>Proportionnalité et traitement usuels sur les grandeurs</b></p> <p>Application de la proportionnalité</p> <p>Grandeurs composées Changement d'unités</p> <p>Calculs d'aires et de volumes</p> <p>Effet d'une réduction ou d'un agrandissement sur des aires ou des volumes.</p>	<p>Dans des situations mettant en jeu des grandeurs, l'une des grandeurs étant fonction de l'autre.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- représenter graphiquement la situation d'une façon exacte si cela est possible, sinon d'une façon approximative,</li> <li>- lire et interpréter une telle représentation.</li> </ul> <p>Calculer l'aire d'une sphère de rayon donné. Calculer le volume d'une boule de rayon donné.</p> <p><b>Connaître et utiliser le fait que, dans un agrandissement ou une réduction de rapport <math>k</math>,</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- l'aire d'une surface est multipliée par <math>k^2</math></li> <li>- le volume d'un solide est multiplié par <math>k^3</math></li> </ul>

Nous utiliserons donc une propriété de base, repérée ici propriété (A-R)<sub>1</sub> (comme agrandissement - réduction).

Dans un agrandissement - réduction de rapport  $k$ , l'aire d'une surface est multipliée par  $k^2$  (A-R).

### Une première série d'activités d'agrandissement ou de réduction

Limitées à des figures simples, elle mettront en évidence la compréhension du fait que si les longueurs sont multipliées par  $k$  alors les aires sont multipliées par  $k^2$ . On pourra cependant faire observer que si la constatation de ce fait est claire sur les figures rectilignes (carrés, triangles, ...) elle ne l'est pas du tout sur les figures délimitées par des lignes courbes. Ce peut être l'occasion d'un premier questionnaire sur l'aire du disque :

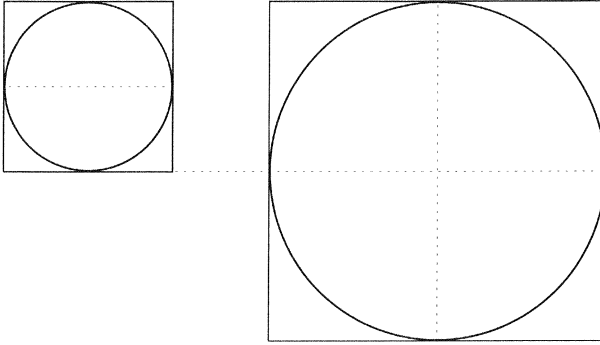


figure 1

Si le diamètre d'un cercle est doublé, le carré construit sur le diamètre est quatre fois plus grand. En est-il de même pour le cercle inscrit (figure 1)?

A chacun de voir s'il peut aller plus loin en explorant les divers polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle (figure 2).

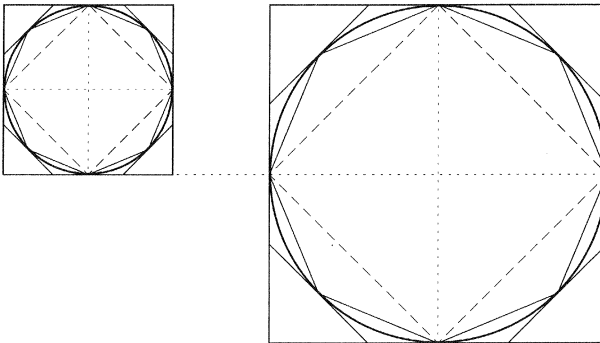


figure 2

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport  $k$ , l'aire d'une surface est multipliée par  $k^2$ .

Passons alors au problème, d'une certaine façon inverse, dans lequel c'est le facteur  $k^2$  qui est donné. Commençons par quelques idées d'activité en classe. Elles sont simplement esquissées. Chaque professeur les adaptera et les étoffera par les questions intermédiaires qu'il pense utiles.

**Construire une figure d'aire  $n$  fois plus grande qu'une figure donnée et de même forme.**

a) Construire un carré d'aire double d'un carré donné.

Ce problème, comme on le sait, est fort ancien et donne déjà à Platon dans son dialogue le *Ménon* l'argument d'une distinction essentielle entre dire le côté du carré double et construire ce côté. Ni le serviteur auquel fait appel Socrate, ni Socrate lui-même ne peuvent dire en nombre le côté du carré double puisque ce côté est incommensurable au côté du premier. Mais ils peuvent le construire à partir de la diagonale (figure 3) :

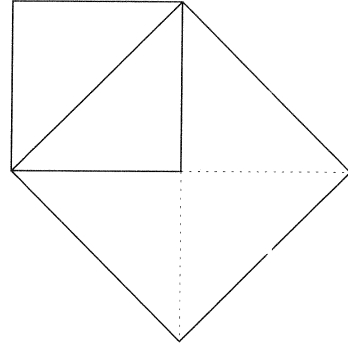


figure 3

Reste tout de même la question :

Quel est le rapport de l'agrandissement qui fait passer d'un carré au carré double?

b) Construire un triangle équilatéral d'aire double d'un triangle équilatéral donné

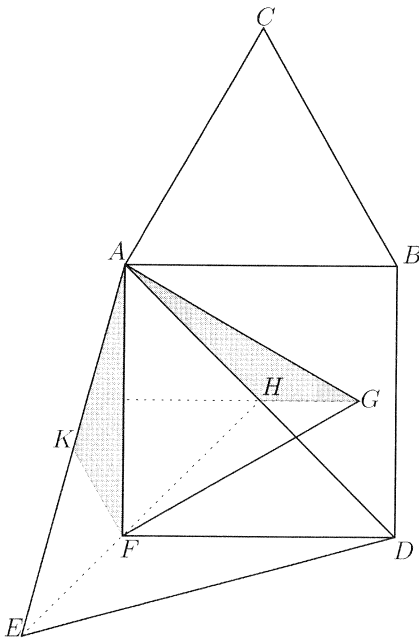


figure 4

Si le carré est doublé en remplaçant son côté par sa diagonale, on peut imaginer que le triangle équilatéral est doublé en remplaçant son côté par la diagonale du carré construit sur le côté du triangle initial.

Peut-on le démontrer simplement, au niveau collège (figure 4)?

Il suffit de démontrer que le triangle  $AGF$  a même aire que le demi triangle équilatéral  $AHE$ .

Dans ces deux triangles,  $AHF$  est commun. Soit  $K$  le milieu de  $[AE]$ .

Alors les triangles  $AHG$  et  $AKF$  sont superposables (isométriques par la rotation de centre  $A$  et d'angle  $60^\circ$ ) donc égaux. Et comme  $K$  est le milieu de  $[AE]$ , les triangles  $AKF$  et  $KFE$  ont même aire. D'où l'égalité en aire des triangles  $AGF$  et  $AHE$ , et l'aire double du triangle  $ADE$  par rapport au triangle  $AGF$  ou  $ABC$ .

c) Construire un cercle d'aire double d'un cercle donné.

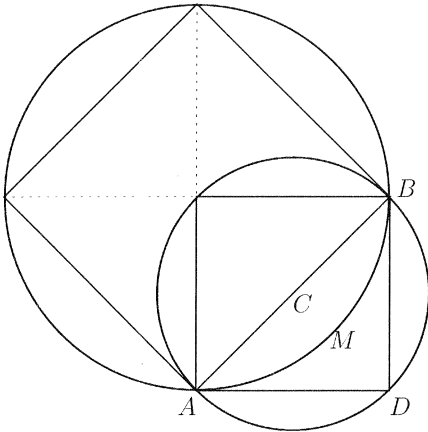


figure 5

La même idée que pour le carré ou le triangle s'applique, mais comment le démontrer? Le professeur peut renvoyer au paragraphe 1 et avouer que pour le moment il ne peut encore le prouver avec la même facilité que pour le carré ou le triangle (figure 5).

d) La lunule d'Hippocrate.

A partir de ce résultat, il est facile de démontrer l'égalité en aire de la lunule  $AKBD$  avec le carré  $ACOE$  (figure 6).

Les disques de centres respectifs  $C$  et  $O$  sont dans le rapport 1 à 2, donc le demi-disque  $ADB$  est égal au quart de disque  $OAKB$  (la moitié est égale au quart du double). Aux deux grandeurs égales  $OAKB$  et  $ADB$ , on enlève une même partie ( $AKB$ ). On obtient donc des grandeurs de même aire ( $OAB$ ) et ( $ADBK$ ) ou encore ( $OCAE$ ) et ( $ADBK$ ) (figure 7).

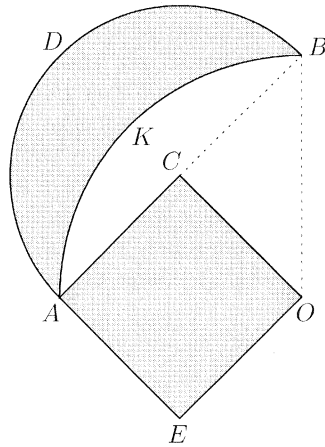


figure 6

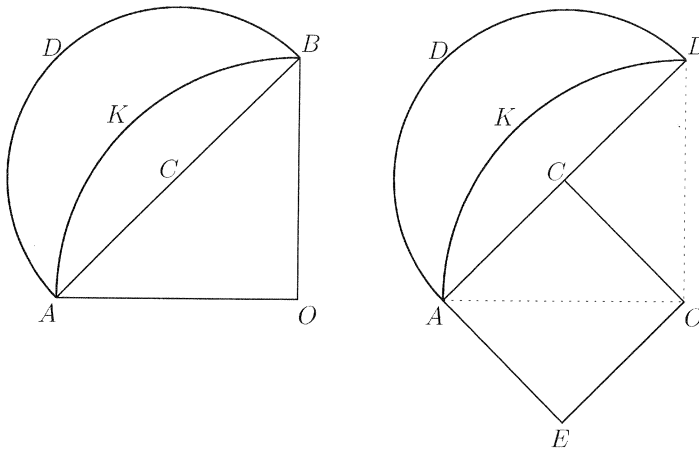


figure.7

e) La lunule brisée d'Artus de Lionne.

Sur les lunules, on peut encore aller plus loin et donner l'occasion aux élèves d'approfondir certaines relations de proportionnalité importantes sur le cercle, en même temps que d'exercer leurs facultés de raisonnement, toujours sur des grandeurs (donc maintien d'un lien avec l'intuition sensible) et avec appui sur une axiomatique géométrique réduite. La propriété à démontrer généralise celle de la lunule vue au paragraphe précédent, et affirme l'égalité des aires (AMN) et (ACD) - parties hachurées de la figure 8. On la trouve dans un échange épistolaire entre Tschirnhaus et Leibniz, mais elle était déjà découverte par Artus de Lionne en 1610 .

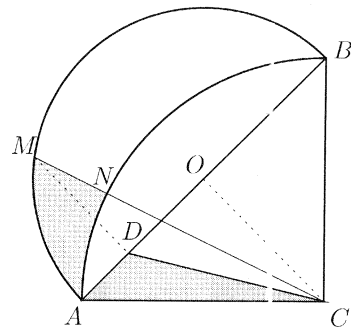
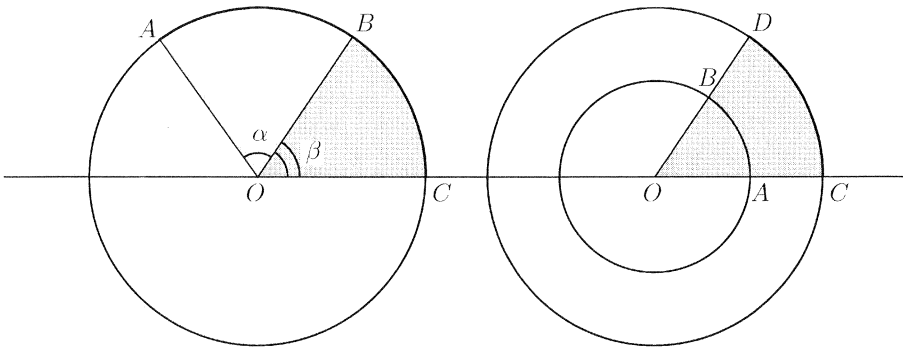


figure 8

La figure de base est la même, mais tronquée par une droite  $CNM$  correspondant à un angle  $\widehat{ACM} = \alpha$  quelconque compris entre  $0$  et  $90^\circ$ . Le point  $M$  est projeté orthogonalement en  $D$  sur  $AB$ . Cette propriété nous donne d'abord l'occasion de bien distinguer deux types de proportionnalité entre secteurs angulaires dont la mise en correspondance permet de mettre en relief le caractère spécifique de chacune. Elle permet aussi de faire saisir la différence entre une proportionnalité linéaire simple (rapport d'agrandissement réduction  $k$ ) et une proportionnalité au carré, que les Anciens appelaient double (rapport A-R égal à  $k^2$ ).





Pour un même rayon et des angles distincts

$$\frac{AireOAB}{AireOBC} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Pour un même angle et des rayons distincts

$$\frac{Aire(OAB)}{Aire(ODC)} = \left(\frac{OA}{OC}\right)^2$$

figure 9

La démonstration de l'égalité de la lunule tronquée ( $AMN$ ) avec le triangle  $ACD$  se fait alors facilement en trois étapes :

1)  $\underline{Aire\ du\ secteur(OAM) = Aire\ du\ secteur(CAN)}$

- a) l'angle au centre  $\widehat{AOM}$  est le double de l'angle inscrit  $\widehat{ACM}$
- b) le carré du rayon  $OM$  est la moitié du carré du rayon  $CA$

2)  $\underline{Aire(MEO) = Aire(DEC)}$

- a)  $Aire(OMC) = Aire(ODC)$   
 parce que ces triangles ont même base  $OC$   
 et des sommets situés sur une même  
 parallèle ( $MD$ ) à cette base.

- b)  $Aire(MEO) = Aire(OMC) - Aire(OEC)$
- c)  $Aire(DEC) = Aire(ODC) - Aire(OEC)$

3)  $\underline{Aire(AMN) = Aire(ACD)}$

- a)  $(AMN) = secteur(OAM) - (ANE) - (MEO)$
- b)  $(ACD) = secteur(CAN) - (ANE) - (DEC)$

D'où l'égalité souhaitée

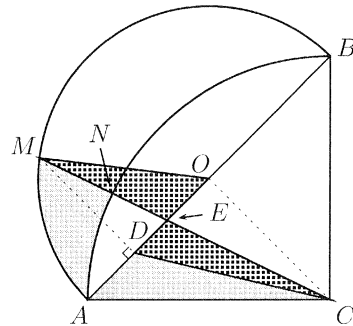


figure 10

Ce travail de reconnaissance de certaines proportionnalités prépare le terrain à un questionnement plus large et général : construire un carré, un triangle équilatéral, un cercle, etc..., N fois plus grand qu'un carré, qu'un triangle équilatéral, qu'un cercle, etc... donné.

Cela nécessite la mise en place du théorème de Pythagore.

f) Le théorème de Pythagore.

Nous en connaissons des dizaines de démonstrations, mais l'une d'entre elles s'appuie sur l'unique propriété (A-R) et a l'avantage de se généraliser à des figures quelconques, en mettant l'accent sur l'idée de figures de même forme (donc agrandissement - réduction d'une figure donnée).

Considérons le triangle ABC rectangle en A. Sa hauteur AH définit deux autres triangles rectangles (ABH) et (ACH) de même forme (semblables) au triangle ABC (figure 11).

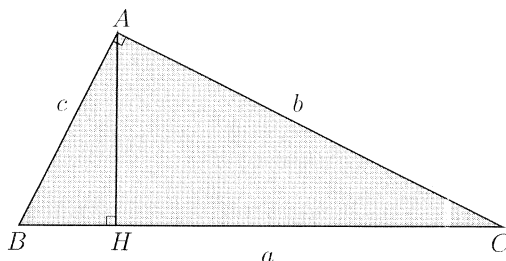


figure 11

Désignons par  $a, b, c$  les longueurs des côté  $BC, CA, AB$  respectivement.

Plus précisément :

- le triangle  $ABH$  est une réduction de  $ABC$  dans le rapport  $\frac{c}{a}$
- le triangle  $ACH$  est une réduction de  $ABC$  dans le rapport  $\frac{b}{a}$

Donc

$$\text{Aire}(ABH) = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \text{Aire}(ABC) \quad \text{et} \quad \text{Aire}(ACH) = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \text{Aire}(ABC)$$

D'où, en additionnant membre à membre

$$\text{Aire}(ABC) = \left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \text{Aire}(ABC)$$

Donc  $a^2 = b^2 + c^2$

De plus, si l'on note  $h$  la hauteur AH,  $m$  et  $n$  les longueurs des segments EH et HC,

$$\text{on a} \quad \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \text{ou} \quad h^2 = m.n$$

Relation qui nous servira dans la suite.

Mais à ce niveau, il est important de ne pas limiter le théorème de Pythagore à sa forme numérique  $a^2 = b^2 + c^2$ , mais d'y associer des images géométriques parlantes.

En faisant une symétrie par rapport à chacun des côtés du triangle  $ABC$ , le théorème de Pythagore peut se lire (figure 12) :

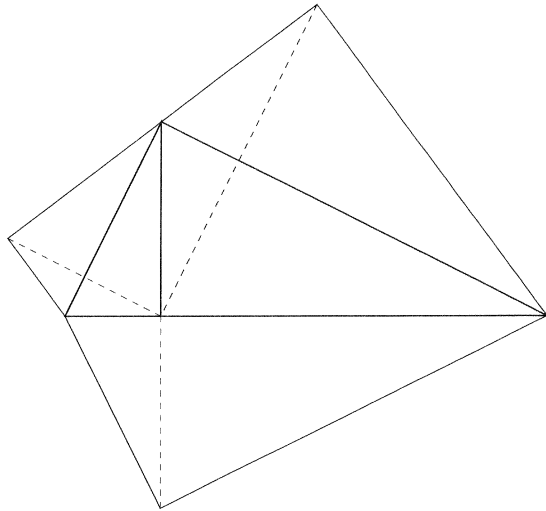


figure 12

Si, sur les côtés d'un triangle rectangle donné, on construit des triangles rectangles semblables à ce triangle donné, la somme des aires des triangles construits sur les côtés de l'angle droit est égale à l'aire du triangle construit sur l'hypoténuse.

Théorème qui se généralise à des figures quelconques, en vertu de la propriété (A-R).(figure 13 à 15)

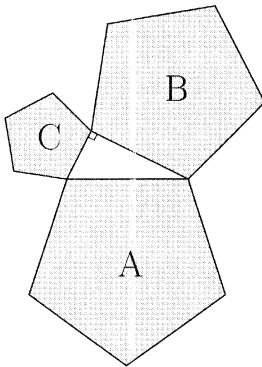


figure 13

En particulier, nous voici en mesure de résoudre le problème: construire une figure  $N$  fois plus grande et semblable à une figure donnée. Il suffit de construire un triangle rectangle dont les carrés de deux côtés ont une somme ou une différence égale à  $N$ .

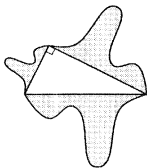


figure 14

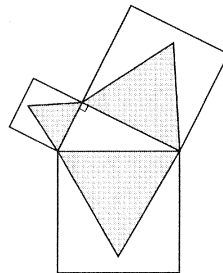


figure 15

Exemple: Construire un carré 5 fois plus grand qu'un carré donné:  $5 = 2^2 + 1^2$

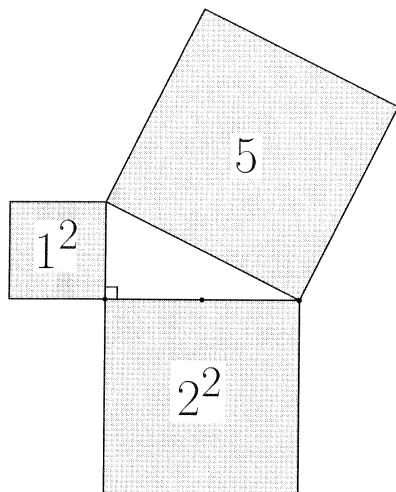


figure 16

Mais de toute façon, on peut toujours écrire

$$n = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

par exemple :

$$7 = 4^2 - 3^2; \quad 11 = 6^2 - 5^2$$

et ramener encore le problème à la construction d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse dans ce cas aura pour longueur  $\left(\frac{n+1}{2}\right)$  (figure 17).

Cela nous amène alors tout naturellement à la question :

*Combien mesure le côté du carré 7 fois plus grand ( $n$  fois plus grand) qu'un carré donné de côté pris pour unité ?*

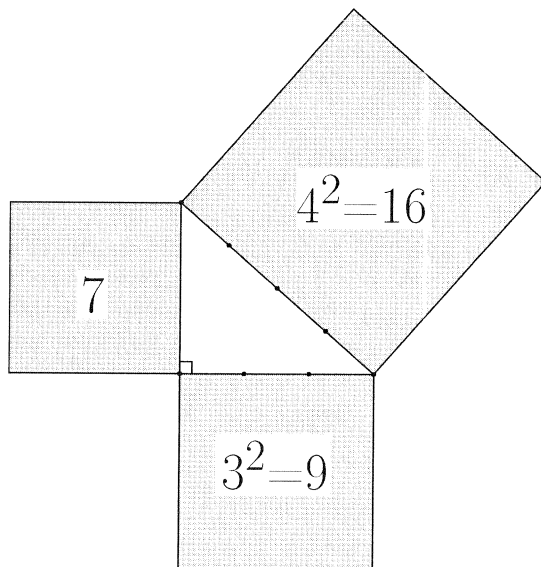


figure 17

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et 2 répond à la question, en vertu du théorème de Pythagore (figure 16).

D'où une question d'arithmétique, en passant : quels sont les nombres  $N$  qui s'écrivent comme somme de deux carrés :  $n = p^2 + q^2$  ?

On pourra faire constater ou vérifier que ce n'est pas possible pour  $n = 3$  ou  $n = 7$  ou  $n = 11$  etc. . .

C'est le deuxième objectif : conduire les élèves à la conscience qu'il y a des grandeurs dont la mesure ne peut s'exprimer ni par un entier ni par une fraction d'entier.

## L'introduction du symbole $\sqrt{\quad}$ et du nombre $\sqrt{n}$

Une vieille idée due à Archytas de Tarente (IVe s. av. J.C.) peut nous y aider et, d'une manière étonnamment proche de l'analyse moderne : celle des suites.

Considérons deux grandeurs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , mesurées par les nombres entiers  $a$  et  $b$  (nous supposons  $b < a$ ), par exemple  $a = 2$  et  $b = 1$ , comme sur la figure 18).

Construisons le cercle de centre  $O$ , de diamètre  $AB$ , mesurant  $a + b$  et la perpendiculaire  $GM = g$  en  $G$  telle que  $AG = a$ ,  $GB = b$ .

Alors nous avons,  $m = OM = \frac{a+b}{2}$  et  $g^2 = ab$ .

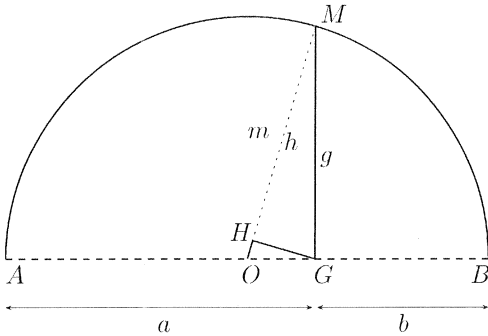


figure 18

Projetons encore orthogonale-ment  $G$  en  $H$  sur  $OM$  et soit  $MH = h$ . Dans le triangle rectangle  $OGM$  nous avons :

$$g^2 = m \text{ de sorte que } h = \frac{2ab}{a+b}$$

$m, g, h$  sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique, harmonique de  $a$  et  $b$  et vérifient les inégalités :

$$b < h < g < m < a$$

A ce niveau là, on peut très bien se contenter de la propriété géométrique évidente que la perpendiculaire est plus courte que toute oblique, pour affirmer les inégalités strictes :

$$h < g < m$$

et pour les termes extrêmes, on pourra faire les raisonnements suivants :

1.  $b < a$  donc  $b + a < a + a$  donc  $m = \frac{b+a}{2} < a$
2.  $\frac{1}{a+a} < \frac{1}{a+b}$  donc  $\frac{2ab}{a+a} = b < \frac{2ab}{a+b} = h$

L'intérêt de ces inégalités c'est que

1. Si  $a$  et  $b$  sont rationnels, alors  $h$  et  $m$  le sont aussi, mais pas nécessairement  $g$ .
2. Comme  $g^2 = hm$ , on peut itérer la mise en place de moyennes encadrant  $g$ , en introduisant :

$$m_1 = \frac{m+h}{2} \text{ nouvelle moyenne arithmétique}$$

$$h_1 = \frac{2mh}{m+h} \text{ nouvelle moyenne harmonique avec } m_1 h_1 = mh = g^2 \text{ puis}$$

$$- m_2 = \frac{m_1+h_1}{2} \quad ; \quad h_2 = \frac{2m_1 h_1}{m_1+h_2} \text{ et ainsi de suite.}$$

- Pour tout  $n$  on aura  $m_n h_n = g^2$  : la moyenne géométrique reste fixe.

Avec les élèves, on aura intérêt à expérimenter la construction de ces suites d'abord avec des exemples où  $g^2$  est un carré d'entier et ensuite seulement avec  $g^2$  non carré d'entier.

**Exemple 1:**  $b = 4$ ;  $a = 9$ ;  $g = 6$

<b>h</b>		<b>m</b>		largeur de l' intervalle [h,m] inférieur à
<i>en décimale</i>	<i>en fraction</i>	<i>en décimale</i>	<i>en fraction</i>	
5,538461538	$\frac{72}{13}$	6,500000000	$\frac{13}{2}$	1
5,980830670	$\frac{1872}{313}$	6,019230770	$\frac{313}{52}$	$10^{-1}$
5,999969280	$\frac{1171872}{195313}$	6,000030720	$\frac{195313}{32552}$	$10^{-4}$
6,000000000	$\frac{457763671872}{76293945313}$ = $6 - \frac{1}{76293945313}$	6,000000000	$\frac{76293945313}{12715657552}$ = $6 + \frac{1}{12715657552}$	$10^{-9}$

**Exemple 2:**  $b = 1$ ;  $a = 2$ ;  $g = \sqrt{2}$

<b>h</b>		<b>m</b>		largeur de l'intervalle [h,m] inférieur à
<i>en décimale</i>	<i>en fraction</i>	<i>en décimale</i>	<i>en fraction</i>	
1,333333333	$\frac{4}{3}$	1,500000000	$\frac{3}{2}$	$2 \times 10^{-1}$
1,411764706	$\frac{24}{17}$	1,416666667	$\frac{17}{12}$	$10^{-2}$
1,414211438	$\frac{816}{577}$	1,414215687	$\frac{577}{408}$	$10^{-5}$
1,414213562	$\frac{941664}{665857}$	1,414213563	$\frac{665857}{470832}$	$10^{-9}$
touche $\sqrt{\quad}$		$\sqrt{2} = 1,414213562$		

Ces expérimentations numériques peuvent sensibiliser les élèves à plusieurs résultats concernant la construction des réels, base de l'analyse :

1. distinction entre un nombre et l'écriture décimale approchée que peut donner une machine.
2. exemples de suites rapidement convergentes.
3. existence de nombres limites qui ne sont ni décimaux, ni fractionnaires.

Pour ce dernier point, voici un exemple de démonstration classique en son début mais original ensuite et extrait d'un manuel allemand de classe 9 (environ classe française de seconde)<sup>3</sup>.

### Trous sur la droite des nombres :

On se demande maintenant s'il y a vraiment un nombre rationnel racine carrée de 2. Supposons qu'il existe un tel nombre.

Alors il se met sous la forme fractionnaire  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) simplifiée le plus possible.

La fraction  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p \times p}{q \times q}$  est alors également non simplifiable, et son dénominateur est différent de 1. Alors  $\left(\frac{p}{q}\right)^2$  n'est pas un nombre entier, notamment non égal à

2. C'est en contradiction avec notre hypothèse qu'il existe un nombre rationnel  $\frac{p}{q}$  avec  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ . L'hypothèse était donc fausse ; il n'existe pas de nombre rationnel de carré 2.

La longueur de la diagonale d'un carré de côté 1cm ne peut pas être exprimée par un nombre rationnel en cm.

Autrement formulé : le nombre 2 n'a pas de racine carrée dans  $\mathbb{Q}$ . Des études analogues pour les autres entiers naturels montrent que :

Les nombres entiers naturels, qui ne sont pas des carrés d'entiers, n'ont pas de racine carrée dans  $\mathbb{Q}$

### Intervalle emboîtés :

On peut décrire précisément le lieu d'un point P de la droite réelle, qui ne correspond à aucun nombre rationnel, à travers des nombres. Comme le point P

---

3. Référence du livre : Lambacher Schweizer, Sachsen ; Klett, 1995.

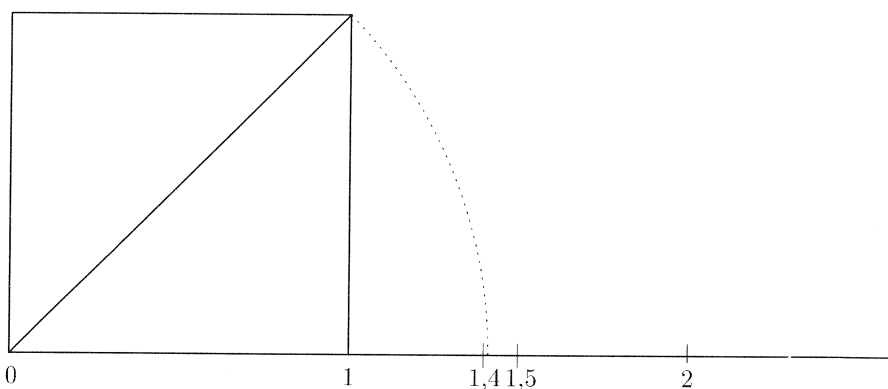
correspondant au côté d'un carré d'aire 2 se situe :

entre	1	et	2	car	$1^2$	$< 2 <$	$2^2$
entre	1.4	et	1.5	car	$1.4^2$	$< 2 <$	$1.5^2$
entre	1.41	et	1.42	car	$1.41^2$	$< 2 <$	$1.42^2$
entre	1.414	et	1.415	car	$1.414^2$	$< 2 <$	$1.415^2$
...		...		...			...

On obtient sur la droite une suite infinie d'intervalles  $[A_1B_1]$  ;  $[A_2B_2]$  ;  $[A_3B_3]$  ; ... d'amplitudes respectives  $0, 1$  ;  $0, 01$  ;  $0, 001$  ; ...

Tous les nombres, qui par exemple sont compris entre 1 et 2 (1 et 2 compris) forment l'intervalle  $[1; 2]$ . Les nombres rationnels qui appartiennent aux intervalles  $[1; 2]$ ;  $[1, 4; 1, 5]$ ;  $[1, 41; 1, 42]$ ; ... construisent des intervalles emboîtés (figure 19) :

On a pris 10 cm pour le côté du carré - Puis 10 cm entre 1,41 et 1,42 .



Agrandissement

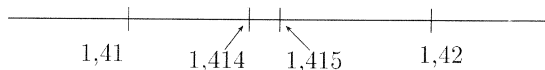


figure 19

1. chaque intervalle est inclus dans le précédent,
2. l'amplitude de chaque intervalle va diminuant et peut devenir aussi petite que souhaitée (c'est-à-dire plus petite que tout nombre positif arbitrairement petit).

Le point  $P$  appartient à tous les intervalles emboîtés. Chaque autre point  $Q$  ( $\neq P$ ) n'appartient pas à tous les intervalles parce que ceux-ci seront finalement d'amplitude plus petite que  $[PQ]$  : les intervalles emboîtés  $[1; 2]$  ;  $[1, 4; 1, 5]$  ;  $[1, 41; 1, 42]$  ; ... déterminent le point  $P$  sans équivoque.

Les intervalles emboîtés déterminent sur la droite réelle exactement un point.



## Quelques approches de démonstration de formules.

Maintenant que l'existence de nombres irrationnels est en place, nous pouvons poser la question de la légitimité des formules notamment des formules d'aires mettant en jeu de tels nombres. Prenons simplement l'aire d'un rectangle :

Tout élève sortant de l'école primaire connaît la formule : *longueur*  $\times$  *largeur* pour mesurer une telle aire. Et peut-être saura-t-il aussi la justifier sur un exemple. Si la longueur mesure 5 cm et la largeur 3 cm, le rectangle est constitué de  $5 \times 3$  carrés unités de côté un cm. Et donc le rectangle mesure  $15\text{cm}^2$  (figure 20).

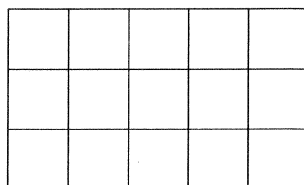


figure 20

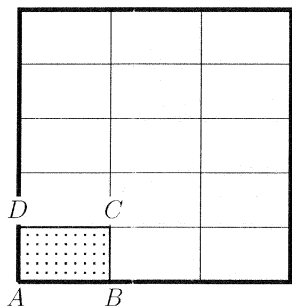


figure 21

La justification est déjà moins immédiate lorsque les dimensions du rectangle  $ABCD$  s'expriment par des fractions de l'unité de longueur, par exemple  $L = \frac{1}{3}$  et  $l = \frac{1}{5}$ . Dans ce cas, on décomposera le carré unité  $U$  selon la figure 21 en mettant en évidence que le rectangle  $ABCD$  mesure  $\frac{1}{15}$  de l'aire du carré unité.

De même, lorsque plus généralement  $L = \frac{m}{n}$  et  $l = \frac{r}{s}$ ;  $m, n, r, s$ , entiers strictement positifs quelconques, le rectangle  $ABCD$  (figure 22) mesure  $m \times r$  parties du carré unité  $U$ , chaque partie valant un  $(n \times s)$ -ième de ce carré unité (figure 22 avec  $L = \frac{5}{8}$  et  $l = \frac{3}{4}$ ).

Mais que devient cette formule lorsque les côtés sont irrationnels?

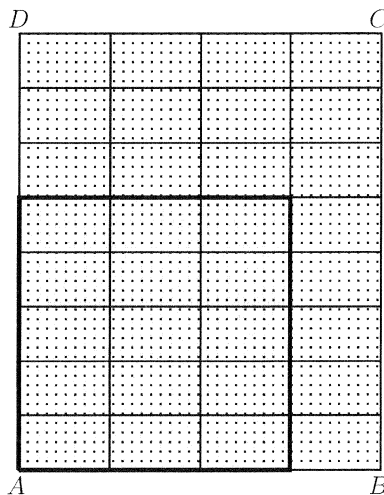


figure 22

Reprenons par exemple la comparaison des triangles équilatéraux construits respectivement sur le côté et la diagonale du carré (partie I. figure 4). Nous avons

démontré, sans recours à la mesure, que le second est double en aire du premier. Pour le démontrer en utilisant la formule de l'aire du rectangle (à laquelle on peut se ramener), on écrira, en posant  $a$  la longueur du côté du carré,

$$1. \text{ Aire}(ABC) = \frac{1}{2}a \times a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(après avoir fait mesurer la hauteur au moyen du théorème de Pythagore).

$$2. \text{ Aire}(ADE) = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \times \left(a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 2 \times \text{ Aire}(ABC).$$

Cela peut donner une illusion de facilité comme la donne toujours une formule toute faite, mais quel est l'élève de troisième capable de faire un tel calcul abstrait sur des symboles mathématiques et en comprenant ce qu'il fait?

Est-ce à dire qu'il faut en rester à la comparaison des grandeurs, sans utilisation de la mesure, sans utilisation des formules usuelles, à la manière des Anciens?

A cet endroit il n'est peut-être pas inutile de redéfinir la relation entre grandeurs et nombres que l'on appelle **mesure**.

**Je ne saurais mieux expliquer cette relation que A. A. Cournot ne le fait dans un livre un peu ancien<sup>4</sup>, mais que je recommande aux professeurs de mathématiques pour sa clarté et la profondeur de ses réflexions.**

*Mesurer une grandeur, c'est la rapporter à une autre grandeur de même espèce prise pour unité ; sa mesure, c'est son rapport avec cette grandeur : réciproquement, le rapport d'une grandeur A à une autre grandeur B de même espèce, c'est le nombre ou l'expression numérique qui donnerait la mesure de A, si B était prise pour unité (...) D'après cela, si les grandeurs A et B, rapportées à une troisième grandeur C prise pour unité, sont respectivement mesurées par les nombres m et n (...) la valeur fractionnaire m/n est (...) l'expression du rapport de A à B (...)*

*Le rapport de deux grandeurs A et B ne saurait changer avec la troisième grandeur C, dont on fait choix arbitrairement pour l'unité de mesure. Si les grandeurs A et B, rapportées à cette troisième grandeur C, se trouvent exprimées par des valeurs ou des nombres fractionnaires. on remplacera les nombres fractionnaires par des nombres entiers, en changeant convenablement l'unité de mesure, et l'on retombera sur le cas envisagé d'abord.*

*Deux grandeurs A et B sont dites commensurables, lorsqu'elles ont une commune mesure, ou lorsqu'on peut assigner une grandeur de même espèce qui soit une partie aliquote de l'une et de l'autre : dans le cas contraire, les grandeurs sont dites incommensurables. (...)*

---

4. A.A. Cournot ; De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie ; Hachette ; 1847 ; p..26-32.

*Des grandeurs de même espèce ou d'espèces différentes peuvent être liées entre elles, de manière que, si l'une vient à changer, l'autre change nécessairement, soit qu'elles augmentent et diminuent ensemble, soit que l'une augmente quand l'autre diminue, ou réciproquement. Or, ce qu'on peut imaginer de plus simple quand des grandeurs sont ainsi liées entre elles, c'est qu'elles augmentent ou diminuent proportionnellement, en sorte que, si l'une devient deux fois, trois fois, quatre fois plus grande, l'autre devienne aussi double, triple, quadruple, et ainsi de suite. Telle est, dans l'ordre des phénomènes naturels, la liaison entre l'espace décrit par un corps qui n'éprouve plus, une fois mis en mouvement, l'action d'aucune force ni d'aucune résistance, et le temps pendant lequel il se meut. Telle est encore, pour passer au faits les plus vulgaires dans la vie pratique, la liaison entre la quantité d'une denrée qui se vend à tant le mètre, le litre, le kilogramme, et le prix de la quantité vendue.*

*De même qu'on obtiendra l'espace décrit pendant 2, 3, 4 unités de temps, en multipliant par 2, 3, 4, le nombre qui mesure l'espace décrit pendant l'unité de temps, on obtiendra l'espace décrit pendant la moitié, le tiers, le quart d'une unité de temps en divisant ce nombre par 2, 3, 4. On obtiendrait l'espace décrit pendant  $\frac{2}{3}$  d'unité de temps en divisant ce nombre par 3, puis en doublant le résultat, et ainsi de suite. La liaison dont il s'agit conduira donc selon les cas, tantôt à une multiplication arithmétique, tantôt à une division arithmétique, tant, et plus généralement, à une combinaison de ces deux opérations de calcul. Cela dépendra des valeurs particulières des grandeurs qu'on aura à comparer ; et même, ces grandeurs ne variant pas, il suffirait de changer l'unité de temps qui est arbitraire, pour substituer à une opération arithmétique l'opération inverse.*

*Cependant la nature d'une telle liaison est indépendante, non-seulement des valeurs particulières attribuées aux grandeurs que l'on compare, mais encore des unités dont on a fait choix pour chaque espèce de grandeurs. Si donc nous voulons conserver dans le signe ou dans l'expression de l'idée le degré d'abstraction ou de généralité qui se trouve dans l'idée même, il faudra désigner par le même terme le lien mathématique entre le nombre  $h$  qui mesure l'espace décrit dans l'unité de temps, le nombre  $t$  qui mesure le temps écoulé durant le mouvement, et le nombre  $l$  qui mesure l'espace décrit pendant ce temps ; les trois nombres  $h$ ,  $t$ ,  $l$ , pouvant être indifféremment entiers ou fractionnaires. On dira en conséquence dans tous les cas que  $l$  est le produit de  $h$  et de  $t$ , ou qu'on obtient  $l$  en multipliant  $h$  par  $t$  ; et alors on considérera la division de  $h$  par 2, 3, 4, etc., comme la multiplication de  $h$  par les fractions  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ , etc.*

Cette relation que nous écrivons aujourd'hui sans difficulté :  $l = h \times t$ , faisait problème pour Galilée, pourtant l'un des principaux initiateurs de la physique classique au *XVII<sup>me</sup>* siècle. Elle faisait problème parce que Galilée était encore totalement prisonnier de la pensée grecque et de la théorie des proportions développées par Euclide dans le livre V des *Éléments*, pour gérer le problème des grandeurs incommensurables. On aura une idée de la complication à laquelle échappent nos élèves qui disposent de la notion de mesure et des relations algébriques telle que l'explique Cournot ci-dessus, en prenant connaissance de la manière dont Galilée exprime la loi du mouvement uniforme.

### **Théorème I - Proposition I**

Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2}$$

pour  $v$  donné

### **Théorème II - Proposition II**

Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\iff t_1 = t_2$$

### **Théorème III - Proposition III**

Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

Pour  $e$  fixé

### **Théorème IV - Proposition IV**

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2}$$

### Théorème V - Proposition V

Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales et sur des espaces inégaux, alors le rapport des temps sera composé du rapport des espaces et du rapport inverse des vitesses.

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{v_2}{v_1}$$

### Théorème VI - Proposition VI

Si deux mobiles sont animés d'un mouvement uniforme, le rapport de leurs vitesses sera composé du rapport des espaces parcourus et du rapport inverse des temps.

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{t_2}{t_1}$$

Tout le travail historique sur la numération décimale de position, sur le calcul symbolique et la construction de l'algèbre, sur la numérisation des raisons (Descartes) a totalement modifié l'approche que nous pouvons faire aujourd'hui de la mesure des grandeurs. La formule  $e = v t$  où  $e$ ,  $v$ ,  $t$  désignent des nombres mesurant des grandeurs de nature totalement hétérogènes efface les contraintes qu'imposait la théorie des proportions entre grandeurs homogènes telle que Galilée était encore obligé de l'énoncer. Mais il serait dangereux de court-circuiter totalement ce travail sur les grandeurs et les nombres qui permet de les rapprocher, car les proportions restent présentes mais cachées dans les questions d'unité de mesure. Et l'on sait combien ces questions sont source d'erreur chez les élèves, lorsque l'on passe trop vite des grandeurs à leur mesure.

Ce point étant précisé, voyons alors quelques exemples de démonstrations mettant en jeu le caractère infinitaire des nombres réels. Elles peuvent initier, nous semble-t-il, une réelle préparation à l'enseignement de l'analyse au lycée, surtout avec les outils calculatoires modernes.

## La formule de l'aire du rectangle

**lorsque l'un des côtés au moins est irrationnel.**

Soit le rectangle  $ABCD$  de hauteur rationnelle  $h$  de longueur réelle non rationnelle  $L$ , et  $\mathcal{A}$  son aire exprimées dans une unité définie. Il existe donc des rationnels  $a_1, a_2, a_n, b_1, b_2, b_n$  tels que :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n < L < b_n < b_{n-1} < \dots < b_2 < b_1$$

et  $L - a_n$  et  $L - b_n$  soient tous deux aussi petits que l'on veut.

Je dis que  $\mathcal{A} = h \times L$ .

En effet, si ce n'était pas le cas, nous aurions

$\mathcal{A} < h \times L$  ou  $\mathcal{A} > h \times L$

Supposons par exemple que  $\mathcal{A} < h \times L$

Donc  $\mathcal{A} = h \times x$  avec  $x < L$

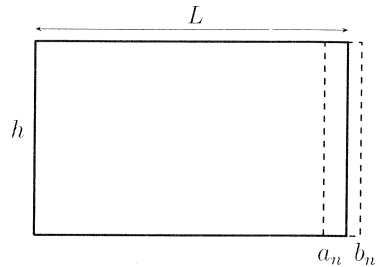


figure 23

Il y a un nombre  $a_n$  tel que  $x < a_n < L$  puisque la différence  $L - a_n$  peut être rendue aussi petite que l'on voudra, en particulier, plus petite que  $L - x$ .

Le rectangle de côtés  $h$  et  $a_n$  a ses côtés rationnels, donc son aire mesure  $h \times a_n$ . Donc  $h \times x = \mathcal{A} < h \times a_n$ . Mais  $a_n < L$  donc  $h \times a_n < \mathcal{A}$

Cela est contradictoire et l'hypothèse  $\mathcal{A} < h \times L$  ne tient pas. On démontrerait de même l'absurdité de l'hypothèse inverse. Il est bien clair qu'un tel raisonnement reste inaccessible à l'élève moyen de collège, en l'état actuel. Mais rien n'interdit d'y préparer en travaillant sur un rectangle particulier, par exemple de dimensions 1 et  $\sqrt{2}$  et en prenant les suites de nombres  $a_n$  et  $b_n$  du tableau de l'exemple 2 page 16.

Si le rectangle  $ABCD$  a maintenant ses deux dimensions irrationnelles  $l$  et  $L$ , il suffit de reprendre la démonstration précédente avec des rectangles tous de Longueur  $L$ , et des largeurs rationnelles  $a_1, a_2, a_n, b_1, b_2, b_n$  telles que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n < L < b_n < b_{n-1} < \dots < b_2 < b_1$$

## Le nombre $\pi$

Les élèves connaissent deux formules faisant intervenir le nombre  $\pi$  :

- celle de la longueur d'un cercle de rayon  $R$  :  $L = 2\pi R$
- celle de l'aire d'un disque de rayon  $R$  :  $A = \pi R^2$

Il est surprenant et très regrettable que l'existence de ces deux formules ne suscite (plus?) aucune interrogation chez les élèves qui sortent du collège. Une sensibilisation aux questions et au raisonnement mathématiques voudrait que l'on en soulève pourtant au moins deux :

- que prend-t-on comme définition de  $\pi$ ?
- quelle relation y-a-t il entre les deux formules?

Historiquement, la définition correspond à la première formule :  $\pi$  est le nombre qui mesure la circonférence (perimetroz - périmètre) d'un cercle de diamètre l'unité de longueur.

Si l'on accepte cette définition de  $\pi$  il faut alors, au minimum, poser la question :

*Pourquoi ce nombre  $\pi$  mesure-t-il aussi l'aire du disque de rayon l'unité de la longueur ?*

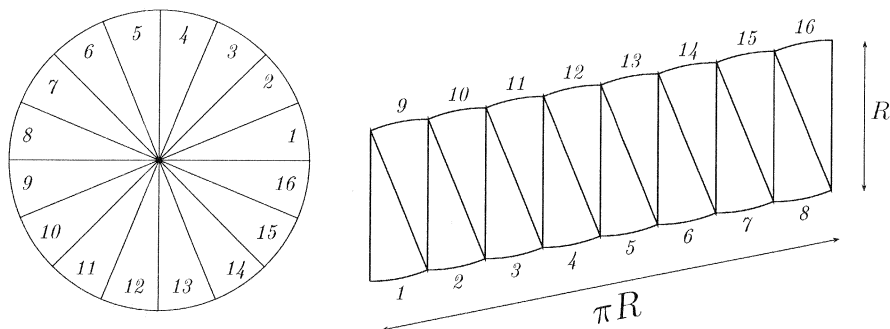


figure 24

Une démonstration simple, accessible aux élèves de collège peut être celle-ci, bien connue :

On partage le cercle en secteurs égaux de plus en plus nombreux, que l'on déroule selon la figure. En augmentant indéfiniment le nombre de secteurs on obtient à la limite un rectangle de côtés  $R$  et  $\pi R$ , d'où le résultat.

## Le volume d'une sphère

On peut encadrer ce volume par les volumes du cylindre circonscrit et du cône inscrit.

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \times r < V < \pi r^2 \times r$$

En faisant la moyenne entre les deux encadrements on trouve un volume de  $\frac{1}{3}\pi r^3$ , c'est-à-dire le volume de la différence entre le cylindre et le cône.

On peut montrer qu'effectivement le volume de la demi-sphère est égal à cette différence, en comparant l'aire ( $a_2$ ) d'une section horizontale de la sphère et l'aire ( $a_1$ ) d'une section du volume compris entre le cône et le cylindre.

$$a_1 = \pi r_2^2 - \pi x_2^2 \quad ; \quad a_2 = \pi r_2^2 = \pi(r_2^2 - x_2^2)$$

En appliquant le principe dû à Cavalieri on peut affirmer l'égalité des volumes correspondants. Donc le volume de la sphère est égal à  $\frac{4}{3}\pi r^3$

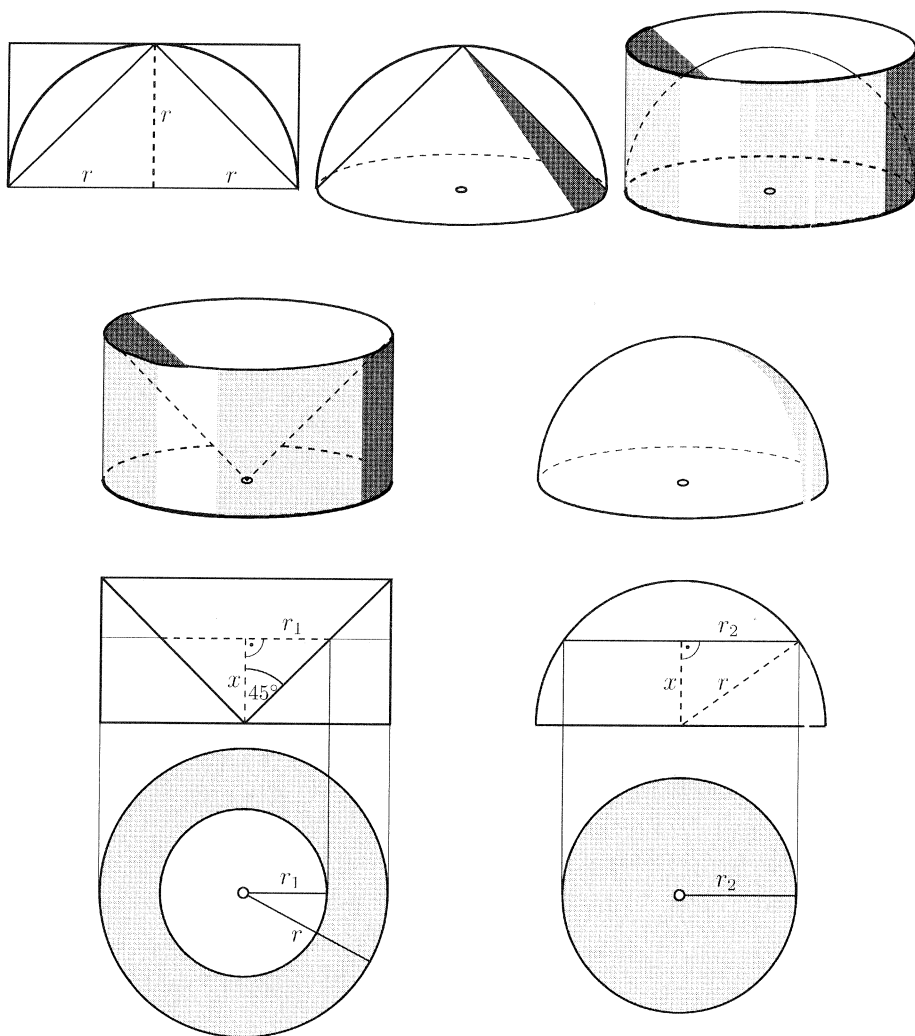


figure 25

## Conclusion

La grande difficulté de l'enseignement de l'analyse réside dans l'obstacle incontournable de l'infini. La mesure des grandeurs bute constamment sur des processus infinitésimaux, se soldant par l'impossibilité d'exprimer certaines mesures à l'aide de nombres. On connaît le choc provoqué chez les Pythagoriciens par la première confrontation de l'intelligence humaine avec ce problème. Le vocabulaire mathématique en a gardé la trace jusqu'à aujourd'hui, comme une empreinte fossile: le



mot d'irrationnel. Mais c'est en même temps ce choc qui a obligé le mathématicien philosophe à quitter le monde de la perception sensible pour un monde intelligible d'objets mathématiques abstraits et idéaux, soumis à des calculs.

*Avant la découverte de l'incommensurabilité, la droite reste un objet confondu avec ses modèles physiques : trait graphique, faite d'un toit, etc. Si c'est là ce qu'on entend par objet de l'intuition, c'est retomber dans l'empirique et il n'y a là rien qui soit de l'ordre d'une notion mathématique. C'est dans l'opération de mesure que s'est dévoilée la vraie nature de l'objet "droite", son essence idéale, plus précisément dans le processus de mesure d'un segment incommensurable à l'unité de mesure : le caractère illimité du processus, dont il a été question ci-dessus à propos de l'usage de l'algorithme d'Euclide, révèle, au sein même de la finitude du segment, une infinité qui, même conçue comme potentielle, ne peut appartenir qu'à un objet idéal, qui se trouve défini en tant que tel par ce processus même (Pour un objet empirique, on atteint le seuil de la perception en un nombre fini d'étapes). Mais il n'y a là aucune intuition rationnelle qui livrerait d'avance, dans une évidence originnaire, les propriétés d'un tel objet : celles-ci sont à découvrir pas à pas, ce qui n'exclut pas que certaines d'entre elles aient pu être dégagées dès la période historique antérieure, où la droite était confondue indûment avec ses modèles empiriques, c'est-à-dire avec sa représentation. Dans tous les cas, ce sont les actes opératoires qui dévoilent les propriétés objectives en parcourant l'enchaînement des médiations nécessaires : il n'y a pas de vision immédiate qui les ferait d'un seul coup apparaître (...)*

Il me semble que c'est dans cette articulation qu'il faudrait penser la question de la mesure des grandeurs, en vue d'une préparation à l'apprentissage de l'analyse : en maintenant constamment la tension existant entre l'intuition des grandeurs qui les relie à une réalité physique sensible et observable, et un raisonnement qui dépasse ce caractère sensible, par la nécessité de prouver. Autrement dit : maintenir toujours l'objet grandeur à côté de sa mesure. Si nous passons trop vite au seul numérique, nous habituons l'élève à réduire sa réflexion mathématique à la seule application de formules, au détriment du raisonnement. Sa capacité de penser rationnellement, scientifiquement se perdra, tant pour les mathématiques que pour la physique.

Beaucoup de formules sont déjà données à l'école primaire, qui sont reprises au collège. De sorte qu'on a l'impression qu'elles sont reprises simplement comme une sorte de maintenance, pour ne pas les oublier, mais sans qu'elles soient l'objet de questionnement. Or pour préparer à l'apprentissage de l'analyse, d'une façon qui ne soit pas abstraite, les grandeurs et leur mesure sont l'occasion de mettre en place des premiers éléments de méthode, des premiers exemples de raisonnement, et une première intuition de la richesse de l'ensemble des nombres réels.

## Bibliographie

[1] CAVEING M., 1982. *Quelques remarques sur le traitement du continu dans les Éléments d'Euclide et la Physique d'Aristote*; dans *Penser les mathématiques*, Point Sciences, Seuil.

[2] COURNOT A.A., 1847. *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*; Hachette.

[3] DELEDICQ CASIRO, 1998. *Pythagore et Thalès*; ACL, les Éditions du Kangourou.

[4] FRIEDELMEYER J.P., octobre 1993. *Éclairages historiques pour l'enseignement de l'analyse*; *REPÈRES-IREM* n°13.

[5] FRIEDELMEYER J.P., avril 1998. *Les aires : outil heuristique, outil démonstratif*; *REPÈRES-IREM* n°31.

[6] GALILÉE. *Discours concernant deux sciences nouvelles*; traduction Clavelin 1970; Armand Colin.

[7] HOFFMAN Jos., 1965 *Aus der Frühzeit der Infinitesimalmethoden*, Archiv. Hist. Exact Sciences; Vol.2.

[8] IREM de Strasbourg -1996 - Groupe d'Histoire des Mathématiques de l'IREM de Strasbourg: *Activités géométriques pour le collège et le lycée*; Brochure IREM ISBN 2-911446-003 (2 volumes).

[9] LEBESGUE H. *La mesure des grandeurs*; réédition 1975; Librairie Scientifique et Technique; A. Blanchard.

[10] STOLL A., avril 1998. *Les lunules d'Hippocrate de Chio*; *REPÈRES-IREM* n°31.

# LA GÉOMÉTRIE D'ORONCE À L'ATTAQUE

OU

## QUEL THÉORÈME DE THALÈS

POUR LA MESURE DES OBJETS INACCESSIBLES ?

Frédéric MÉTIN

IREM de DIJON

*Il y a deux choses, qui en toute discipline ont de coutume estre agreables, plaisantes & utiles à tous studieux. L'une est la facile introduction à la discipline : laquelle la voye de doctrine & le sens universel explique. L'autre est vue estre le fruit colligé d'icelle discipline, compensateur agréable des travaux entrepris.*

Oronce Fine

L'extrait cité du prologue qu'Oronce Fine donne à sa *Pratique de Géométrie*<sup>1</sup> convaincra peut-être le lecteur qu'une géométrie peut *passer à l'attaque*. La question est de savoir comment une théorie comme celle qui est exposée dans les *Éléments* d'Euclide a pu se trouver mise en pratique, mais aussi, plus actuellement, comment les connaissances étudiées en classe peuvent être utilisées à l'extérieur de l'école. Nous semblons en effet avoir oublié l'existence même du terme de "pratique", qui ne devrait pas concerner que les applications ou les exercices proposés aux élèves, mais revêt une réelle dimension d'action. L'aspect "agréable, plaisant, et utile" signalé par Oronce Fine paraît bien irréel, il doit être replacé dans son contexte, à une époque où non seulement les étudiants représentaient une infime proportion de la population, mais en plus n'étudiaient que très peu les sciences : un soupçon d'Euclide, pour son aspect logique, un peu d'Aristote et de catégories, bien pratiques pour les disputes rhétoriques. . .

On peut lire également, dans le prologue, le désir de mettre en valeur plusieurs aspects des pratiques scientifiques et techniques de l'époque et d'attirer les étudiants vers la science. Mais Oronce Fine n'est pas un inventeur : il reprend, justifie, magnifie des pratiques ancestrales. Si son ouvrage est bien sa Géométrie pratique, c'est avant tout une affaire de style, de discours et d'illustrations (puisqu'il composait et gravait lui-même les figures de ses livres). Pour la "petite histoire", Oronce ne fut fier que d'un résultat : sa quadrature du cercle. Mais le mathématicien portugais Pedro Nuñez montra très vite qu'il s'était trompé, et devant l'aveuglement du professeur royal vieillissant, il publia en 1546 l'humiliant *De Erratis Orontii Finaei*, qui allait ridiculiser notre auteur (et sa réputation s'en est trouvée ternie jusqu'à aujourd'hui).

---

1. Traduction en français de Pierre Forcadel en 1570 (voir la note 6, page suivante)

Notre but n'est pas de réhabiliter Oronce, mais de mettre en évidence la richesse de tout texte ancien, qui peut donner lieu à des activités en classe, surtout lorsqu'il se veut pratique. Mais, comme la postérité est injuste en ne voyant qu'un médiocre calculateur en Fine, rappelons-le, à la suite de Michaud<sup>2</sup>: *Tel, à la faveur des connaissances actuelles, s'est acquis la réputation d'habile géomètre, qui n'eut peut-être pas outrepassé les travaux d'Oronce sous François 1<sup>er</sup>.*

## Que sait-on de l'auteur ?

D'une manière générale, le ton des biographes suit l'époque : au temps d'Oronce Fine, il est plutôt flatteur, comme sous la plume d'André Thevet<sup>3</sup> qui cite *cet Archimède Dauphinois, qui par inclination naturelle s'adonna entre autres aux Mathématiques qui pour lors estoient rares & comme ensevelies.*



Portrait d'Oronce Fine  
(internet, origine inconnue)

A partir de Montucla<sup>4</sup>, cela change : le ton devient presque méprisant (Montucla ne s'occupe que des vrais mathématiciens). Oronce est présenté, ainsi que Charles de Bovelles, comme un scientifique *fort au dessus de sa réputation même s'il ne fut pas inutile au rétablissement des mathématiques.* C'est que Nuñez, mathématicien reconnu par la postérité, a porté l'estocade et qu'il est sûrement plus rapide pour l'historien d'abandonner Oronce à son infamie. . .

Voici quelques indications biographiques : Oronce Fine est né en 1494 à Briançon, mais ayant perdu son père assez tôt, il part étudier à Paris. Les mathématiques sont alors fort peu prisées, mais l'intéressent au point qu'il les enseigne au Collège de Navarre à partir de 1516.

Une sombre histoire (une de ses prédictions astrologiques aurait-elle déplu ?) le mène en prison de 1518 à 1524 (on ne rigolait pas à cette époque), puis sa réputation de scientifique s'accroît tant que François 1<sup>er</sup> le nomme Professeur Royal en 1530. Il publie de nombreux ouvrages, dont il donne plusieurs versions (les textes changent peu mais les illustrations sont totalement revues), ce qui ne suffira pas à en faire un homme riche, puisqu'il meurt totalement désargenté en 1555.

2. *Biographie universelle ancienne et moderne, . . . nouvelle édition, publiée sous la direction de M. Michaud*, Paris, C. Desplaces, 1854.

3. *Les vrais portraits et vies des hommes illustres, grecz, latins et payens recueilliz de leurs table au livre, medalles antiques et modernes.* Par André Thevet, angoumoisins, Premier Cosmographe du Roy. A Paris, par la veusue I. Kervert et Guillaume Chaudiere Rue St-Jacques. 1584

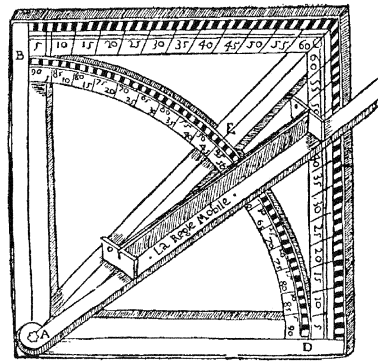
4. Jean-Etienne Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Paris, Agasse, An VII-An X. Part. III, Liv. III, p. 574.

## L'ouvrage

Apparue pour la première fois dans la *Protomathesis* de 1532<sup>5</sup>, la *Géométrie pratique* connut beaucoup de rééditions, ou de refontes, en particulier pour ce qui concerne l'usage du "quarré géométrique" et des instruments. Nous avons consulté la première traduction française, due à Pierre Forcadel<sup>6</sup> et parue en 1570 (BM Dijon, cote n° 51119). Ce livre se situe dans la tradition des géométries pratiques et des traités d'arpentage et de toisé en ce qu'il est avant tout un recueil de moyens de mesurer (longueurs, superficies puis volumes.) En revanche, il n'est pas question de problèmes de construction, inscription, circonscription ou autres, qui constituent aussi une branche (euclidienne) de la géométrie pratique, même si le problème de la quadrature du cercle amène des considérations assez abstraites. Il est remarquable de constater qu'un professeur royal a pu s'intéresser à ce genre de choses, d'autant que presque tous les suivants feront de même.

On lit immédiatement la différence avec une géométrie théorique : Oronce Fine ne donne aucune définition préalable (sans doute car il l'a fait dans sa *géométrie théorique*) mais explique tout de go la fabrication du premier instrument, le quarré géométrique, qui sert à effectuer des visées en vue d'utiliser des proportions.

L'instrument est rudimentaire et bien connu à l'époque, il n'est pas de l'invention d'Oronce. On retrouve son principe dans plusieurs ouvrages de l'époque, en particulier celui de Stoffler sur l'astrolabe, traduit en français en 1560<sup>7</sup>. Le cadre est fixe (l'un de ses montants est vertical) et la règle mobile, surmontée de pinnules comme dans l'astrolabe, est utilisée pour les visées. Une utilisation de la 4<sup>ème</sup> proposition du livre VI des *Éléments* d'Euclide (un équivalent de la propriété des triangles semblables, et pas tout à fait de notre "théorème de Thalès", voyez ci-dessous) permet de calculer la distance à mesurer.

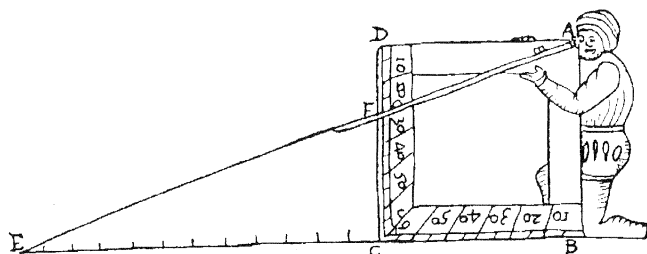


5. En quelque sorte, la somme de ses connaissances, un cours complet de sciences, où la géométrie pratique côtoie l'astronomie et la géographie, ainsi que l'arithmétique, pratique elle aussi.

6. *La Pratique de la géométrie d'Oronce Professeur du roy ès mathématiques, en laquelle est compris l'usage du Quarré Géométrique, etc.* Reueüe & traduicte par Pierre Forcadel, Lecteur du Roy ès Mathématiques. A Paris chez Gilles Gourbin, 1570.

7. Et comme il a été publié en français chez Guillaume Cavellat ("à la Poule Grasse"), les illustrations sont les mêmes que celles d'un autre ouvrage sur l'astrolabe, celui de Dominique Jacquinet!

Par exemple, au chapitre 3: *Comme sont mesurées les lignes droictes, estendues en une superficie plane terrestre.*



La ligne  $EB$  étant la ligne à mesurer, il suffit de poser le quarré sur le sol et d'effectuer la visée. Puis, *telle raison que a le costé du quarré ad, à la part'e couppee df, icelle garde aussi la ligne donnée be, à icelluy costé ab.*

Autrement dit et moyennant une trahison de style :

$$AD \text{ est à } DF \text{ comme } EB \text{ est à } AB, \text{ ou encore } \frac{AD}{DF} = \frac{EB}{AB}$$

ce qui permet (mais Oronce ne l'écrit pas) de calculer  $EB$ , connaissant la taille du montant  $AB$  et lisant la graduation sur  $DC$ . La démonstration est donnée dans le texte, elle consiste à prouver, par les *Éléments* d'Euclide, que les deux triangles  $ADF$  et  $EBA$  sont équiangles, donc proportionnels; on voit ici la supériorité de la proposition VI-4 d'Euclide sur la proposition VI-2 (notre bon vieux "Thalès") en termes d'efficacité: allez donc faire reconnaître à vos élèves une "situation de Thalès" dans les triangles  $ADF$  et  $ABE$ ; il faut au moins deux applications du théorème, sous la forme que nous lui connaissons, pour établir la proportion. Reconnaissons que la pensée des triangles semblables est plus intéressante ici et que nos "figures-clé" ne sont pas assez (ou sont trop) nombreuses.

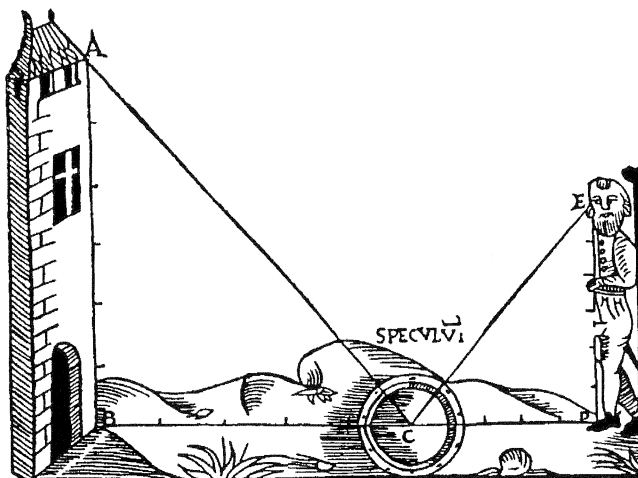
## Intermède : à propos de "Thalès"

Il y a dans le livre VI des *Éléments* d'Euclide<sup>8</sup> plusieurs propositions qui mériteraient notre qualification de théorème de Thalès, qualification dont on sait depuis le travail d'Henri Plane<sup>9</sup> à quel point elle est récente. Si cette fameuse qualification provient de la légende selon laquelle Thalès serait allé montrer aux Égyptiens comment mesurer la hauteur d'une pyramide (l'étude du papyrus Rhind a montré qu'ils savaient parfaitement le faire, bien avant la possible venue du Grec), alors la plus adaptée serait la proposition VI-4: "Dans les triangles équiangles sont en proportion les côtés autour des angles égaux, et homologues ceux qui sous-tendent les angles égaux" alors que la VI-2 revient à notre théorème actuel et à sa réciproque.

8. Euclide, *Les Éléments*, vol.II, traduits du texte de Heiberg par B. Vitrac, Paris, PUF, 1994.

9. Henri Plane "Thalès, un centenaire bien français!" IREM de Dijon, 1995.

Il y a dans un cas deux triangles proportionnels dont la situation relative n'est pas imposée (même si pour sa démonstration, Euclide les place de telle sorte que deux des côtés homologues soient dans le prolongement l'un de l'autre), et dans l'autre un seul triangle coupé par une droite qui en fait apparaître un autre à l'intérieur du premier. Les propositions qui suivent dans le texte d'Euclide sont d'ailleurs les fameux "cas d'égalité", dont nous faisons le retour à l'école après une trentaine d'années d'absence...

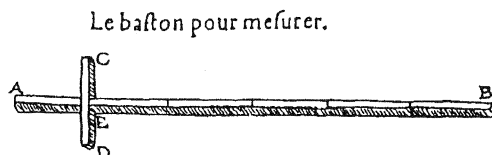


Voyez la figure ci-dessus, donnée aussi dans le livre d'Oronce Fine, illustrant une méthode de mesure visuelle à l'aide d'un miroir. Ne serait-ce pas une magnifique figure-clé à donner aux élèves? N'est-ce pas encore plus simple de considérer les triangles proportionnels?

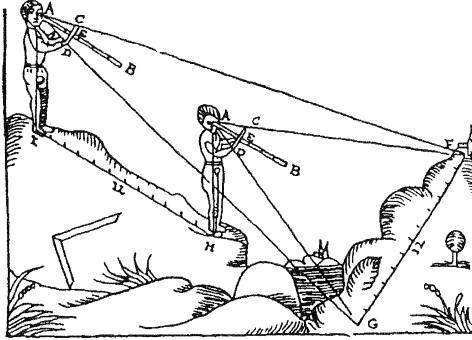
## Retour au texte

Le chapitre 6 propose la *description d'un autre instrument, avec lequel est obtenüe la longueur des lignes droictes & inaccessibles, & constituées ou eslevées orthogonalement au plan terrestre*. Il s'agit du fameux "bâton de Jacob", inventé par Levi ben Gerson, savant juif de Bagnols sur Cèze, au 14<sup>ème</sup> siècle.

Le grand bâton est divisé en six parties égales (ou plus) et coulisse à l'intérieur du petit bâton transversal dont la longueur est égale à celle de l'une des parties du grand. La visée est des plus simples : il suffit d'ali-



gner les extrémités C et D du petit bâton avec celles de la ligne à mesurer. Mais une seule visée ne suffit pas, il y aura donc un système de double visée.



Le principe est le suivant : l'homme est en H et effectue la première visée, le petit bâton ajusté sur une graduation précise du grand. Il déplace le petit bâton d'une division et cherche une nouvelle situation I, de sorte que les extrémités du petit bâton soient de nouveau alignées avec celles de la ligne à mesurer. Miracle de la géométrie : la longueur de la ligne à mesurer FG est égale à la distance IH !

Le plus beau dans ce texte est

qu'Oronce ne fournit pas d'explication. Évidemment, on ne peut s'empêcher d'en chercher une (encore du Thalès) et d'y impliquer les élèves qui n'en demandaient pas tant !

## Travail avec les élèves

Comme d'habitude, la première difficulté est pour eux de s'habituer à la typographie. Mais il en vient une seconde : les mots et les expressions sont vraiment plus compliqués que d'habitude (c'est un imprimé plutôt ancien, un des tout premiers traités de géométrie en français.) Ce qui démobilise de prime abord, car on ne peut éluder ce problème pour passer tout de suite au contenu mathématique. Cela peut nous rappeler les difficultés que représente notre propre langage pour nos élèves ; la différence entre Oronce et le professeur, c'est que le texte d'Oronce est étrange pour la classe et pour le professeur. Il est donc nécessaire de travailler d'abord sur une partie facile, pour laquelle toute la difficulté résidera dans le sens à donner aux mots : l'introduction ou les instructions pour la construction du carré peuvent jouer ce rôle de mise en train.

Deux extraits du texte (*Comme sont mesurées les lignes droictes, estendues en une superficie plane terrestre et la description d'un autre instrument, avec lequel est obtenuè la longueur des lignes droictes & inaccessibles*) ont été proposés à des élèves de Première (Sciences et Technologie de Laboratoire) et de Seconde (Arts plastiques) du Lycée "Le Castel" à Dijon. Ils ont donné lieu à un travail en classe puis à des séances de mesure. Si la partie théorique a été plutôt poliment reçue mais peu appréciée, les séances de mesure ont été joyeuses ! Ce n'est pas si étonnant, nous sortons assez peu de la classe et nos exercices n'ont qu'un rapport lointain avec une quelconque mise en pratique ; en outre, les voyages de classe ou les sorties au cinéma sont rarement le fait du professeur de mathématiques, alors qu'ils sont à marquer de pierres blanches dans la mémoire et l'imaginaire des classes. Il n'empêche que la sortie ne (me) suffisait pas et qu'il était nécessaire de comprendre a priori comment les visées allaient permettre l'estimation des longueurs. Tout ceci allait, du moins le



pensais-je, convaincre les élèves de la puissance des mathématiques, de leur aptitude à mesurer le monde, donc à le décrire.

Première époque, en salle : lecture du chapitre 3 (voir plus haut). Tout se passe comme prévu, les élèves n'y comprennent rien et certains refusent même d'aller plus loin ("à quoi ça sert? Vous êtes sûr que ça fait bien partie du programme?") La démonstration est particulièrement difficile à comprendre, et nous devons y passer du temps. J'aurais pu mâcher le travail en donnant un glossaire et le canevas de la démonstration, mais où aurait été le plaisir? N'est-il pas normal que la découverte ne soit pas immédiate et qu'elle dérange? Sans aller jusqu'à conduire les élèves à échec, ne les laissons pas dans l'illusion que tout est facile et que le savoir s'acquiert sans aucun effort. L'élève n'est pas la mesure de toute chose. Allez, n'ayez pas peur : ils ont disposé d'un petit schéma et de quelques indications au fur et à mesure de leur avancée (un prof doit savoir rester humain de temps en temps...)

Les Premières ont étudié le chapitre 10, dont il n'est pas question ici (mesure de la hauteur d'un édifice à l'aide d'un seul bâton planté verticalement dans le sol), la démonstration leur semblant maintenant abordable (le plus gros du travail avait été fait au chap. 3)

Les Secondes ont eu plus de chance encore avec la fin du même chapitre, où Oronce montre comment l'utilisation d'un simple miroir permet d'estimer la hauteur d'un édifice dont le pied est accessible (voir figure ci-dessus). Les deux classes ont terminé par la double visée, lecture commune, esquisse de démonstration en classe, puis rédaction complète de cette démonstration à la maison.

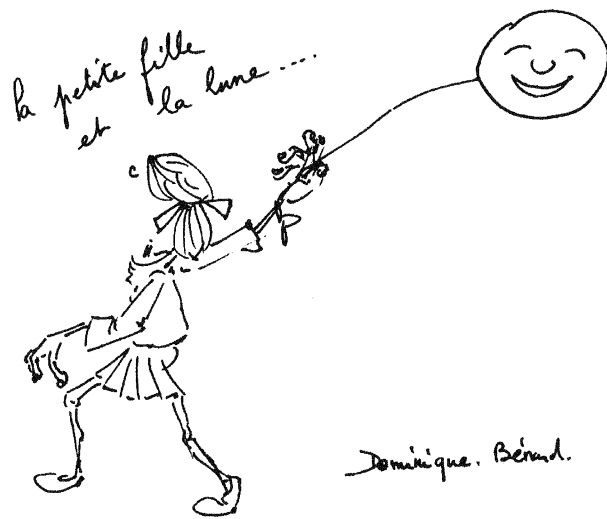
Deuxième époque, dehors. Les élèves de Première disposaient d'un bâton rudimentaire, mais suffisant pour mesurer de loin l'espace entre deux pylônes du Lycée (j'avoue : novice, j'avais oublié de demander toutes les autorisations et nous avons été obligés de rester dans l'enceinte de l'établissement.) Puis ils sont partis dans les frimas de janvier mesurer la hauteur d'un célèbre obélisque dijonnais à l'aide de la toise verticale, l'autre bâton ne servant à rien ici. Les élèves de Seconde devaient mesurer toutes les cotés possibles du Bastion de Guise (dernier grand ouvrage conservé des fortifications de Dijon) en vue d'une éventuelle reconstitution en maquette (qui ne fut pas construite), à l'aide du bâton, du miroir et du carré géométrique. L'intérêt d'un bastion est qu'il permet une remise en perspective historique de ces anciennes méthodes : il ne me fut pas difficile de convaincre les élèves que les mousquets des défenseurs les auraient vite décimés s'ils avaient essayé de s'approcher du rempart ! Joyeux souvenir...

Par hométété, je dirai ce qui s'est passé en rentrant en classe : nous rendant compte de l'écart ahurissant entre les diverses mesures (plus de 20%), nous avons dû discuter de l'attitude à adopter pour décider des valeurs des longueurs. Les rigolos écartés (les deux mesures extrêmes), il a suffi d'un simple calcul de moyenne pour mettre tout le monde d'accord, la méthode des moindres carrés étant encore hors de portée ! Les mathématiques sont toutes puissantes pour mesurer le monde, certes, mais il faut éviter de les appliquer...

Je dirais qu'aujourd'hui, un traitement "statistique" des mesures obtenues sur le terrain me paraît une bonne continuation de cette activité, d'autant plus que nos programmes de seconde nous y engagent. Ne pourrait-on pas même en profiter pour lancer la question de la validité d'une "preuve par sondage"? Une confrontation de méthodes de mesure (avant d'avoir abordé la question de la démonstration de leurs fondements théoriques) avec ce qu'elles nous permettent d'obtenir effectivement sur le terrain donnerait certainement des angoisses aux enseignants, mais aussi une vision assez intéressante de la preuve, non? Par exemple, utiliser la méthode indienne (celle des Sulbasutras) pour trouver un carré de même aire qu'un rectangle donné. Mais c'est une autre histoire...

## Quel théorème "de Thalès"?

Que l'on choisisse la situation du triangle coupé par une droite parallèle à l'un de ses côtés ou celle de deux triangles équiangles, il m'apparaît clairement que le théorème "de Thalès" est un grand théorème, et j'entends là les deux aspects de ce théorème. Les élèves conservent très peu de choses de leur passage en cours de maths (et je ne parle même pas de ce qu'ils pourront utiliser en tant qu'humains après leurs études, surtout pour les non spécialistes), mais l'idée des formes proportionnelles les marquera sans doute pour longtemps. Ce qui peut nous donner à penser que ces figures d'objets de même forme engendrant des égalités de quotients devaient être intimement connues de tous avant leur reconnaissance sous la forme de problèmes mathématiques.





# LE GESTE GÉOMÉTRIQUE, OU L'ACTE DE DÉMONTRER

Jean-Claude DUPERRET

IREM de REIMS

*La géométrie du collège (et maintenant de la seconde) me semble un lieu privilégié pour rendre les mathématiques vivantes auprès de nos élèves : avec peu d'outils, pour la plupart hérités des Grecs, on peut proposer à nos élèves de véritables problèmes<sup>1</sup>, les re-situer dans un contexte historique qui en montre les enjeux.*

*Cette réflexion a été à l'origine de la première version de cet article. Celle-ci a suscité de nombreuses réactions : au-delà de la quantité, je tiens à souligner la qualité des critiques que j'ai reçues. J'ai pris le maximum de l'apport de chacun, et cet article est maintenant un peu celui de ces collègues qui m'ont fait avancer dans ma réflexion. C'est une chance que nous avons dans les IREM que ces débats d'idées, malheureusement réservés à trop peu d'enseignants. En guise de bibliographie, j'ai tenu à les citer pour les remercier de leur apport . Quant à donner de façon précise les références de tous ceux qui m'ont au cours des années fait avancer dans ma réflexion, j'en étais incapable ; je me suis donc contenté de flécher au fil du texte les contributions directes.*

*Je vais cependant me permettre d'en mettre deux en avant. Tout d'abord Rudolf Bkouche<sup>2</sup>, qui m'a envoyé un texte d'une grande profondeur : il m'a permis de corriger certaines erreurs historiques, mais surtout de relier des "gestes" que je propose dans cet article : l'outil formidable que sont les cas d'égalité et de similitude des triangles, qui ont été le fondement de mon apprentissage de la géométrie en tant qu'élève, la force des transformations, que j'ai découvert en tant qu'enseignant avec les nouveaux programmes de 1986, la richesse de la méthode des aires. Ensuite Daniel Perrin<sup>3</sup>, qui m'a permis de faire le lien avec une vision plus moderne de la géométrie, celle de Félix Klein dans le programme d'Erlangen : une géométrie est un ensemble muni d'un groupe de transformations. Je n'avais ni la place, ni la compétence pour développer ici cet apport, et je renvoie le lecteur au "Rapport d'étape*

---

1. Au fil des années, j'ai proposé à mes élèves de collège la plupart des activités de ce texte, mais jamais sous cette forme "brute" destinée à des enseignants.

2. Au delà du texte privé que j'évoque ci-dessus, je tiens à signaler sa brochure "Autour du théorème de Thalès" et son article dans la brochure "Autour de Thalès" de la commission Premier Cycle.

3. Au-delà du rapport d'étape de la CREM que je cite, je renvoie à son article dans le bulletin n° 431 de l'APMEP de novembre 2000.

sur la géométrie"<sup>4</sup> de la CREM (commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques).

Une critique que la plupart m'ont faite était qu'emporté par une certaine passion, j'avais tendance dans cette première mouture à privilégier des démarches qui m'apparaissaient "naturelles" au détriment d'autres qui leur semblaient plus pertinentes. Cette critique justifiée faisait que mon article allait à l'encontre de son objectif, car apprendre à nos élèves à faire des mathématiques, c'est leur apprendre à se déplacer pour voir la même chose de plusieurs façons. Il n'y a pas de chemins privilégiés, et, comme dit le proverbe russe, le chemin le plus court est celui que tu connais.

Nos élèves peuvent-ils découvrir seuls ces différents chemins ?

Il y a, je crois, une certaine forme de "compagnonnage" à avoir avec eux pour les leur montrer (je prends le risque d'une levée de bouchier en employant ce terme). Je suis profondément persuadé que l'élève est tout aussi sensible au rapport qu'a le professeur avec l'objet qu'il veut lui enseigner qu'à cet objet lui-même. L'important est d'éclairer sans éblouir, de faire en sorte que l'élève comprenne à la fois comment l'enseignant procède et pourquoi il a fait ce choix, même si dans un premier temps il se sent incapable de mener tout seul le travail.

L'objectif est que l'élève puisse à terme, devant un nouveau problème, prendre seul une décision raisonnable pour sa résolution. Je rejoins ici Jean-Pierre Kahane, à qui je dois aussi beaucoup : « Rien n'est plus beau en mathématiques qu'une belle démonstration, rien n'est plus bouleversant que de découvrir une démonstration par ses seules forces. Je souhaite que nous ayons en vue un objectif inaccessible : que chaque enfant, que chaque adulte, ait éprouvé au cours de sa vie la joie de la contemplation et de la découverte mathématique »<sup>5</sup>.

## 1 - Les enjeux d'un enseignement de géométrie pour tous

La démonstration : objet de luxe pour nantis des mathématiques. C'est ainsi qu'elle est trop souvent perçue par beaucoup de nos élèves. C'est le souvenir qu'elle laisse chez la plupart des adultes. Alors faut-il renoncer à faire des démonstrations ? Mais faire des mathématiques sans démontrer, est-ce encore faire des mathématiques ?

Quelle vision nos élèves ont-ils de la démonstration, quelle image en garderont-ils plus tard ? Une forme d'écrit, intimement liée à la géométrie, excroissance sans enjeu d'un problème qu'on a déjà résolu ? Une explication canonique, dont le rituel est de partir des hypothèses pour aller vers la conclusion, en utilisant des "donc" et des "d'où" <sup>6</sup> ?

S'ils ne gardent que ce côté assez réducteur de cette forme de raisonnement hypothético-déductif comme image de la démonstration, on comprendra leur réticence, voire leur refus d'y adhérer. Si le souvenir qu'ils garderont des mathématiques

4. paru dans le bulletin n° 430 de L'APMEP.

5. Jean-Pierre Kahane, *Profession de foi* in "Mathématiques au collège : les enjeux d'un enseignement pour tous" Actes du Colloque de la Commission inter-IREM Premier Cycle - Juin 1999. IREM de Lille éditeur

6. Voir Jean Houdebine in *REPÈRES-IREM n° 1*

est cette vision, on comprendra que tant d'adultes nous renvoient une image aussi négative de notre discipline.

Mais leur a-t-on donné conscience que dès qu'ils s'attaquent à un problème, ils raisonnent, et que s'ils en trouvent une issue, ils ont fait "acte de démontrer"?

Un enfant de CM2 qui, devant le dessin d'un carré, prend sa règle et mesure les quatre côtés et déclare qu'ils sont égaux, prend son équerre et mesurant un des quatre angles déclare qu'il est droit, et affirme alors: «c'est bien un carré», a fait "acte de démontrer"<sup>7</sup>. Il l'a fait avec son niveau de conceptualisation, de traitement, et de validation.

Mais ne nous interdisons-nous pas dans notre enseignement de mathématiques de "flécher" cette action comme une forme, encore naïve, de démonstration? N'attendons-nous pas trop l'accès à une "figure idéale" et à une "argumentation uniquement discursive" pour oser déclarer: «voilà vraiment ce qu'est une démonstration»? Cela conduit beaucoup de nos élèves, qui ont pourtant maintes fois fait cet acte de démontrer à quitter l'enseignement des mathématiques avec le sentiment profond qu'ils ne savent pas et ne sauront jamais démontrer.

Démontrer, c'est un geste, ou une succession de gestes, et en aucun cas une contemplation passive d'une figure. Le caractère spécifique de la géométrie est qu'on peut "voir" ces gestes. Apprendre à démontrer en géométrie, c'est apprendre "le geste géométrique". Ce geste géométrique n'est pas unique, et chaque problème rencontré pourra fournir différents chemins d'accès vers la compréhension et la validation: le "meilleur" pour chacun d'entre nous est lié à notre expérience et à l'expertise que nous avons développée; mais il ne sera pas forcément le "meilleur" pour d'autres. C'est ce que je vais essayer d'illustrer dans ce texte.

Quel va donc être ce long cheminement qui va conduire à la maîtrise de ce geste géométrique?

Lorsque l'enfant entre à l'école à trois ans, il y entre avec sa perception du "**monde physique**"<sup>8</sup>: il y a appris très tôt à percevoir des objets (boules, balles, ...). Certains objets vont alors acquérir un statut plus particulier: ce sont les objets de la géométrie élémentaire, objets plans comme le carré, le rectangle, le disque, objets de l'espace comme le cube, la boule. Quelle perception première a-t-il de ces objets? La ligne qui "entoure" et/ou la surface elle-même pour les objets plans, la surface qui "enveloppe" et/ou la portion d'espace pour les objets de l'espace?

C'est en tout cas un premier niveau d'abstraction qu'il va alors réaliser avec la reconnaissance de ces "formes": j'appelle ici "forme" le couple "objet géométrique-contour" (ce qui ne pose aucune ambiguïté pour les objets de la géométrie élémentaire). Le second niveau d'abstraction sera le "dessin" de ces formes, avec une appréhension séquentielle des gestes à accomplir pour le réaliser (je reviendrai plus loin sur la spécificité de la représentation plane des objets de l'espace).

7. J'emprunte cette expression à Claudine Ruget, car je la trouve très signifiante

8. Je resterai volontairement très ambigu sur ce que je mets sous ce vocable "monde physique", laissant au contexte le soin de l'éclairer: monde sensible, monde concret, monde réel, réalité abstraite sur laquelle les mathématiques peuvent raisonnablement s'exercer ...

Pour entrer pleinement dans le “monde mathématique”, une dernière abstraction sera nécessaire : c’est le passage du “dessin” à la “figure”. Tant de choses ont déjà été écrites sur ce “statut de la figure”<sup>9</sup> que je préfère en donner une définition simpliste : c’est pour moi le couple “dessin-regard mathématique”. Le carré que reconnaît l’enfant de trois ans est le même que celui qu’il construira en cycle III ou que celui sur lequel il tentera une démonstration au collège, et ces trois carrés sont pourtant profondément différents. Ce qui change, c’est le regard qu’on porte sur cet objet, et j’utilise ici le mot regard non pas comme contemplation, mais comme action possible et gestes associés. Quand un élève de quatrième prend sa règle pour vérifier que c’est un carré, son geste traduit qu’il ne voit pas le carré que nous aimerions qu’il voie. C’est par sa capacité à avoir une action raisonnée sur la figure que nous saurons qu’il est pleinement entré dans le monde des mathématiques.

Vous allez trouver ces derniers propos en contradiction avec mon introduction. Il n’en est rien, car pour moi, le raisonnement se fait aussi bien sur la forme, sur le dessin que sur la figure, et l’acte de démontrer est un constant aller-retour entre ces trois niveaux. Du reste, devant l’énoncé «soit  $ABCD$  un carré», lequel d’entre nous se contentera de placer les quatre points : nous “tracerons” le carré sur notre feuille ou dans notre tête, même si notre action est purement mathématique, pour “voir” à la fois le polygone plein, le contour et les sommets.

Le geste géométrique va associer “regard”, “actions”, et “acte de démontrer”. Quelles sont donc ces actions ? Je vais essayer d’en lister un certain nombre, en les séparant de façon artificielle car elles sont toujours en interaction. J’ai fait le choix de ne pas développer celle qui consiste à algébriser la géométrie (le repérage, le vectoriel, ...). Pour illustrer ces actions, je vous propose quelques “balades géométriques”, et vous les ferez à votre guise, en flânant ou en vous hâtant selon que vous les connaissiez déjà ou non : vous trouverez en annexe les raccourcis # de ces promenades.

## 2 - Connaissance, reconnaissance et comparaison des formes, des grandeurs et des mesures

Connaître une forme est la première action nécessaire pour travailler dessus : cette connaissance peut se faire soit au premier niveau de la perception purement visuelle (voire gestuelle), soit au second niveau physique du dessin, soit au troisième niveau mathématique des propriétés.

Reconnaître une forme, c’est pouvoir la discerner des autres. Là encore ce peut être purement visuel ; physique en utilisant une “caractérisation”, qui à ce niveau peut être encore redondante et qu’on validera avec des instruments comme la règle ou l’équerre ; mathématique avec une “propriété caractéristique” et une “hiérarchisation” de cette forme par rapport à d’autres.

---

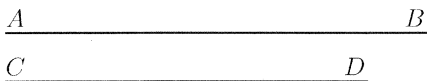
9. Voir en particulier Raymond Duval in Repères-IREM n° 17



Mais comparer des formes, cela a-t-il un sens? Cela peut se faire à tant de niveaux:

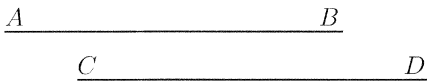
- ★ “égalité” de deux formes,
- ★ différenciation primaire: un triangle et un carré n’ont pas le même nombre de côtés, ...
- ★ différenciation au niveau des grandeurs: longueur, aire, volume, angle,
- ★ différenciation numérique par la mesure.

Attacher à une forme une ou des grandeurs, à ces grandeurs des mesures, à ces mesures des nombres en passant par l’unité est un apprentissage long, difficile et indispensable pour amener à changer le premier regard naïf de l’élève vers une forme porteuse de plusieurs attributs sur lesquels vont s’exercer les mathématiques. Il est donc indispensable de “sonder” régulièrement les élèves sur quels attributs ils fondent leur différenciation ou leur comparaison de deux formes. Prenons les exemples suivants pour éclairer mon propos:



Si l’on demande à des élèves en début de collège quel est le plus grand de ces deux segments, tous répondront sans hésiter [AB].

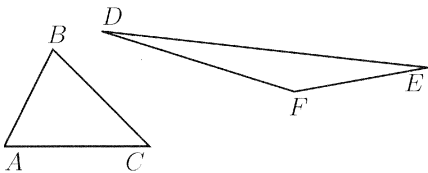
C’est évidemment au niveau de la longueur qu’ils auront effectué cette comparaison, de façon purement perceptive.



Devant ces deux segments, ils seront amenés à utiliser un geste géométrique, ici celui du report (avec un compas, une règle, et pourquoi pas une ficelle).

Déclarer qu’ils sont “égaux” relèvera alors d’une convention tacite qui prend en compte l’approximation du geste physique (à l’épaisseur de la mine près, au mm près, ...).

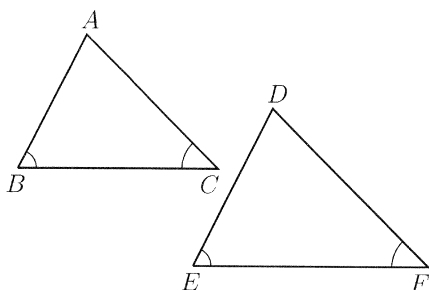
La “grandeur” d’un segment est donc naturellement la longueur, et “l’égalité”, qui ne peut être ici que de l’ordre du “physique”, est liée aux limites de leur perception ou de leurs instruments de mesure.



Si maintenant on leur demande quel est le plus grand des deux triangles ci-contre, leur hésitation sera beaucoup plus grande. Mais, expérience faite, j’ai toujours constaté que la majorité choisissait le triangle  $EDF$ .

Et si on leur fait expliciter leur choix, c’est en général parce qu’il “tient plus de place”. Nous les attendons sur périmètre et aire, et ils sont sur le registre de “l’encombrement”. On peut du reste parfaitement donner un sens mathématique à cet encombrement avec la notion de diamètre d’une partie.

En l'absence de toute donnée, comparer leurs périmètres et leurs aires sera là encore du domaine du physique, mais avec un passage mathématique par report, mesure et formule.



Prenons le dernier exemple ci-contre, où l'égalité des angles est indiquée. Devant la même question, aucun élève n'hésitera, et tous déclareront que le plus grand des deux triangles est  $EDF$ .

Ils sont donc tous sensibles à la notion de "même forme" (selon la terminologie du nouveau programme de seconde, à laquelle je préférerais "semblable" lorsqu'on est dans le registre des mathématiques), et intuitivement ils comprennent que les trois grandeurs ci-dessus auront des mesures qui conduiront à la même réponse pour la comparaison.

### 3 - Opérations sur les formes

Je parle d'opérations sur les formes, et non sur les figures, car ces opérations sont à la fois associées à des gestes physiques et à des gestes mathématiques. Je les rangerai en quatre catégories :

#### **Transformation isométrique :**

Très tôt un enfant utilise de telles transformations dans l'espace sur des puzzles où très vite il comprendra que telle pièce doit aller à telle place : ce geste raisonné repose sur deux informations, "l'égalité" reconnue a priori de deux formes, le "mouvement" qui permettra de valider ce choix. Cela nous renvoie au débat actuel sur les "cas d'égalité" des triangles qui apparaissent comme un choix contre les transformations. Il n'y a pas lieu d'opposer ces deux approches, mais d'en montrer la complémentarité : avec une isométrie, je suis sûr d'obtenir une "copie conforme" de mon objet. Si j'ai les moyens d'affirmer que deux objets sont "copie conforme", je sais qu'il y a une isométrie qui me permet de passer de l'un à l'autre. Il faut du reste distinguer le "mouvement" qui permet de définir l'égalité des figures et la notion d'isométrie. Le geste géométrique se constitue de ces différents aspects.

#### **Agrandissement, réduction :**

On retrouve dans cette seconde action les aspects vus ci-dessus : agrandir ou réduire un objet, acte qui en préserve les "proportions", pouvoir justifier que deux objets sont "semblables" (la caractérisation de deux triangles semblables par l'égalité de leurs angles est à mon sens tout à fait à la portée d'élèves de collège). Cette seconde action est liée au numérique avec le modèle de la proportionnalité et va pleinement devenir un geste géométrique avec "Thalès".

### Pliage, découpage, puzzle :

Il s'agit là de "manipulations physiques" auxquelles nous allons donner un statut mathématique. Découpage et puzzle nous rapprochent des mathématiques chinoises, avec leur technique de "rapiécage". Toutes les activités que l'on peut faire avec le "Tangram" sont extrêmement formatrices. Ces actions sont au centre de la première balade que je vous propose.

Le mouvement "pliage" est intimement lié à l'isométrie "symétrie axiale", et pourtant ils sont deux actes profondément différents, même si leur "conclusion" est la même : la symétrie axiale est une isométrie indirecte du plan, le pliage est un mouvement de l'espace qui se traduit mathématiquement par une isométrie directe de l'espace. Mais ce passage physique dans l'espace éclaire pleinement l'action mathématique dans le plan. La combinaison des deux participant là encore à l'acquisition du geste géométrique.

### Déformation :

Déformer, c'est modifier la forme, tout en en gardant des caractéristiques et en s'attachant à certains invariants. C'est par déformation que l'enfant va construire de nouvelles formes à partir d'anciennes : partant de la figure équilibrée qu'est le carré, il va la déséquilibrer pour en faire un rectangle : il constatera qu'il a gardé les quatre angles droits, l'égalité des longueurs des diagonales, donc la cocyclicité, et qu'il a perdu la symétrie par rapport à ces diagonales, c'est à dire une possibilité de pliage. A cet instant de son apprentissage, un carré ne peut être un rectangle, et ce n'est que plus tard qu'il apprendra à réorganiser toutes ces nouvelles formes (rectangle, losange, parallélogramme) pour y réintégrer le carré.

C'est certainement un des gestes les plus difficiles, mais les plus porteurs de la géométrie : passer du cercle à l'ellipse, du triangle équilatéral au triangle isocèle par affinité orthogonale, et s'assurer ainsi de l'invariance des rapports d'aire par cette déformation : déformer un triangle en s'attachant à conserver son aire.

## Première balade ... dans les aires<sup>10</sup>

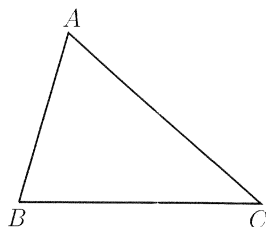
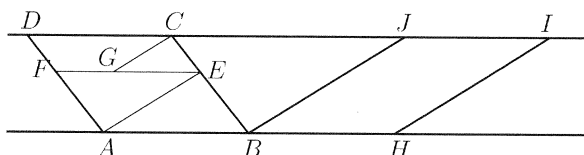
J'ai plus avant posé la question de comparer deux triangles  $ABC$  et  $DEF$ . Je vais préciser maintenant que je souhaite comparer leurs aires. Pour cela, revenons à la méthode des aires qui permet, via le "découpage" des figures et leurs "recombinaisons", de comparer les aires de deux "formes" différentes. C'est cette méthode qui permet d'établir les formules usuelles. On la trouve dans les *Éléments* d'Euclide. Je vous propose comme première promenade de découper un triangle pour en faire un carré de même aire. Cela illustrera certaines actions dont j'ai parlé dans le paragraphe précédent, l'obligation des différentes "actions" étant de conserver l'aire.

---

10. les # renvoient à une solution proposée en Annexes "Première balade"

**Du triangle au parallélogramme :**

// "Découper" le triangle  $ABC$  pour en "faire" un parallélogramme de base  $[BC]$  et de même aire.

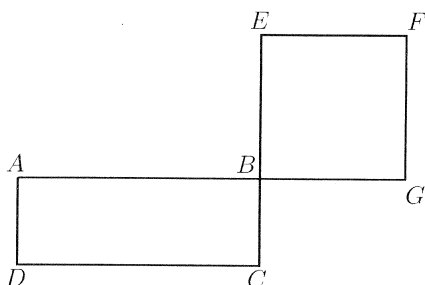
**Du parallélogramme au parallélogramme :**

# Les parallélogrammes  $ABCD$  et  $BHII$  ont deux "bases" de même longueur  $AB = BH$ . Le parallélogramme  $ABCD$  a été découpé en 4 pièces en utilisant la direction de  $(BJ)$  :  $ABE$ ,  $AEF$ ,  $EGC$ ,  $DCGF$ .

"Reconstituer" le parallélogramme  $BHII$  avec ces quatre pièces.

**Du parallélogramme au rectangle :**

C'est évidemment un cas particulier de ce qui précède, une des directions de découpage s'en trouvant "simplifiée".

**Du rectangle au carré**

# Il faut déjà construire un tel carré  $BEFG$  qui ait même aire que le rectangle  $ABCD$ .

// Il faut ensuite trouver un découpage du rectangle qui permette de reconstituer le carré.

**Du polygone au carré :**

// Nous savons maintenant découper un triangle pour en faire un carré; tout polygone se découpe en triangles. Le problème devient donc comment, à partir de deux carrés "faire" un carré, et comment découper ces carrés pour reconstituer ce troisième carré. À vous de jouer!

### Bilan des “opérations” :

Le problème que nous venons de résoudre est pour moi un “vrai” problème, où prend pleinement sa dimension le geste géométrique : que d’opérations, que d’aller-retour entre figure et dessin, entre coups de ciseaux physiques et coups de ciseaux mathématiques.

La démarche a été double : d’abord construire les objets “convoités”, en utilisant et validant par “Thalès” pour le passage du rectangle au carré, par “Pythagore” pour le passage de deux carrés à un troisième carré ; ensuite imaginer les découpages. Pour ce second travail la prise d’information sur le dessin est absolument nécessaire, car ce sont les “bords” qui vont guider notre action : recherche simultanée de “pièces isométriques” et du “déplacement” correspondant. Les mathématiques nous garantissent alors que le “découpage” que nous avons effectué est un bon “puzzle”, c’est-à-dire qu’il ne laissera pas de “vide” ni de “superposition” entre les pièces lorsque nous retournerons dans le découpage physique.

Le résultat mathématique est d’une grande force : deux polygones de même aire sont “puzzle-équivalents” (théorème de Bolyai<sup>11</sup>).

Mener une telle activité avec des élèves de collège nécessite de revenir effectivement au problème physique, et procéder au découpage<sup>12</sup>.

### Thalès, Pythagore, c’est qui ?

Je ne peux ici m’empêcher une petite pause, en laissant la parole à Denis Guedj, qui, dans son livre «Le théorème du perroquet», fait dire, dans le chapitre 3 «Thalès, l’homme de l’ombre», à un de ses jeunes héros, Jonathan : «Comme tous les élèves du monde, Jonathan avait croisé Thalès à plusieurs reprises. Chaque fois, le professeur leur avait parlé du théorème, jamais de l’homme. D’ailleurs, en cours de maths, on ne parlait jamais de personne. De temps en temps, un nom tombait, Thalès, Pythagore, Pascal, Descartes, mais c’était seulement un nom. Comme celui d’un fromage ou d’une station de métro. On ne parlait pas non plus de où ni de quand ça s’était fait. Les formules, les démonstrations atterrissaient sur le tableau. Comme si personne ne les avait créées, comme si elles avaient été là de tout temps, comme les montagnes ou les fleuves. Encore que les montagnes, elles, n’avaient pas été là de tous temps. Et l’on arrivait à ceci que les théorèmes avaient l’air plus intemporels que les montagnes ou les fleuves ! Les maths, ce n’était ni l’histoire, ni la géographie, ni la géologie. C’était quoi au juste ? La question n’intéressait pas grand monde».

Faire Pythagore sans en parler, faire Thalès sans en parler, faire les équations sans parler d’Al Khwarizmi, faire des mathématiques sans jamais leur redonner leur consistance historique, c’est enlever au geste mathématique beaucoup de sa légitimité, et perdre l’occasion d’en faire une matière vivante auprès de nos élèves. Au

11. Ce résultat ne s’étend pas à l’espace ; on ne peut pas découper un tétraèdre pour en faire un cube.

12. J’ai souvent proposé cette activité à mes élèves, mais jamais d’un bloc : en quatrième, c’étaient les passages triangle-parallélogramme-rectangle ; en troisième le passage rectangle-carré.

delà des aspects anecdotiques, ce sont les aspects problématiques auxquels répondent ces théorèmes qui permet de donner du sens à leurs enjeux.

### Thalès, Pythagore, c'est quoi?

Je les ai “employés” sans aucune précision. Le théorème de Pythagore apparaît très souvent dans notre enseignement comme un lien entre le géométrique (le triangle rectangle) et le numérique (la relation liant la longueur de l'hypoténuse et celles des côtés de l'angle droit). Cette seule vision ne permet pas de trouver le passage ci-dessus de deux carrés à un troisième. Il faut donc revenir à l'enjeu historique de ce théorème, qui est celui de la quadrature de la figure formée par deux carrés, et à la configuration associée.

Le théorème de Thalès énonce lui, soit des égalités de rapports de longueurs (énoncé géométrique), soit des égalités de rapports de mesures de longueurs (énoncé numérique). Au-delà de son énoncé, “Thalès” pose un certain nombre de questions d'enseignement :

★ Est-ce une configuration ?

Oui, dans la mesure où c'est une figure prototypique déclenchant un réflexe de reconnaissance.

★ Est-ce un théorème ?

Oui, pourvu qu'on puisse s'appuyer sur des résultats déjà établis, et avec une méthode de démonstration reconnue.

★ Est-ce un modèle ?

Oui, ou plutôt Thalès recouvre un certain nombre de modèles : le modèle géométrique (affine, vectoriel, transformations, ...); le modèle proportionnalité-linéarité avec la formalisation du lien entre parallélisme et égalité de rapports; le modèle des grandeurs, avec le passage du commensurable à l'incommensurable; le modèle numérique, avec le passage du rationnel au réel.

★ Est-ce un concept ?

Oui, un concept fédérateur de tous ces modèles : la perception du monde et la géométrie élémentaire sont fortement liées à la notion de figures semblables : que la notion vague de “même forme” conduise à des relations de proportionnalité est un des points fondamentaux de l'enseignement de la géométrie au collège.

Voilà ce qui va être le fil conducteur de la suite de ce texte.

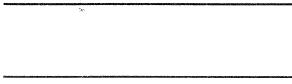
## 4 - La vision géométrique

C'est un des points les plus délicats. Comment savoir ce qu'un élève “voit” ? Nous pouvons le deviner en partie en le regardant agir : se contente-t-il de regarder, prend-il un instrument de traçage ou de mesure, est-il déjà en train d'écrire les propriétés de la figure, par exemple en la codant ?

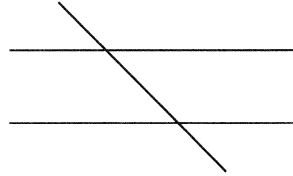
Existe-t-il des moyens pour aider l'élève à acquérir ce regard mathématique qui va transformer son dessin en figure ? Je crois que oui, et je vais essayer d'en cibler trois ici.

**Les configurations :**

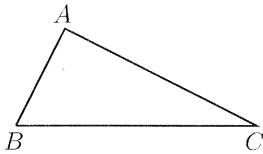
Je viens d'en donner une définition : figure prototypique déclenchant un réflexe de reconnaissance. Illustrons cela avec trois exemples :



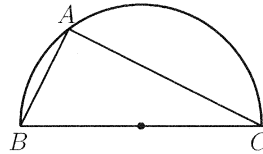
Voilà deux droites parallèles



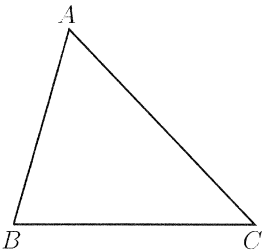
En y ajoutant une sécante, on crée une configuration, porteuse d'égalités d'angles.



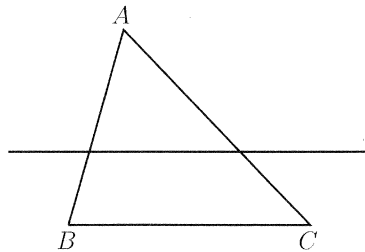
Voilà un triangle



En y ajoutant un demi-cercle de diamètre  $[BC]$ , on crée une configuration liée au triangle rectangle.



Voilà un triangle



En y ajoutant une parallèle à  $(BC)$ ,  
C'est Thalès!

Mais rester à ce stade de la reconnaissance est insuffisant : il faut arriver au stade de l'action, avec la mise en œuvre des propriétés portées par la configuration. Et là intervient un ordre : qui était le premier ?

- \* Dans la première configuration, était-ce la parallèle ou les égalités d'angles ?
- \* Dans la seconde, était-ce le triangle rectangle ou le demi-cercle ?

Pour que ces configurations aident vraiment l'élève dans son regard, il faut

qu'elles deviennent dynamiques : il faut lui apprendre à retrouver la suite des “gestes” qui l'ont amené à cette configuration.

### Un regard dynamique :

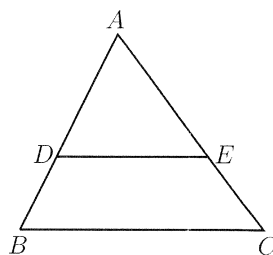
Avoir un regard dynamique sur une figure ou une configuration, c'est en voir les genèses possibles : cela permet la meilleure expertise des problèmes rencontrés, en choisissant la meilleure stratégie. Illustrons cela avec la troisième configuration, celle de Thalès<sup>13</sup> :

*l'aspect “projection” :*

Cet aspect met en évidence le “passage” de la droite  $(AB)$  à la droite  $(AC)$  dans la direction de  $(BC)$ . Il donne l'égalité de rapports :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AE}{AD}$$

C'est le rapport de projection, qui donnera le cosinus. Du point de vue de la proportionnalité, c'est un rapport “externe”.



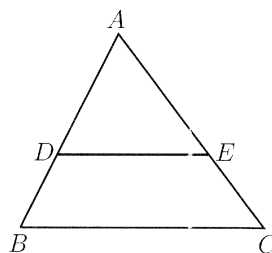
*l'aspect “homothétie” :*

Cet aspect met en évidence le passage du triangle  $ABC$  au triangle  $ADE$ . Il donne l'égalité de rapports :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

C'est le rapport d'homothétie. Du point de vue de la proportionnalité, c'est un rapport “interne”.

Cet aspect permet une action sur le troisième côté de ces deux triangles, et au niveau de la trigonométrie, il donnera le sinus et la tangente.



Avoir cette double vision dynamique de Thalès<sup>14</sup> permet de choisir la mieux adaptée dans un problème.

Ajoutons que si ces deux aspects sont équivalents dans le plan, il n'en est plus de même dans l'espace. En prenant trois plans parallèles, et deux droites sécantes à ces plans, on retrouve la conservation des rapports : c'est l'aspect “projection”. Mais si ces deux droites sont non coplanaires, il n'y a pas d'homothétie ! Il est dommage que les nouveaux programmes de troisième aient évacué cet aspect projection, le seul qui résiste dans l'espace.

13. Voir Jean-Claude Duperret in Repères-IREM n° 20

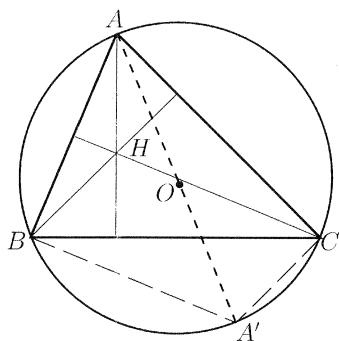
14. Ce double regard conduit à deux configurations de Thalès (pour autant qu'elles appartiennent à Thalès, ce qui semble douteux) ; mais l'aspect projection “s'éclaire” bien mieux avec la configuration de deux droites “découpées par des segments parallèles”.



### Une aide possible, les logiciels de géométrie :

Les logiciels de géométrie sont un outil particulièrement formateur à ce regard mathématique dont je parle. Leurs possibilités dynamiques permettent de multiplier les exemples, de s'intéresser aux cas particuliers, et, par là, de conjecturer en situation de résolution de problèmes. Et pour construire les quelques "figures" de ce texte, il valait mieux que je connaisse un peu de géométrie !

Mais ce n'est qu'un outil, et le retour au "papier-crayon" est souvent indispensable pour la validation. C'est là que peuvent arriver les difficultés : l'émergence trop rapide et sans réflexion d'une conjecture peut être un obstacle à sa validation.



Prenons l'exemple suivant, bien classique pour les géomètres : soit  $(\mathcal{C})$  un cercle de centre  $O$ ,  $B$  et  $C$  deux points fixes de ce cercle,  $A$  un point variable de ce cercle ; soit  $H$  l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

Quel est le "lieu" de  $H$  quand  $A$  décrit  $(\mathcal{C})$  ?

Devant le dessin de cette figure, différents gestes géométriques peuvent nous guider vers une solution, ceux-ci étant liés à notre habitus, à notre intuition (au sens cartésien du terme), à notre plus ou moins

longue pratique. Pour moi, ma pratique me conduit, par la présence du cercle, à m'intéresser au point  $A'$  diamétralement opposé à  $A$ , et alors à "voir" un parallélogramme :  $A'BHC$ . Ma conclusion est que le lieu cherché est le cercle symétrique de  $(\mathcal{C})$  par rapport au milieu  $I$  de  $[BC]$ .

La fonction "lieu" de certains logiciels de géométrie permet d'avoir instantanément le lieu cherché. Qu'avons-nous alors devant les yeux : deux cercles sécants en  $B$  et  $C$ . Le geste géométrique naturel pour valider (en tout cas chez les élèves de collège) sera la symétrie axiale par rapport à  $(BC)$  : me voilà bien éloigné de ma démarche, alors que ceux qui auront comme pratique l'angle inscrit s'y retrouveront sans problème.

Utilisons alors la fonction "trace" (bien meilleure par son côté dynamique) : le mouvement nous fait alors penser à une translation, mais comment "repérer son vecteur" . Ayant résolu le problème, je sais que j'ai effectué une double symétrie centrale pour aller de  $A$  à  $H$ , et la réponse est donc  $2 \cdot \vec{OI}$ . Mais il est plus facile de composer deux symétries centrales (c'est au programme de troisième) que de décomposer de façon intéressante une translation ! On peut cependant alors s'en tirer avec le théorème des "milieux".

## Seconde balade ... dans l'espace<sup>15</sup>

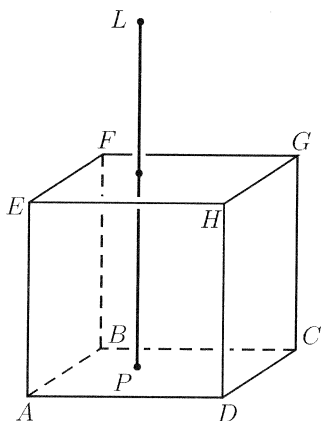
Une des principales difficultés de la vision dans l'espace, est que justement on ne peut voir entièrement l'objet ! Il faut donc, soit le faire tourner si c'est possible, soit tourner autour. La connaissance de l'objet va nous permettre d'économiser nos mouvements en "imaginant" ce qui est caché. C'est un des apprentissages fondamentaux du début de la scolarisation.

La seconde étape va être la représentation plane des objets de l'espace : c'est un apprentissage auquel nous ne consacrons pas assez de temps, et nous considérons trop souvent la "perspective cavalière" comme "naturelle" chez nos élèves de collège.

L'utilisation de logiciels de géométrie est là sans conteste un outil d'aide à la vision de l'espace, par la possibilité qu'il donne de faire tourner les objets, ou plus exactement leurs représentations planes.

### De l'espace au plan : l'ombre

Une des spécificités de la "géométrie de l'espace", est que le raisonnement précède le dessin, que l'acte de démontrer est souvent nécessaire à la réalisation de la figure. Pour illustrer cela, je vous propose l'activité suivante, certainement classique pour beaucoup d'entre vous.



//  $ABCDEFGH$  est un cube.

Une lampe est placée en  $L$ .

$P$  est la projection orthogonale de  $L$  sur le plan  $ABCD$ .

Dessiner l'ombre du cube sur le plan  $ABCD$ .

Quel est le problème :

comment construire les intersections de  $(LE)$ ,  $(LF)$ ,  $(LG)$ ,  $(LH)$ , avec le plan  $ABCD$ .

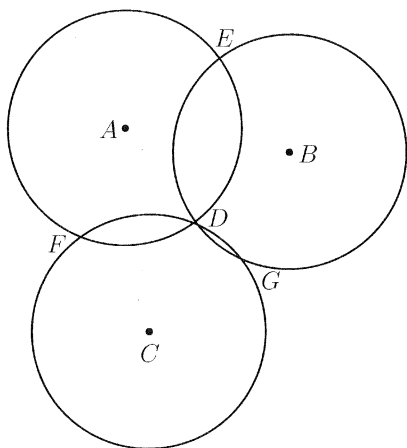
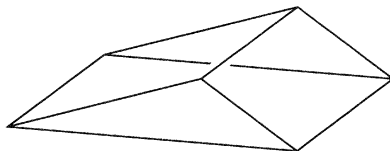
// Mais au fait, quelle est la forme de cette ombre ?

15. les # renvoient à une solution proposée en Annexes "Seconde balade"

### Du plan à l'espace : les trois cercles

En éduquant la vision plane des objets de l'espace, on peut avoir une appréhension particulièrement dynamique de problèmes de géométrie plane.

Par exemple la transitivité de "l'équivalence" "s'éclairer" avec la vision d'un prisme droit :



// Soient trois cercles de même rayon, de centres respectifs  $A, B, C$ , et qui sont sécants en un point  $D$ .

Soient  $E, F, G$  les autres points d'intersection de ces cercles. Montrer qu'il existe un cercle passant par  $E, F, G$  (çà, ce n'est pas un scoop) de même rayon que les trois autres.

Oubliez les trois cercles, et "regardez bien les points". Faites apparaître des losanges : vous voyez mieux. Plongez alors dans l'espace à la recherche du point caché. Ramenez-le dans votre plan, et démontrez !

Ces deux exemples supposent que l'on sait voir dans une figure plane la projection d'une figure de l'espace. Ils illustrent deux propriétés de Desargues :

- \* La configuration définie par la donnée de deux parallélogrammes contigus est la projection d'un prisme.
- \* La configuration définie par les trois losanges  $DAEB, DBGC, DCFA$  est la projection d'un cube.

## 5 - Démontrez : convaincre ou éclairer ?

Convaincre ou éclairer<sup>16</sup> : voilà un vieux débat du  $XVII^{me}$  siècle, mais qui me paraît toujours d'actualité dans notre enseignement. C'est en tout cas une question qui est loin d'être simple. Tout dépend en effet du regard que l'on porte sur la situation que l'on étudie, autrement dit le regard mathématique est multiple, ce qui laisse entendre que les modes de compréhension d'une situation géométrique sont multiples. Parler de démonstrations "éclairantes" nous renvoie donc au problème

16. J'ai choisi de ne pas développer l'aspect historique de ce débat : je renvoie aux travaux d'Evelyne Barbin, qui ont donné lieu à plusieurs articles dans la revue Repères-IREM et dans le bulletin de l'APMEP.

suivant : la source d'où jaillit la "lumière" n'est pas la même pour tous. Au-delà de convaincre ou éclairer, pour moi **démontrer c'est avant tout donner du sens**.

Je vais essayer d'illustrer cela avec les théorèmes de Pythagore et Thalès. Ces deux théorèmes ont pour support la forme-clé de la géométrie plane élémentaire : le triangle. Cette présence constante peut se résumer avec le constat suivant : « donnez moi trois points, et je vous tiens le plan ».

Pour démontrer, il faut des outils, et j'en vois trois fondamentaux pour le collège, que je vais aller chercher dans Euclide. Ces outils permettent une action de comparaison entre deux triangles placés dans une position particulière.

### Des outils et des positions

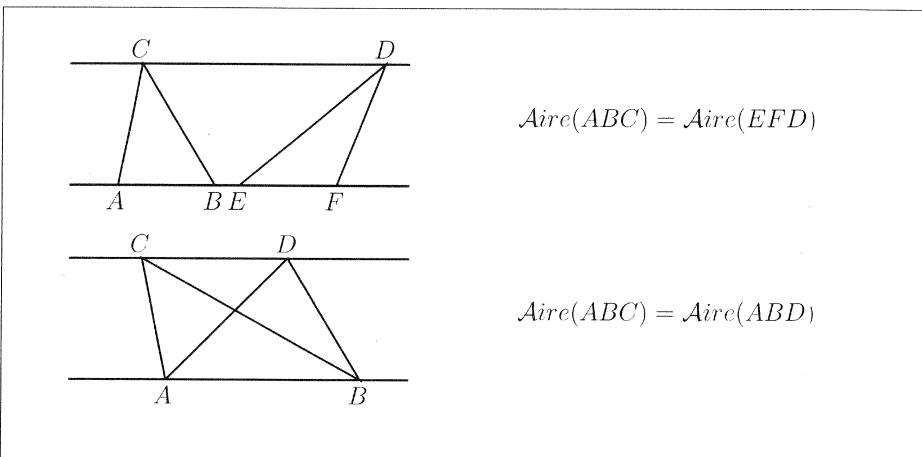
*Outil 1 : les cas d'égalité des triangles.*

J'ai déjà dit que je ne les opposais pas aux transformations, mais que je les mettais en interaction. Il est souvent plus facile de montrer que deux triangles sont "isométriques" que d'exhiber l'isométrie qui permet de passer de l'un à l'autre. On peut même aller jusqu'à parler d'unicité d'une forme triangulaire à une isométrie près (passage à la classe d'équivalence).

Je dirai que deux triangles égaux sont en position 1 : cette position me garantit "l'identité des triangles" à un "déplacement"<sup>17</sup> près.

*Outil 2 : la proposition 38 du livre I d'Euclide.*

« Les triangles construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles sont égaux entre eux ».



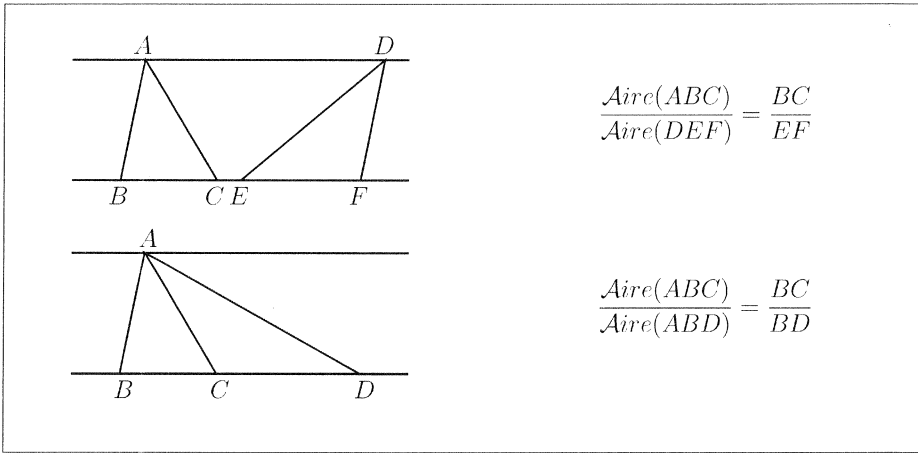
17. Je n'emploie pas ici le mot déplacement dans son sens mathématique.

“Égaux” s’entend ici au sens des aires ! Le mouvement qui permet de passer d’un triangle à un autre est une “déformation” qui conserve les aires. (D’un point de vue actuel, c’est l’invariance de l’aire par une transvection).

Je dirai que deux tels triangles sont en position 2 : cette position me garantit l’égalité des aires.

*Outil 3 : la proposition 1 du livre VI d’Euclide.*

«Les triangles qui ont la même hauteur sont entre eux comme leurs bases».



Cet outil permet de passer des rapports d’aires aux rapports des longueurs. (D’un point de vue actuel, c’est une dilatation).

Je dirai que deux tels triangles sont en position 3.

Il y a un quatrième outil fondamental : les cas de similitude. L’un d’eux est revenu en classe de seconde, mais il me semble que cet outil aurait sa place en collège, avec la position de triangles semblables.

Comme tout outil, il faut s’en servir régulièrement, sinon on est obligé de revenir à la “notice d’emploi” et focaliser sur l’outil et non sur son utilisation dans un problème qui le nécessite<sup>18</sup>.

18. Ces outils sont un héritage des grecs : le fondement de la métaphysique grecque est de mettre en place la nécessaire harmonie entre le discours rationnel et le monde réel

### Démonstrations du théorème de Pythagore :

Démontrons le théorème dit direct :

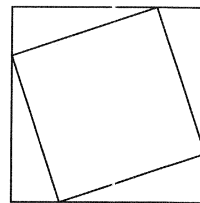
«Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés».

#### *Démonstration 1*

C'est la démonstration classique qu'on trouve dans la plupart des manuels.

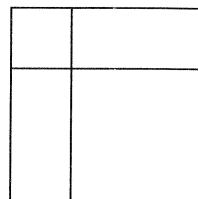
En disposant "quatre fois" le triangle rectangle comme ci-contre, on montre qu'on obtient deux carrés, et on calcule l'aire du grand de deux façons.

La méthode usuelle pour arriver à la "relation de Pythagore" est alors de passer par l'algèbre. J'y vois trois inconvénients :



- ★ Pour pouvoir la rédiger sans avalanche d'écriture, on est amené à appeler  $a$  la longueur de l'hypoténuse,  $b$  et  $c$  les longueurs des côtés de l'angle droit ; la relation obtenue « $a^2 = b^2 + c^2$ » éloigne définitivement du triangle, les noms des sommets n'apparaissant plus.
- ★ La relation de Pythagore s'obtient par un tour de passe-passe algébrique : la disparition du double produit.
- ★ Cette démonstration est certes convaincante, mais elle éloigne du sens profond de Pythagore, à savoir son aspect géométrique que j'ai rappelé plus avant.

Mais si à partir du découpage ci-dessus, on va jusqu'au bout de la démonstration indienne, on peut par un nouveau découpage, en décomposant et recomposant les figures, "montrer" que l'aire du carré de côté  $a$  est égale à la somme des aires des carrés dont les côtés ont pour longueur respective  $b$  et  $c$ . Cette lecture géométrique rend cette démonstration tout à fait éclairante.



*Démonstration d'Euclide en quatre mouvements*

$H$  et  $K$  sont les projections orthogonales de  $A$  sur  $(BC)$  et  $(IJ)$ .

**Premier mouvement : découpage**

En découplant le carré  $BCIJ$  en deux rectangles  $BHKJ$  et  $HCIK$ , le problème se ramène à déformer le carré  $ABDE$  en le rectangle  $BHKJ$  avec conservation de l'aire.

Avec un nouveau découpage, le problème se ramène à déformer le triangle  $EBD$  en le triangle  $BKJ$  avec conservation de l'aire.

**Second mouvement : déformation.**

Avec l'outil 2, je déforme  $EBD$  en  $CBD$  : ces deux triangles sont en position 2, donc ils ont même aire.

**Troisième mouvement : quart de tour.**

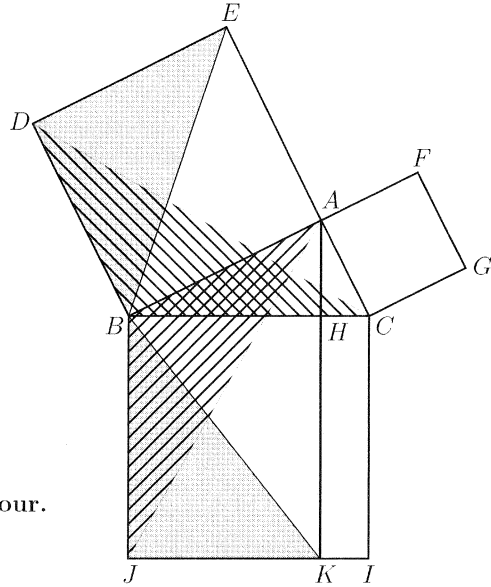
Par un quart de tour autour de  $B$ ,  $BDC$  se transforme en  $BAJ$  : ces deux triangles sont en position 1, donc a fortiori ont même aire.

**Quatrième mouvement : déformation.**

Avec de nouveau l'outil 2, je déforme  $ABJ$  en  $KBJ$  : ces deux triangles sont en position 2, donc ont même aire.

J'utilise dans cette démonstration des quarts de tour là où Euclide utilise les cas d'égalités des triangles. Voilà un exemple où l'isométrie peut être explicitée : l'avantage est qu'on voit ces deux carrés "se fondre" dans le troisième. En utilisant rétroprojecteur et couleurs, ou la dynamique de l'ordinateur, on donne toute sa vie à cette démonstration auprès des élèves.

Elle m'apparaît plus éclairante que la précédente, mais l'est-elle pour tous ? Cela renvoie de nouveau au regard que l'on porte sur la figure.



### Démonstrations du théorème de Thalès :

Démontrons le théorème dit direct :

« Dans un triangle, toute parallèle à un côté découpe les deux autres en “segments proportionnels” ».

	<p><i>Mouvement 1.</i></p> <p>On passe d'un rapport de longueurs à un rapport d'aires</p>	<p>Les triangles <math>NMA</math> et <math>NMB</math> sont en position 3, donc :</p> $\frac{MA}{MB} = \frac{\mathcal{Aire}(NMA)}{\mathcal{Aire}(NMB)}$
	<p><i>Mouvement 2</i></p> <p>On passe du côté <math>[AB]</math> au côté <math>[AC]</math></p>	<p>Les triangles <math>BMN</math> et <math>CMN</math> sont en position 2, donc :</p> $\mathcal{Aire}(NMB) = \mathcal{Aire}(MNC)$
	<p><i>Mouvement 1.</i></p> <p>On passe d'un rapport d'aires à un rapport de longueurs</p>	<p>Les triangles <math>MNA</math> et <math>MNC</math> sont en position 3, donc :</p> $\frac{\mathcal{Aire}(MNA)}{\mathcal{Aire}(MNC)} = \frac{NA}{NC}$

Cette démonstration est convaincante, éclairante pour des mathématiciens, car ils savent qu'il y a eu un lourd tribut à payer avant d'y arriver, sur lequel je reviendrai un peu plus loin. Mais est-elle éclairante pour des élèves, qui auront l'impression que ce passage par les aires est un tour de passe-passe qui les éloigne du sens de “leur Thalès” : relation entre parallélisme et proportionnalité de longueurs ?



**Démonstration de Clairaut (*xvii<sup>me</sup>* siècle) :**

Abandonnons Euclide, et faisons un saut de 20 siècles, et suivons Clairaut dans ses «Éléments de Géométrie», où il reprend pour “Thalès” une argumentation d’Arnaut (Nouveaux éléments de géométrie) :

**Notre théorème des “milieux” :**

$M$  est le milieu de  $[AB]$ ,  $(MN) \parallel (BC)$ .

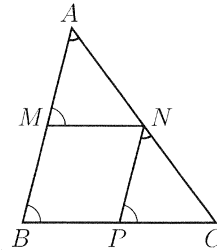
On construit  $(NP) \parallel (AB)$ .

Par parallélisme:  $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{NPC}$ ;  
 $\widehat{MAN} = \widehat{PNC}$ .

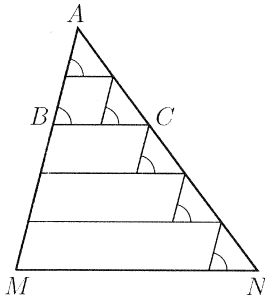
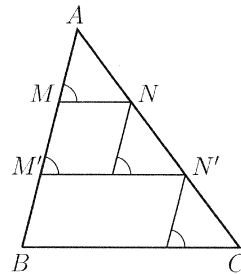
En utilisant milieu et parallélogramme :

$$AM = MB = NP$$

Les triangles  $AMN$  et  $NPC$  sont en position 1 (on a même de façon évidente le déplacement : une translation). Donc  $AN = NC$ , d’où  $N$  est le milieu de  $[AC]$



Au delà du fait que cette démonstration m’apparaisse comme particulièrement éclairante pour des élèves de collège, Clairaut vient de se construire une procédure auto-reproductible, et donc une méthode. Suivons le plus avant :

**Deux fois et demi****Notre théorème des tiers**

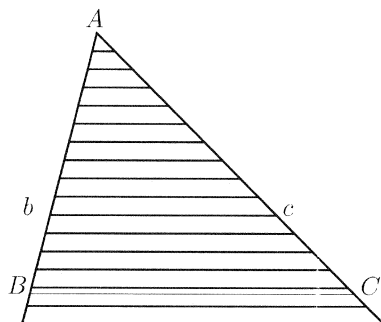
Je viens de résumer, avec une adaptation très moderne, et sans les nombreuses justifications de Clairaut, les pages 42 et 43 de ses «Éléments de Géométrie». A partir de ces trois exemples, Clairaut laisse imaginer la généralisation du procédé, et considère achevée cette démonstration de Thalès.

### Clairaut a des doutes :

Retrouvons Clairaut à la page 98 : «Mais de ce que plusieurs lignes sont incommensurables avec d'autres, peut-être pourrait-il naître quelque soupçon sur l'exactitude des propositions qui nous ont servi à constater la proportionnalité des figures semblables. Il faut donc que nous revenions sur nos pas».

Clairaut prend alors l'exemple suivant : soit un triangle  $ABC$  où  $AB = \sqrt{2}$ , soit  $b$  le point de  $[AB]$  tel que  $Ab = 1$ , et  $c$  le point de  $[AC]$  tel que  $(bc) \parallel (BC)$ . Il fait alors le raisonnement suivant :

«Supposons  $Ab$  divisé en 100 parties ; ce que  $AB$  contiendra de ces parties se trouvera entre 141 et 142. Contentons nous donc de 141 et négligeons le petit reste. Il est clair que  $AC$  contiendra aussi 141 des parties de  $Ac$ ».



J'ai exemplifié avec le dessin ci-dessus où j'ai choisi un partage en 10 parties. Les historiens noteront d'autre part que je n'ai pas comme Clairaut fait la distinction entre  $A$  et  $a$ , cela pour que ce soit clair aux non spécialistes.

Clairaut recommence alors en divisant  $Ab$  en 1000 parties, et dit alors :

«De plus, ces restes comme nous venons de l'observer, seront de part et d'autre d'autant plus petits que le nombre des parties de  $Ab$  sera plus grand. Donc il sera permis de les négliger, si on imagine la division de  $Ab$  poussée jusqu'à l'infini».

Nous venons de passer dans le monde de l'analyse. Nous venons de passer du commensurable à l'incommensurable, du rationnel au réel. Nous venons surtout de changer notre regard sur Thalès :

Les pages 42 et 43 sont pour le collège et la seconde, les pages 98, 99, 100 et 101 sont pour les classes suivantes, car Clairaut éclaire ici autre chose que Thalès !

### Mais où est passée l'incommensurabilité ?

Mais alors pourquoi la démonstration d'Euclide est-elle aussi simple ? Où est passée l'incommensurabilité ?

En mathématiques, il faut toujours payer quelque part, et le vrai nœud du problème est la proposition suivante : **«Deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases»**.

Si la démonstration de cette proposition est simple dans le cas commensurable, elle est plus sophistiquée si les bases sont incommensurables. On peut comparer les textes d'Euclide et de Legendre (1823) : ce dernier utilise la double réduction à l'absurde qui est l'autre aspect de la théorie des proportions d'Eudoxe, utilisée par Euclide et plus tard par Archimède.

La formule de l'aire du rectangle est alors conséquence de l'utilisation combinée de la méthode des aires et de la théorie des proportions.

Finalement, établir la formule de l'aire du rectangle :

$$\text{aire du rectangle} = \text{longueur} \times \text{largeur}$$

Et le reste vient tout seul ! Mais l'aire du rectangle est une telle évidence dans nos programmes !

Quoique !

## Troisième balade ... dans l'irrationnel<sup>19</sup>.

*$\sqrt{2}$  est irrationnel : comment le "montrer" à nos élèves ?*

Deux problèmes a priori distincts surgissent : un problème géométrique, celui de doubler un carré, un problème arithmétique, celui de trouver une fraction dont le carré vaut 2.

### Un problème géométrique qui "amène" $\sqrt{2}$ <sup>20</sup>

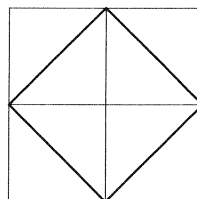
Prenons un carré de côté 2. Son aire est 4.

Plions le comme ci-contre ; on obtient un nouveau carré d'aire moitié du précédent, c'est-à-dire 2.

Le côté de ce carré est donc un nombre dont le carré est 2.

Écrivons le  $\sqrt{2}$ .

Ce côté est aussi la diagonale d'un carré de côté 1.



### L'irrationalité de $\sqrt{2}$ :

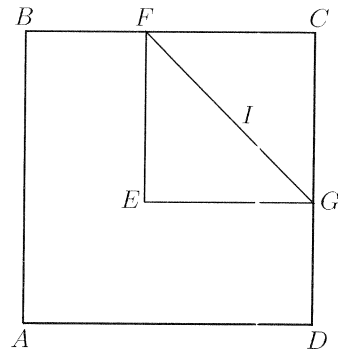
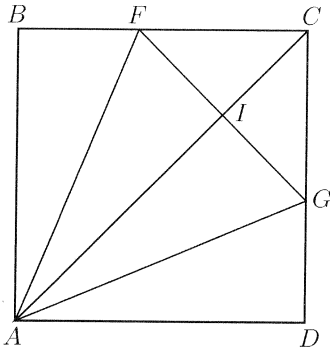
La méthode la plus pratiquée est la démonstration arithmétique par le pair et l'impair. C'est une démonstration exemplaire pour les questions d'irrationalité numérique. Mais celle-ci éloigne alors du problème géométrique ci-dessus.

Adaptons une idée qu'on pouvait trouver de façon dynamique sur le site du colloque de Grenoble EM 2000.

19. les # renvoient à une solution proposée en Annexes «Troisième balade».

20. D'un point de vue historique, la méthode ci-dessous peut faire penser à la démonstration géométrique du doublement d'un carré popularisée par le "Ménon" de Platon, mais cette dernière est d'un autre ordre, car il n'y avait pas de "nombre" dans cette démonstration.

Supposons que  $\sqrt{2}$  soit rationnel, alors  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  avec  $p$  et  $q$  entiers. "Agrandissons" alors le carré de côté 1 avec un rapport  $q$ . On obtient un carré  $ABCD$  de côté entier  $q$  et de diagonale entière  $p$ .



Faisons alors les pliages ci-dessus : deux pliages par rapport à  $(AF)$  et  $(AG)$  ramenant les côtés  $[AB]$  et  $[AD]$  sur la diagonale  $[AC]$ , puis un pliage par rapport à  $(FG)$ .

Déplions tout, revenons dans le monde des mathématiques et examinons la figure obtenue :

# Montrez que le carré  $EFCG$  est aussi à côté et diagonale entiers.

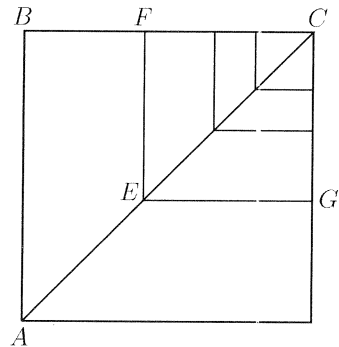
### Une "descente infinie finie" :

Le procédé est auto-reproductible :  
on a donc une "descente infinie" de carrés de plus en plus petits.

Mais les côtés de ces carrés sont des entiers naturels.

Une suite strictement décroissante d'entiers naturels est finie.

C'est absurde !



### Une seule marche :

Pour ceux qui craignent les trop grandes descentes, ils peuvent se contenter d'une seule étape, en choisissant  $\frac{p}{q}$  irréductible. Ils obtiennent alors une contradiction dans le carré  $EFCG$  de côté entier  $p' < p$  et de diagonale  $q' < q$  et qui vérifie

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

### Développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue :

La descente infinie me paraît plus éclairante que la seule marche. Pour des élèves de collège, on peut exemplifier la démarche : partant d'un nombre entier  $q$  (par exemple 48), on peut leur faire constater qu'au bout de  $n + 1$  pliages maximum (49) le carré n'existe plus, alors qu'il existe toujours !

Cet algorithme est à rapprocher de l'anthyphère qui conduit au développement de  $\sqrt{2}$  en fraction continue.

# Soit un carré de côté  $q$  et de diagonale  $p$  ( $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  n'est pas rationnel d'après ce qui précède). En reprenant les notations ci-dessus, et en posant  $p' = EC$  et  $q' = FC$ , montrer que :  $\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p'}{q}}$

En déduire le développement en fraction continue de  $\sqrt{2}$  (réitérer le procédé).

### En conclusion :

*L'accès à l'irrationnel passe par l'absurde et/ou l'infini*

## 6 - Une configuration européenne

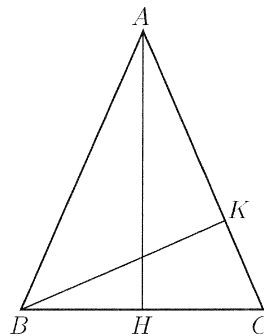
### Cosinus ou Thalès, lequel choisir ?

Enseigner le cosinus avant Thalès est un contre-sens historique, et démontrer Thalès avec le cosinus devient un contre-sens épistémologique. Mais lorsque les deux sont en place, ce choix devient-il important ?

Considérons pour commencer cet exercice proposé dans un manuel de troisième au chapitre « trigonométrie » :

$ABC$  est un triangle isocèle en  $A$ .  $AB = AC = 10$  ;  $BC = 8$ .  $K$  est la projection orthogonale de  $B$  sur  $(AC)$ ,  $H$  celle de  $A$  sur  $(BC)$ . Que vaut  $KC$  ?

Que font la plupart des élèves : ils calculent le cosinus de  $\widehat{ACH}$  dans le triangle  $ACH$ , qu'ils trouvent égal à 0,4 ; puis prenant leur calculatrice, un "petit coup de « shift cos » (ou « inv cos », ou « 2nd cos »)" leur permet d'avoir accès à la mesure de cet angle qu'il arrondissent à  $66^\circ$  ; travaillant alors dans le triangle  $BKC$ , ils en déduisent la longueur de  $KC$  en multipliant 8 par  $\cos(66^\circ)$ , ce qui leur donne environ 3,25.



Cette démarche n'est pas inintéressante, car elle suppose un enchaînement d'actions et de validations. Mais ce passage cosinus-inverse du cosinus a un double inconvénient : faire jouer à la calculatrice le rôle d'une boîte noire ; ne pas obtenir le résultat "exact". Ce peut être l'occasion d'un travail sur la calculatrice pour garder la précision maximale.

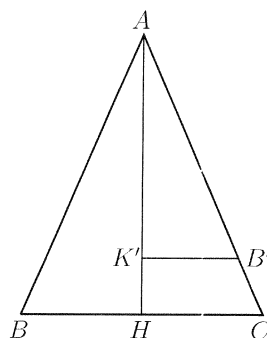
Le véritable enjeu de cet exercice est d'écrire le cosinus de  $\widehat{ACH}$  de deux façons sans "calculer" cet angle pour arriver à l'égalité des rapports :  $\frac{CH}{AC} = \frac{CK}{BC}$  qui donne  $CK = 3,2$

Avec les nouveaux programmes de seconde, cette égalité s'obtient en montrant que les triangles  $ACH$  et  $BCK$  ont "même forme".

Mais on peut dès le collège "illustrer" cette égalité en "déplaçant" le triangle  $BKC$  pour l'amener en  $AB'K'$  (la validation du "mouvement" se fait par "constat" de l'"égalité" des deux triangles).

La configuration qui apparaît est celle de Thalès ; elle amène à l'égalité :  $\frac{B'K'}{AB'} = \frac{CH}{AC}$

Un tel geste demande une pratique que n'ont pas les élèves. Son seul objectif est de leur permettre de faire le lien entre Thalès, trigonométrie et triangles "de même forme" pour les élèves de seconde.



### Thalès en Europe :

Revenons alors sur notre première balade. Pour découper un rectangle pour en faire un carré, j'ai utilisé le résultat : dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égale au produit des longueurs des segments qu'elle détermine sur cette hypoténuse, et j'ai dit : «c'est Thalès».

### *Promenons-nous en Europe*<sup>21</sup> :

En Angleterre : «Theorem of Thales»

«An angle inscribed in a semi-circle is a right angle»<sup>22</sup>

En Allemagne : «Der Satz des Thales»

«Jedes Dreieck über einem Durchmesser in einem Halbkreis ist rechtwinklig»<sup>23</sup>

En Suisse : c'est la propriété de la hauteur que j'ai énoncé ci-dessus.

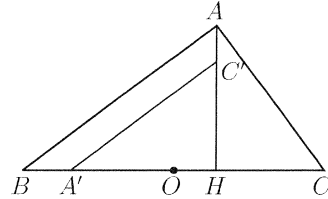
21. Avec Henry Plane in Brochure «Autour de Thalès» déjà citée

22. Un angle inscrit dans un demi-cercle est un angle droit.

23. Un triangle construit sur un diamètre et inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

### Une configuration européenne :

Si l'on veut "montrer" le "théorème suisse", c'est à dire l'égalité  $AH^2 = BH \times CH$ , on peut utiliser le fait que les tangentes des angles  $\widehat{ABH}$  et  $\widehat{ACH}$  sont inverses l'une de l'autre. Soyons dynamiques, et faisons "tourner" le triangle  $ACH$  d'un quart de tour autour du point  $H$ . Il "devient" le triangle  $HA'C'$ , et nous retrouvons notre "Thalès français", celui des "lignes proportionnelles".



L'égalité ci-dessus se déduit alors de l'égalité des rapports :

$$\frac{CH}{AH} = \frac{C'H}{A'H} = \frac{C'H}{AH} = \frac{A'H}{BH} = \frac{AH}{BH}$$

Nos amis d'outre Manche et d'outre Rhin retrouveront aussi dans cette configuration leur Thalès.

Encore une fois il ne s'agit pas ici de nier la force de la trigonométrie, et sa facilité d'accès aux élèves, mais de montrer la complémentarité que peut apporter l'aspect dynamique du mouvement à l'éclairage du problème<sup>24</sup>.

Mais on peut rêver en multipliant les occasions de cette géométrie de mouvement d'installer chez les élèves des gestes qui peuvent devenir des méthodes. C'est ce que je vous propose d'illustrer dans la quatrième balade.

## Quatrième balade... dans le triangle rectangle<sup>25</sup>

### Une configuration porteuse de suite :

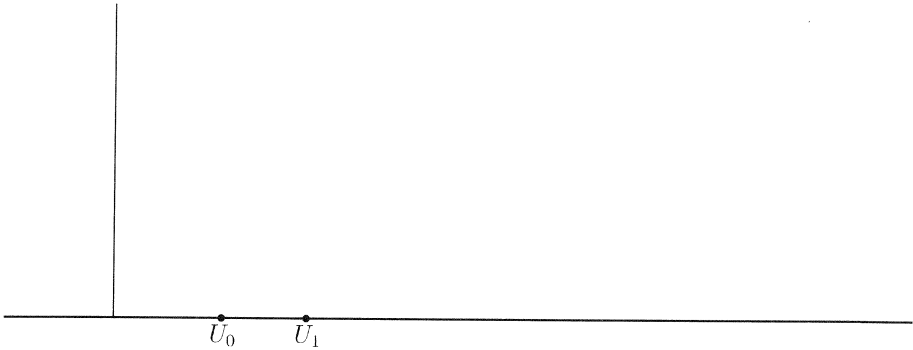
Lorsque l'élève découvrira les suites géométriques, et qu'il comprendra que tout terme est moyenne géométrique de celui qui le précède et de celui qui le suit, peut-être se souviendra-t-il de la configuration ci-dessus, qui "fait voir" cette moyenne géométrique.

Connaissant  $U_0$  et  $U_1$ , il pourra alors "positionner"  $HC = U_0$  et  $HA = U_1$  comme dans la configuration précédente, et construire  $HB = U_2$ . Utilisant alors la combinaison de cette configuration et la "répétition" de notre Thalès, il pourra construire des suites géométriques connaissant les deux premiers termes sans connaître la raison de cette suite : c'est ce que je vous propose de faire.

24. On peut aussi montrer ce résultat avec Pythagore!

25. les # renvoient à une solution proposée en Annexes "Quatrième balade"

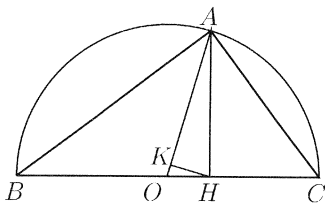
# Construire la suite géométrique de premier terme  $U_0$  et  $U_1$ .



### Il y a moyenne et moyenne :

Moyenne arithmétique, la plus simple et la plus classique, liée aux phénomènes de “progression arithmétique”, et base des indicateurs statistiques ; moyenne géométrique, liée à tous les phénomènes de “progression géométrique”, et si présente dans notre quotidien (qui n’a pas un prêt en cours?) ; moyenne harmonique, liée à “l’inverse proportionnalité”, et qui nous fait maudire les bouchons sur l’auto route lors de nos départs en vacances qui réduisent tant notre “vitesse moyenne” : comment sont-elles liées ?

Replongeons dans notre triangle rectangle :



Considérons le triangle rectangle  $ABC$  ci-contre.

Soit  $H$  la projection orthogonale de  $A$  sur  $(BC)$ ,  $K$  celle de  $H$  sur  $(OA)$ .

Soit  $HB = a$  et  $HC = b$ .

$OA$  est la moyenne arithmétique de  $a$  et  $b$ .

$AH$  est la moyenne géométrique de  $a$  et  $b$ .

# Montrez que  $AK$  représente la moyenne

harmonique de  $a$  et  $b$ .

Cette configuration nous permet d’affirmer :

moyenne harmonique  $\leq$  moyenne géométrique  $\leq$  moyenne arithmétique

la double égalité ayant lieu si et seulement si  $a = b$ .

On peut évidemment montrer ces inégalités par l’algèbre, mais la configuration ci-dessus lie étroitement ces trois moyennes, et nous permet de visualiser pour  $a + b$  constant la sensibilité de chacune de ces moyennes à l’écart entre  $a$  et  $b$ .



## 7 - Un théorème extrêmement simplificateur

Je vais terminer ce “parcours géométrique” par un théorème fondamental :

«Tout triangle est isocèle»

Un corollaire immédiat est :

«Tout triangle est équilatéral»

Vous ne me croyez pas ! En voici une démonstration :

Le triangle  $ABC$  ci-contre est a priori quelconque.  $I$  est le point d'intersection de la bissectrice issue de  $A$  et de la médiatrice de  $[BC]$ .  $H$  et  $K$  sont les projections orthogonales de  $I$  sur  $(AB)$  et  $(AC)$ .

$I$  étant sur la bissectrice,  $IH = IK$ . Les triangles rectangles  $AIH$  et  $AIK$  sont donc “égaux”.

Donc  $AH = AK$ .

$I$  étant sur la médiatrice de  $[BC]$ ,  $IB = IC$ . Comme  $IH = IK$ , les triangles rectangles  $IBH$  et  $ICK$  sont donc aussi “égaux”.

Donc  $HB = KC$ .

On en déduit :  $AB = AH + HB = AK + KC = AC$ .

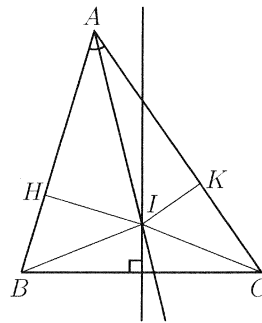
Donc le triangle est isocèle en  $A$ .

Vous ne connaissez pas ce résultat, et vous avez repris la démonstration, sans y trouver de “faille”. Votre inquiétude grandit à l'idée d'avoir à “balancer” tout votre cours de géométrie, ainsi que cet article qui n'a plus lieu d'être !

Rassurez vous : refaites un dessin et vous verrez la supercherie. Ce que j'ai en fait montré ici “par l'absurde”, c'est que si le triangle n'est pas isocèle en  $A$ , ce point  $I$  est à l'extérieur du triangle ( $H$  et  $K$  sont l'un à l'intérieur du côté, l'autre à l'extérieur).

J'ai souvent entendu que le propre des mathématiques était de pouvoir raisonner juste sur une figure fautive : oui, mais pas trop fautive ! Cela m'amène à deux points de réflexion que je trouve fondamentaux :

- \* Une démonstration n'a pas pour objectif de prouver qu'une chose est “vraie”, mais de vérifier que le cheminement qui a conduit à la conclusion à partir des hypothèses est valide.
- \* On évacue presque toujours les notions particulièrement délicates d'intérieur et d'extérieur, de convexité, de connexité, en les gommant par une prise d'information sur le dessin.



## 8 - La maison des mathématiques

Nous avons suivi des chemins qui proposent un aller-retour constant entre le monde physique et le monde mathématique, entre la forme et l'objet mathématique, entre le dessin et la figure, entre la "connaissance naturelle" et la "connaissance évoluée". C'est vers la "maison des mathématiques" que conduisent ces différents chemins.

Mais y sommes nous vraiment entrés? Prenons l'activité suivante :

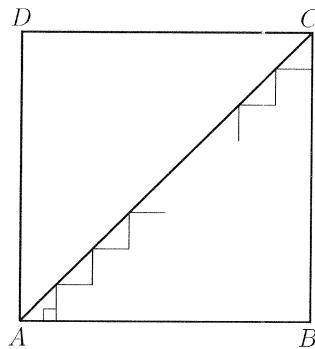
Considérons le carré  $ABCD$  ci-contre, la "rampe"  $[AC]$ , et "l'escalier" qui va de  $A$  à  $C$  avec des marches de "pas"  $\frac{1}{n}$ .

Notre intuition, notre perception naïve, nous font penser que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{"escalier"}) = \text{"rampe"}.$$

Mais pour tout  $n$ , la longueur de l'escalier est 2. Donc

$$\begin{aligned} 2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{"longueur de l'escalier"}) \\ &\neq \text{"longueur de la rampe"} = \sqrt{2} \end{aligned}$$



Reprenons notre exemple de découpage d'un triangle pour en faire un carré, et posons-nous la question : peut-on reconstituer un cercle à partir d'un carré par "dissection" et "déplacements". Le problème ainsi posé dans les années 1920 par Banach et Tarski s'appelle «la quadrature géométrique du cercle». Naturellement, dans ce dernier cas, on ne peut pas espérer faire des partitions à l'aide de ciseaux car un disque a une frontière "bombée" que ne possède pas le carré!

Laczkovitch, mathématicien hongrois, a donné une réponse positive à cette question : il a montré que de telles partitions du carré et du disque étaient possibles et que l'on pouvait passer des morceaux du disque aux morceaux du carré par des translations<sup>26</sup>.

Les mathématiques à cet autre niveau vont donc aller contre notre intuition, contre notre perception : c'est Cantor qui, venant de construire une bijection de  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{R}^2$  écrit à Dedekind : «Je le vois, mais je ne peux le croire». De manière plus générale, la science peut aller contre notre intuition, et je laisse le soin à Rudolf Bkouche d'exemplifier cela : «Toute la science moderne s'est construite autour de cette "vérité" paradoxale : la terre tourne autour du soleil . . . On ne l'a jamais expérimenté même si on sait l'expliquer ; en fait c'est bien plus l'harmonie qui se dégage de l'héliocentrisme qui a fait la force de cette théorie, ce qui n'empêche pas de considérer la terre comme notre repère naturel et de vivre comme si elle ne se mouvait pas».

26. Voir Jean-Pierre Kahane in Repères-IREM n° 29.

Exhiber les exemples mathématiques ci-dessus à nos élèves est sans doute prématuré si l'on considère que l'enseignement scientifique est moins de raconter la "modernité" que d'en donner les clés d'accès, mais leur donner la possibilité d'aller plus loin chaque fois que l'occasion s'en présente peut donner à certains l'envie de mieux connaître cette "maison des mathématiques": cette curiosité peut être le début d'une "vocation scientifique".

Mais revenons dans le cadre de notre texte, c'est-à-dire celui d'un enseignement pour tous: son objectif est de tracer des chemins qui mènent à cette "maison des mathématiques"; libre alors à chacun de vouloir la visiter plus à fond, ou au contraire de ne pas la trouver à son goût. L'important est que tous en connaissent des accès, et soient capables de les retrouver un jour s'ils en ont besoin.

Ces chemins ne sont pas faciles, et il est important de les baliser régulièrement par une hiérarchisation progressive des niveaux de conceptualisation, de traitement, de validation. Ceux de la géométrie élémentaire que j'ai essayé d'explorer ici reposent sur la conviction suivante: **le voir, le croire et le savoir se construisent ensemble dans la plus grande intimité.**

*Un grand merci à :*

**Evelyne Barbin, Rudolf Bkouche, Françoise Chamontin, Marie-Claire Combes, Jean-Pierre Kahane, Marc Legrand, Madeleine Marot, René Mulet-Marquis, Daniel Perrin, Mireille Sauter, ...**

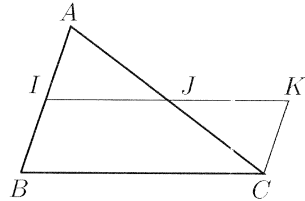
*pour leurs contributions à ce texte.*

## ANNEXES

## Première balade

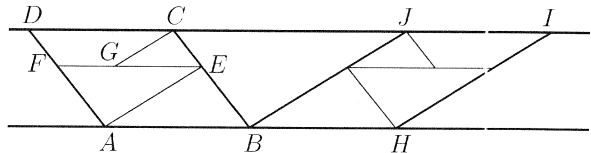
## Du triangle au parallélogramme :

Une symétrie centrale vient aisément au bout du problème.

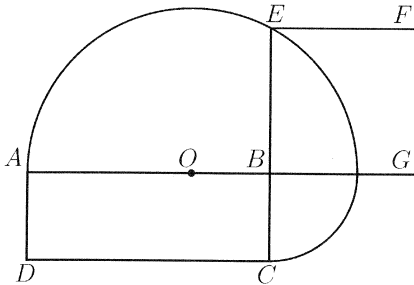


## Du parallélogramme au parallélogramme.

On utilise la direction de  $(BC)$  et des translations immédiates.



## Du rectangle au carré.



On construit sur  $(AB)$  le point  $M$  tel que  $BM = BC$  et  $B$  appartient à  $[AM]$ . On construit le demi-cercle de diamètre  $[AM]$ . Soit  $E$  l'intersection de ce demi-cercle avec la droite  $(BC)$ . Le triangle  $AEM$  est donc rectangle, et  $[EB]$  est la hauteur relative à l'hypoténuse. D'après Thalès (voir plus loin), on a donc :

$$BE^2 = AB \times BM = AB \times BC$$

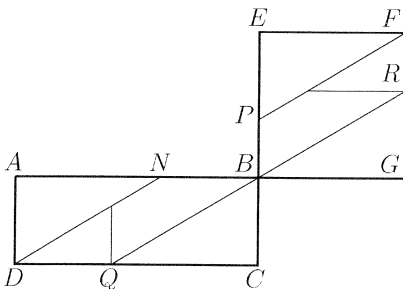
$[BE]$  est donc le côté d'un carré de même aire que le rectangle.

D'où la fin de la construction

Pour le découpage, on construit le triangle  $AND$  avec  $AN = EF$ , on construit le triangle  $EPF$  avec  $EP = AD$ . On est ainsi assuré d'avoir construit deux triangles égaux qui se déduisent l'un de l'autre par une translation.

On fait de même avec les triangles  $BQC$  et  $BRG$ .

Il ne reste plus qu'à montrer que  $BNDQ$  et  $BPFR$  sont deux parallélogrammes ayant même base et même hauteur, ce qui nous ramène au découpage précédent.



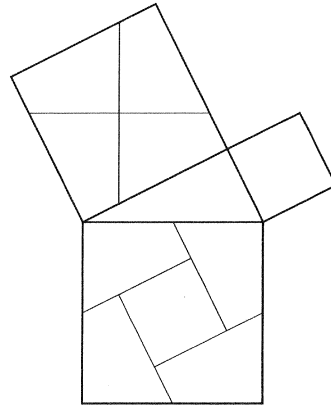
**De deux carrés à un troisième : merci Pythagore.**

Le découpage ci-contre est lié aux bords du triangle rectangle, donc des trois carrés.

On passe là encore des deux “petits carrés” au “grand carré” par translation des pièces.

On peut trouver ce puzzle dans le livre de Steinhaus «Les instantanés mathématiques»<sup>27</sup>.

Il existe de nombreux autres “puzzles de Pythagore”.



*Seconde balade*

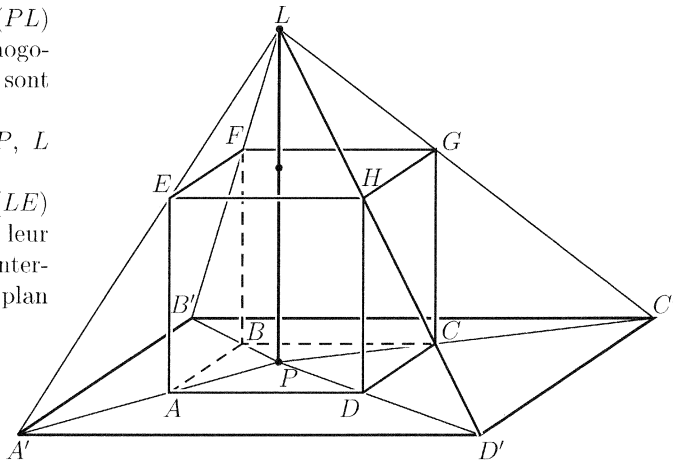
**L’ombre :**

Les droites  $(AE)$  et  $(PL)$  étant toutes deux orthogonales au plan  $ABCD$  sont parallèles.

Les points  $A, E, P, L$  sont donc coplanaires.

Les droites  $(PA)$  et  $(LE)$  sont donc sécantes, et leur intersection  $A'$  est l’intersection de  $(LE)$  et du plan  $ABCD$

On obtient de même les points  $B', C', D'$ .



La forme de l’ombre  $A'B'C'D'$  est un carré, car homothétique du carré  $ABCD$ . Peut-être avez-vous hésité sur cette forme. Rassurez-vous, c’est le cas de la plupart, qui pensent que pour que ce soit un carré, il faut que  $P$  soit centre du carré  $ABCD$ . Seule la démonstration peut ici nous permettre d’affirmer cela.

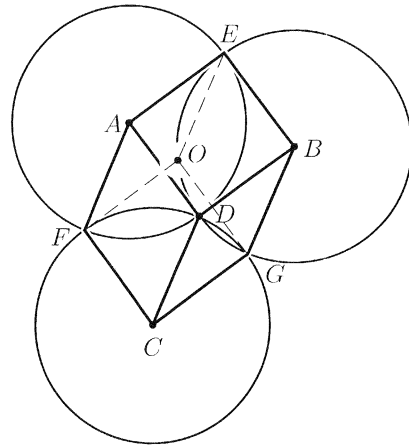
Je vous laisse admirer l’omniprésence de Thalès.

27. Voir l’article de Jean-Pierre Kahane dans *REPÈRES-IREM* n° 29

**Les trois cercles :**

On fait apparaître un parallélépipède rectangle en perspective cavalière.

Le sommet caché  $O$  est le centre du quatrième cercle, et le rayon de ce cercle  $OE$  a la même longueur que les trois autres cercles.

*Troisième balade***L'irrationalité :**

En utilisant les symétries axiales, on montre aisément que  $EF CG$  est un carré.

Par symétrie,  $AI = AB = q$ ; donc  $IC = p - q$ ; donc  $EC$  est un entier.

Par symétrie,  $BF = FI$ ; or  $FI = IC = p - q$ ; donc  $BF$  est un entier, donc  $FC$  est un entier.

**Le développement en fraction continue :**

$$\text{On a : } \frac{p}{q} = \frac{AC}{BC} = \frac{AI + IC}{BC} = 1 + \frac{p'}{q} = 1 + \frac{1}{\frac{2q}{p'}}$$

$$\text{Or } \frac{q}{p'} = \frac{BF + FC}{p'} = \frac{\frac{p'}{2} + q'}{p'};$$

$$\text{donc } \frac{2q}{p'} = 1 + \frac{2q'}{p'} = 1 + \frac{2q'^2}{q'p'} = 1 + \frac{p'^2}{p'q'} = 1 + \frac{p'}{q'}; \text{ d'où le résultat...}$$

$$\text{On a de même : } \frac{p'}{q'} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p''}{q''}} \text{ et ainsi de suite...}$$

D'où le développement en fraction continue de  $\sqrt{2}$ .











# DU RAISONNEMENT À LA DÉMONSTRATION

Rudolf BKOUCHE

IREM de LILLE

*"la raison n'a pas le pouvoir de  
se soustraire à ses conclusions"<sup>1</sup>*

Alain de Libera

## Introduction

On réduit trop souvent la démonstration à une question de légitimation, de reconnaissance du vrai, pourrait-on dire. On comprend alors la difficulté que l'on rencontre lorsqu'un élève affirme que c'est évident et ne comprend pas l'intérêt d'une démonstration. Mais la démonstration n'a pas pour seul objectif de dire le vrai, elle permet aussi de le comprendre et de répondre à la question : pourquoi est-ce comme cela et pas autrement ? C'est en cela que la démonstration conduit à la notion de *nécessaire* et qu'elle contribue à la *construction de l'intelligibilité du monde*.

La question de la place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques, et plus généralement dans l'enseignement scientifique, est alors moins de codifier *a priori* les règles de la démonstration que de comprendre pourquoi de telles règles sont nécessaires. Il faut alors partir du raisonnement informel ; c'est aux limites du raisonnement informel que l'on comprend en quoi il peut être insuffisant et comment on peut construire les codifications nécessaires. Si la démonstration ne se réduit pas au raisonnement en ce sens qu'elle le réorganise, l'étape du raisonnement informel, de l'explication approximative, apparaît comme une étape obligée pour comprendre les enjeux de la démonstration ; il ne s'agit pas seulement d'une question d'apprentissage, la mise en forme d'une démonstration canonique passe souvent par un raisonnement informel préliminaire.

Nous nous intéresserons dans ce texte essentiellement à la géométrie ; d'une part celle-ci a joué dans le développement des sciences le rôle de modèle d'une théorie déductive, d'autre part la géométrie, en tant qu'elle est au point de rencontre des sciences mathématiques et des sciences physiques, reste un lieu essentiel de la construction de l'intelligibilité du monde.

---

1. Averroès, *Discours décisif*, traduction inédite de Marc Geoffroy, introduction d'Alain de Libera, Garnier-Flammarion, Paris 1996, p. 63-64.

Nous énoncerons d'abord quelques principes qui guident cet exposé :

1. la démonstration participe de l'activité mathématique.
2. la démonstration a un double aspect : d'une part "*dire le vrai*", en cela la démonstration apparaît comme un mode de légitimation de la connaissance, d'autre part "*dire les raisons du vrai*", ce qui conduit à considérer la connaissance démontrée comme nécessaire au sens que non seulement elle est vraie mais qu'elle ne peut pas ne pas être vraie.
3. c'est à travers la méthode démonstrative que se construisent ce que l'on appelle depuis les Grecs les *idéalités mathématiques*; autrement dit les objets mathématiques, en tant qu'ils sont des objets idéaux, se construisent *via* l'activité de démonstration.
4. la démonstration est un discours. Nous expliciterons ce dernier point dans la suite de cet article.

## Quelques exemples de démonstrations

### 1 - La perpendicularité

#### - Clairaut

Nous rappellerons d'abord la définition de la perpendicularité que donne Clairaut<sup>2</sup> dans ses *Éléments de Géométrie* :

*"Une ligne<sup>3</sup> qui tombe sur une autre, sans pencher sur elle d'aucun côté, est perpendiculaire à cette ligne."*

Cette définition est classique ; on la trouve par exemple dans les *Nouveaux Eléments de Géométrie* d'Arnauld<sup>4</sup>. On peut y voir un renvoi à la relation verticale-horizontale ainsi qu'à cette figure fondamentale que constitue le rectangle. Clairaut la justifie en considérant la distance d'un point à une ligne.

Cette définition informelle de la perpendicularité permet pourtant à Clairaut de construire la perpendiculaire d'un point à une droite ; nous rappelons ici le principe de la démonstration de Clairaut :

Soit  $C$  un point d'une droite,  $A$  et  $B$  deux points de la droite situés de chaque côté du point  $C$  et à égale distance de ce point. Il suffit de trouver un point  $D$  à égale distance des points  $A$  et  $B$ , auquel cas la ligne  $CD$  tombant sur la ligne  $AB$  ne penchera ni d'un côté ni de l'autre ; pour cela on trace deux cercles de même rayon de centres respectifs  $A$  et  $B$  ; soit  $D$  un point d'intersection de ces deux cercles, il est équidistant des points  $A$  et  $B$  ce qui prouve que la droite  $CD$  est perpendiculaire à la droite  $AB$ .

Cette construction pose problème : le choix d'un autre rayon pour les cercles aurait-il donné la même perpendiculaire ? ce qui pose la question de l'unicité de la perpendiculaire menée du point  $C$  à la droite  $AB$ .

2. Alexis-Claude Clairaut, *Éléments de Géométrie* (1741), "Les Maîtres de la Pensée Scientifique", Gauthier-Villars, Paris 1920, p. 2.

3. Par le terme *ligne* il faut entendre ici la ligne droite.

4. Antoine Arnauld, *Nouveaux Eléments de Géométrie*, Paris 1667, p. 86.

Clairaut continue en considérant le cas où le point  $C$  n'est pas situé sur la droite ; dans ce cas on trace un cercle de centre  $C$  qui recoupe la droite en deux points  $A$  et  $B$ , les cercles de centres respectifs  $A$  et  $B$  et passant par le point  $C$  se coupent en un second point  $D$ , la droite  $CD$  est la perpendiculaire cherchée.

Ici encore Clairaut ne pose pas la question de l'équidistance d'un point quelconque de la droite  $CD$  aux deux points  $A$  et  $B$ .

La question est ici moins celle d'une démonstration rigoureuse que celle d'un raisonnement qui permet, la notion de perpendiculaire étant intuitivement donnée, de construire cette perpendiculaire ; ce qui importe ici c'est l'efficacité du raisonnement, au sens d'une efficacité pratique, la question de fonder ce raisonnement venant en second.

Il nous faut rappeler ici quelques principes de l'ouvrage de Clairaut, ouvrage destiné, comme il l'explique dans la préface<sup>5</sup>, aux commençants. La question est moins de fonder en rigueur le raisonnement géométrique que d'amener le lecteur à comprendre comment le raisonnement permet de découvrir de nouvelles vérités et de résoudre des problèmes. Le temps viendra évidemment où il faudra légitimer les raisonnements mais ce travail ne pourra venir qu'après une première confrontation à la géométrie.

Clairaut dans son ouvrage affinera ses raisonnements au fur et à mesure qu'il avance et la dernière partie est consacrée au calcul d'aires et de volumes par la méthode des indivisibles ; ici le raisonnement se fait plus sophistiqué même s'il s'appuie encore sur l'intuition.

### - Euclide

En donnant une définition purement descriptive de la perpendicularité, Clairaut se plaçait hors du point de vue euclidien, lequel s'appuie essentiellement sur les grandeurs.

Ainsi Euclide définit l'angle comme *"l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes (lignes droites dans le cas qui nous intéresse) qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite"*<sup>6</sup>, l'angle droit étant défini de la façon suivante:

*"Et quand une droite, ayant été élevé sur une autre droite, fait les angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit"*<sup>7</sup>.

La question se pose alors de savoir si deux angles droits sont égaux. Euclide y répond en énonçant cette égalité comme postulat<sup>8</sup>. On peut se demander les raisons qui ont conduit Euclide à ce choix : la propriété est-elle suffisamment évidente pour

5. La préface de l'ouvrage de Clairaut est un modèle de réflexion didactique sur l'enseignement et nous ne pouvons, dans le cadre de cet article, que renvoyer à sa lecture.

6. Euclide, *Les Éléments*, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, volume I, p. 158.

7. Euclide, *Les Éléments*, o.c. p. 160.

8. C'est le postulat 4, *ibid*, p. 164.

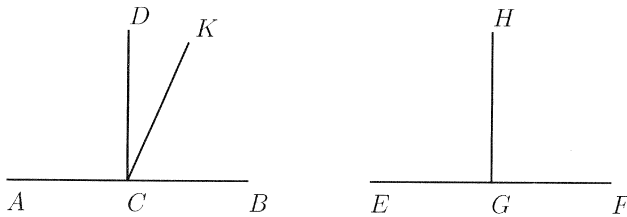
que l'on se passe d'une démonstration dont nous verrons qu'elle est aisée dans le cadre des *Éléments*, ou bien est-elle, comme le postulat des parallèles, la marque d'un échec d'Euclide à le démontrer, échec qui pourrait être lié aux difficultés posées par la notion d'angle? L'égalité des angles droits sera démontrée par Proclus dans ses *Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*<sup>9</sup>, et plus tard par Legendre dans ses *Éléments de Géométrie*<sup>10</sup>.

### - Legendre

Le premier théorème de l'ouvrage de Legendre affirme l'égalité des angles droits.

Nous citons ici la démonstration telle que l'écrit Legendre dans ses *Éléments de Géométrie*:

*"Soient la droite CD perpendiculaire à la droite AB, et la droite GH perpendiculaire à la droite EF, on peut supposer que les segments CA, CB, GE, GF sont égaux.*



*"Plaçons la droite EF sur la droite AB de sorte que le point E coïncide avec le point A et le point F avec le point B, auquel cas le point G milieu de EF coïncide avec le point C milieu de AB, alors la droite GH viendra coïncider avec la droite CD. En effet, si la droite GH ne coïncide pas avec la droite CD, mais vient sur la droite CK, située par exemple dans le quadrant BCD, alors, puisque les angles  $\widehat{EGH}$  et  $\widehat{FGH}$  sont égaux, les angles  $\widehat{ACK}$  et  $\widehat{BCK}$  seront égaux; mais les angles  $\widehat{ACD}$  et  $\widehat{BCD}$  sont égaux, l'angle  $\widehat{ACK}$  est plus grand que l'angle  $\widehat{ACD}$ , l'angle  $\widehat{BCK}$  est plus petit que l'angle  $\widehat{BCD}$ , par conséquent l'angle  $\widehat{ACK}$  est plus grand que l'angle  $\widehat{BCK}$  ce qui est impossible. Donc GH vient coïncider avec CD ce qui prouve la proposition."*

Nous voyons ainsi intervenir, d'abord le principe de l'égalité par superposition<sup>11</sup>, lequel reste le principe fondamental de la géométrie euclidienne, ensuite les propriétés de comparaison des angles. Notons que la comparaison des angles reste ici

9. Proclus, *Les Commentaires sur le Premier Livre des Éléments d'Euclide*, traduit du Grec en Français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges 1948, p. 165-166.

10. Legendre, *Éléments de Géométrie*, douzième édition, Firmin Didot, Paris 1823, p. 6-7.

11. Dans l'édition citée de Bernard Vitrac, ce principe (notion commune 7) s'énonce ainsi: *"Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles"* (p. 178). Nous reviendrons sur ce principe dans la suite.

intuitive, liée à la notion d'écart intervenant dans la définition des angles énoncée par Legendre :

*"Lorsque deux lignes droites  $AB$  et  $AC$  se rencontrent, la quantité plus ou moins grande dont elles sont écartées l'une de l'autre s'appelle angle; le point de rencontre ou d'intersection  $A$  est le sommet de l'angle; les lignes  $AB$  et  $AC$  en sont les côtés."*

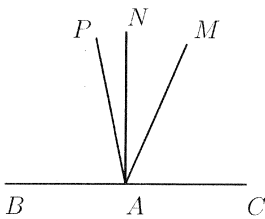
*"Lorsque la ligne droite  $AB$  rencontre une autre droite  $CD$ , de telle sorte que les angles adjacents  $\widehat{BAC}$ ,  $\widehat{BAD}$  soient égaux entre eux, chacun de ces angles s'appelle un angle droit; et la ligne  $AB$  est dite perpendiculaire sur  $CD$ .<sup>12</sup>"*

On remarque ici le rôle de la figure autant dans la définition legendrienne de l'objet *angle* que dans la démonstration de l'égalité des angles droits. C'est alors le raisonnement lui-même qui précise la notion d'écart entre deux droites se rencontrant en un point et par conséquent la notion d'angle; en ce sens si l'objet est antérieur au raisonnement (il est ce sur quoi on raisonne), ce dernier implique une redéfinition de l'objet.

Dans les éditions posthumes de l'ouvrage de Legendre par Blanchet, celui-ci donne une autre démonstration de l'égalité des angles droits qui s'appuie explicitement sur le mouvement<sup>13</sup>.

Blanchet énonce et démontre la proposition suivante :

*"Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une."*



*"En effet, supposons qu'une droite  $AM$  d'abord couchée sur  $AC$ , tourne autour du point  $A$ , elle formera deux angles adjacents  $\widehat{MAC}$ ,  $\widehat{MAB}$ , dont l'un  $\widehat{MAC}$ , d'abord très petit ira toujours en croissant, et dont l'autre  $\widehat{MAB}$ , d'abord plus grand que  $\widehat{MAC}$ , ira constamment en décroissant jusqu'à zéro."*

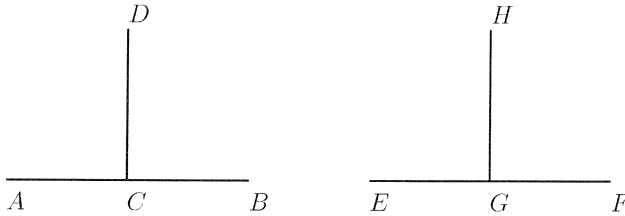
*"L'angle  $\widehat{MAC}$ , d'abord plus petit que  $\widehat{MAB}$ , deviendra plus grand que cet angle; par conséquent il y aura une position  $AN$  de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule."*

Blanchet poursuit en énonçant et démontrant le corollaire :

*"Tous les angles droits sont égaux."*

12. A.M. Legendre, o.c. p. 2

13. A. Blanchet, *Éléments de Géométrie par A.M. Legendre avec additions et modifications*, deuxième édition suivie de la quinzième édition, Firmin Didot, Paris 1848, p. 8-9.



"Soient  $DC$  perpendiculaire sur  $AB$ , et  $HG$  perpendiculaire sur  $EF$ , je dis que l'angle  $\widehat{DCB}$  est égal à l'angle  $\widehat{HGF}$ . En effet, si l'on porte la droite  $EF$  sur  $AB$ , de manière que le point  $G$  tombe en  $C$ ,  $GH$  prendra la direction  $CD$ ; autrement on pourrait, par un point pris sur une droite, élever deux perpendiculaires sur cette droite."

Une telle démonstration pose problème dans la mesure où elle s'appuie sur une notion non encore explicitée : la continuité du mouvement<sup>14</sup>. On peut penser que Legendre n'aurait jamais accepté une telle démonstration en contradiction avec la tradition euclidienne de l'élimination du mouvement. Il nous faut ici noter que les éditions posthumes sont très différentes de l'ouvrage de Legendre même si leur auteur prétend continuer l'œuvre de Legendre ; en particulier Blanchet, en usant du mouvement semble donner plus de place à l'aspect expérimental de la géométrie et on peut rapprocher cette démonstration de celles de l'ouvrage cité de Clairaut.

### - Hilbert

En regard de la démonstration de Legendre, nous pouvons citer la démonstration hilbertienne, formellement analogue, le principe de l'égalité par superposition étant remplacé par les axiomes de congruences<sup>15</sup>. La figure y devient, en principe, inutile, tout au plus un support du raisonnement géométrique pour reprendre une expression aujourd'hui à la mode ; en fait la problématique hilbertienne nous semble plus subtile si l'on considère que, d'une part Hilbert propose un développement purement langagier de la géométrie<sup>16</sup>, d'autre part Hilbert construit son discours au plus près de la connaissance intuitive comme il l'explique au début de son ouvrage :

*"On peut classer les axiomes de la géométrie en cinq groupes; chacun de ces groupes exprime quelques faits fondamentaux, liés les uns aux autres et qui nous sont donnés par l'intuition."*<sup>17</sup>

14. Pour une critique de cette démonstration que l'auteur attribue à Legendre lui-même, nous renvoyons à l'ouvrage de Ferdinand Gonseth, *Les Fondements des Mathématiques*, Blanchard, Paris 1926/1974, p. 3-4.

15. David Hilbert, *Les fondements de la géométrie* (1899), édition critique avec introduction et compléments, préparée par Paul Rossier, Dunod, Paris 1971, p. 31.

16. Au sens que la construction hilbertienne se définit comme discours autonome, indépendant de toutes significations extérieures (pour reprendre les termes de Gonseth).

17. David Hilbert, o.c. p. 11.



Le formalisme hilbertien apparaît ainsi comme une méthode permettant la mise en place d'un raisonnement épuré de toutes considérations extérieures au discours qui le constitue, un discours qui n'a, en principe, d'autre référence que le langage sur lequel il se construit. Cependant l'abondance des figures dans l'ouvrage de Hilbert nous rappelle que le discours, s'il se veut autoréférent, renvoie à une situation qui lui est antérieure; la figure n'y est pas un simple support, elle représente une situation originelle que nous pouvons considérer comme la raison d'être du discours, lors même que le discours se veut indépendant, pour des raisons de méthode, de ses origines<sup>18</sup>.

### - Algèbre linéaire

L'algèbre linéaire a permis une reconstruction de la géométrie élémentaire telle que l'on a souvent considérée cette dernière comme un simple chapitre de l'algèbre linéaire. Si un tel point de vue qui s'appuie sur une conception structurale des mathématiques telle qu'elle a été développée par Bourbaki ne saurait épuiser la géométrie, il a l'avantage de la simplicité et de l'efficacité.

Dans le cadre de l'algèbre linéaire la géométrie plane n'est plus que l'étude d'un espace affine de dimension 2 sur le corps des réels muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive (produit scalaire). Dans ces conditions deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits orthogonaux si leur produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est nul. Deux droites sont dites perpendiculaires si les vecteurs directeurs de chacune de ces droites sont orthogonaux<sup>19</sup>.

On appelle isométrie toute transformation affine conservant le produit scalaire, l'égalité des angles droits résulte du fait que deux couples de vecteurs de norme unité orthogonaux étant donnés, il existe une isométrie qui envoie le premier couple dans le second. Ainsi l'égalité des angles droits s'inscrit dans la définition même du plan euclidien.

Notons que l'algèbre linéaire se développe dans un cadre purement formel et que les propriétés qu'elle énonce sont indépendantes de toute signification extérieure au discours; en ce sens la conception "algèbre linéaire" de la géométrie élémentaire s'inscrit dans le programme hilbertien, ce qui à la fois en fait la force et en marque les limites.

Nous reviendrons sur ce dernier point à propos de la notion d'égalité.

### 2 - L'égalité

Nous citons ici trois démonstrations du premier cas d'égalité des triangles, la démonstration euclidienne, la démonstration hilbertienne, la démonstration utilisant l'algèbre linéaire. La question se pose alors du lien entre ces trois démonstrations, autant dans leur ressemblance que dans leur différence.

18. Rudolf Bkouche, "La démonstration : du réalisme au formalisme" (à paraître).

19. Rappelons que l'on appelle *vecteur directeur* d'une droite un vecteur de norme unité porté par cette droite. Une droite porte deux vecteurs directeurs opposés.

la démonstration euclidienne

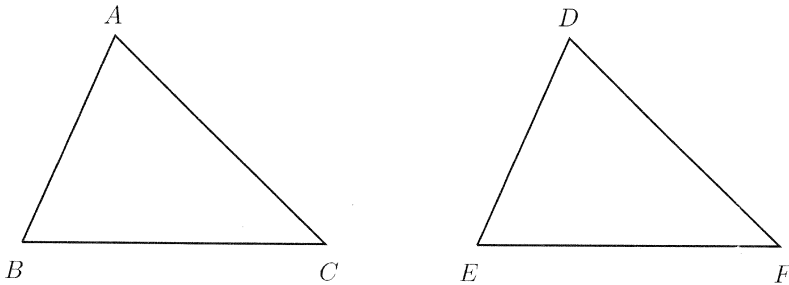
Nous rappellerons d'abord l'énoncé tel qu'il est donné dans les *Éléments* d'Euclide (Livre I, proposition 4) :

*"Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont un angle égal à un angle, ils auront aussi la base égale à la base, les triangles seront égaux et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent<sup>20</sup>."*

Voici la démonstration :

*"Soient deux triangles  $ABC$ ,  $DEF$  ayant les deux côtés  $AB$ ,  $AC$  égaux aux deux côtés  $DE$ ,  $DF$ , chacun à chacun, d'une part  $AB$  à  $DE$ , d'autre part  $AC$  à  $DF$ , ainsi que l'angle  $\widehat{BAC}$  égal à l'angle  $\widehat{EDF}$ .*

*Je dis que la base  $BC$  aussi est égale à la base  $EF$ , et le triangle  $ABC$  sera égal au triangle  $DEF$ , et les angles restants seront égaux aux angles restants, chacun à chacun, c'est-à-dire ceux que les côtés égaux sous-tendent, d'une part celui sous  $ABC$  à celui sous  $DEF$ , d'autre part celui sous  $ACB$  à celui sous  $DFE$ ."*



*"En effet, le triangle  $ABC$  étant appliqué sur le triangle  $DEF$ , d'une part le point  $A$  étant posé sur le point  $D$ , d'autre part la droite  $AB$  sur  $DE$ , le point  $B$  aussi s'ajustera sur le point  $E$  parce que  $AB$  est égale à  $DE$ . Alors  $AB$  étant ajustée sur  $DE$ , la droite  $AC$  s'ajustera sur  $DF$  parce que l'angle sous  $BAC$  est égal à celui sous  $EDF$ . De sorte que le point  $C$  aussi s'ajustera sur le point  $F$  parce que, de plus,  $AC$  est égale à  $DF$ . Mais  $B$  a aussi été ajusté sur  $E$ . De sorte que la base  $BC$  s'ajustera sur la base  $EF$  et lui sera égale. De sorte que tout le triangle  $ABC$  s'ajustera aussi sur tout le triangle  $DEF$  et lui sera égal, et les angles restants s'ajusteront sur les angles restants et leur seront égaux, d'une part celui sous  $ABC$  à celui sous  $DEF$ , d'autre part celui sous  $ACB$  à celui sous  $DFE$ .<sup>21</sup>"*

20. Euclide, *Les Éléments*, introduction générale par Maurice Caveing, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, volume I, p. 200. Notons que dans l'énoncé Euclide ne précise pas qu'il s'agit de l'angle défini par deux côtés donnés, cependant la démonstration précise les données.

21. *ibid.*, p. 201-202.

Premier point : le raisonnement ci-dessus s'appuie essentiellement sur le principe de l'égalité par superposition (cf. note 9). Ce principe énoncé parmi les axiomes (notions communes) exprime, après les axiomes généraux sur les grandeurs, une condition d'égalité des grandeurs géométriques, condition qui fait appel au mouvement (la mise en coïncidence). On peut alors considérer ce principe comme exprimant notre expérience des corps solides, un corps solide étant défini comme un corps non déformable par un mouvement sans que l'on puisse définir une antériorité logique des notions de mouvement et de corps solide; autrement dit, les notions de corps solides et de mouvement sont concomitantes et l'on peut considérer qu'elles participent de l'expérience première de l'homme confronté au monde<sup>22</sup>; c'est en ce sens que l'on peut parler d'un empirisme euclidien.

Second point : la démonstration du premier cas d'égalité des triangles peut être définie comme décrivant une suite d'opérations sur les deux triangles en question. Le discours démonstratif s'appuie explicitement sur les objets (les triangles) représentés par une figure, elle-même *matériellement* représentée par un dessin<sup>23</sup>; c'est en ce sens que l'on peut parler d'une *lecture raisonnée du dessin*. C'est alors l'activité de raisonnement qui permet de dépasser le dessin pour en faire d'abord la figure, c'est-à-dire le dessin questionné, ensuite l'objet idéal (*l'idéalité mathématique*), notion sur laquelle nous reviendrons à la fin de cet article.

Ainsi le raisonnement se définit par rapport à l'objet en même temps que l'objet se construit avec le raisonnement. On peut alors dire que la construction de l'objet, en tant qu'objet géométrique, et le raisonnement sont concomitants; nous renvoyons ici à la dialectique gonséthienne<sup>24</sup> dont on peut dire qu'elle se constitue dans cette concomitance; s'il y a une doctrine préalable (pour reprendre les termes de Ferdinand Gonseth) qui fonde les règles du discours démonstratif, cette doctrine ne devient préalable que *a posteriori* autrement dit c'est la pratique de la démonstration qui permet de la fonder<sup>25</sup>.

Nous avons dit le rôle joué par les opérations, opérations mentales il est vrai, mais on peut remarquer qu'une vérification expérimentale de la proposition énoncée consisterait à effectuer les opérations annoncées et à constater la vérité de *fait* de ces propositions. Le passage aux opérations mentales constitue ainsi une étape importante dans la transformation du *fait* en *droit*.

22. Nous ne nous intéressons pas ici aux conditions de cette expérience première; pour préciser notre point de vue nous renvoyons aux trois aspects de la connaissance géométrique développés par Gonseth, l'intuitif, l'expérimental et le théorique, aspects sur lesquels nous reviendrons. Nous renvoyons par ailleurs à un article antérieur, "Quelques remarques sur la démonstration (Autour de la philosophie de Gonseth)" in *La Démonstration mathématique dans l'Histoire* (Colloque Inter-IREM Épistémologie, Besançon 1989), Éditions IREM Besançon-Lyon 1990.

23. Sur la définition de la figure et sa relation au dessin, nous renvoyons à notre article "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, Colloque Inter-IREM Géométrie, (Le Quesnoy 1994), IREM de Lille 1996.

24. Pour une étude de la dialectique gonséthienne nous renvoyons à l'article de Hourya Sinaeur, "La dialectique de l'espace", in *Espace et horizon de réalité* (philosophie mathématique de Ferdinand Gonseth), sous la direction de Marco Panza et Jean-Claude Pont, Masson, Paris 1992.

25. Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Éditions du Griffon, Neuchâtel, 1945-1955, volume I: "La doctrine préalable".

Notons enfin le rôle secondaire joué par la logique, laquelle se présente essentiellement comme réglant un enchaînement ordonné d'opérations ; si la logique joue un rôle de structuration du raisonnement, c'est, pour reprendre l'expression imagée de Gouseth, celui d'un "agent de la circulation"<sup>26</sup>.

Enfin nous signalerons le rôle de ce premier cas d'égalité des triangles dans la construction de la rationalité géométrique, c'est-à-dire d'une connaissance discursive des situations géométriques : s'appuyant sur le principe de l'égalité par superposition, le premier cas d'égalité des triangles permet de s'en passer et par conséquent d'éliminer toute référence au mouvement dans la suite du discours géométrique<sup>27</sup>.

### *la démonstration hilbertienne*

A côté de la démonstration euclidienne que l'on retrouve telle quelle dans la plupart des traités classiques de géométrie élémentaire, nous rappellerons la démonstration hilbertienne correspondante, ce qui nous conduira à préciser en quoi les deux démonstrations se ressemblent et en quoi elles diffèrent. Nous reviendrons plus loin sur les raisons qui ont conduit Hilbert à se détacher des conceptions euclidiennes.

Hilbert explique que la géométrie est l'étude de trois systèmes de choses qu'il introduit ainsi :

*"Nous pensons trois sortes de choses ; nous nommons les choses du premier système des **points** ; nous les désignons par des lettres majuscules A, B, C, ... ; nous nommons **droites** les choses du deuxième système et nous les désignons par des minuscules a, b, c, ... ; nous appelons **plans** les choses du troisième système et nous les désignons par des caractères grecs  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ "<sup>28</sup>*

Hilbert ne donne aucune définition de ces choses, seulement une façon de les nommer et de les noter ; points, droites et plans ne sont que des mots et ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage<sup>29</sup>.

Hilbert poursuit :

*"Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que « être sur »,*

26. Ferdinand Gouseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, o.c. volume II : "Les trois aspects de la géométrie", p. 62.

27. Cette élimination du mouvement est un élément essentiel du discours de la connaissance rationnelle que l'on peut considérer comme la réponse aux paradoxes de Zénon. Le mouvement ne deviendra objet de connaissance rationnelle que lorsque le temps aura été géométrisé au XVII<sup>ème</sup> siècle, se distinguant ainsi de la notion de devenir. Le temps de la science classique est un temps statifié.

28. David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971, p. 11.

29. On connaît la boutade attribuée à Hilbert qui propose de remplacer les termes points, droites, plans par tables, chaises et verres de bières ; la construction n'aurait changé en rien du point de vue de la structure du discours.

*« entre », « congruent » ; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie. »*

Ici encore les termes « être sur », « entre », « congruent » n'ont d'autre signification que de participer à l'énoncé des axiomes.

Les axiomes expriment les relations entre les termes primitifs, relations à partir desquelles pourra s'élaborer le raisonnement déductif. Hilbert énonce vingt-trois axiomes répartis en cinq groupes correspondants aux différents types de relations : appartenance, ordre, congruence, parallélisme, continuité, mais ici encore, ces termes ne renvoient à aucune signification antérieure à leur usage et ne sont que des constituants du discours géométrique. Cependant ces axiomes se situent au plus près de la connaissance intuitive comme nous l'explique Hilbert au début de son ouvrage (cf. ci-dessus).

Une fois les axiomes énoncés, la géométrie se développe selon des règles logiques explicites qui régissent l'usage des termes et des énoncés, une démonstration ne s'appuyant que sur les axiomes, les propositions antérieurement démontrées et les règles logiques ; ainsi tout recours à l'intuition ou à la signification des règles et des énoncés est éliminé.

Dans un tel cadre, le mouvement n'a plus sa place, même implicite. Pour définir l'égalité, Hilbert introduit la notion de congruence pour les segments et pour les angles, on définit ainsi deux relations d'équivalence respectivement sur les segments et sur les angles. Pour démontrer le premier cas d'égalité des triangles, Hilbert doit énoncer un axiome qui remplace le principe de l'égalité par superposition, qu'il énonce sous la forme suivante (axiome III,5) :

*"Si dans deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$ , les congruences suivantes sont satisfaites :*

$$AB \equiv A'B' \quad AC \equiv A'C' \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

*la congruence suivante  $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$  l'est aussi<sup>30</sup>. "*

Cet axiome remplace le recours au principe de l'égalité par superposition, évitant ainsi tout recours explicite au mouvement.

Notons qu'un simple changement de désignation implique la congruence

$$\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

L'axiome III,5 énoncé, Hilbert peut alors énoncer et démontrer le premier cas d'égalité des triangles (qu'il appelle premier cas de congruence).

Hilbert démontre d'abord l'unicité du report d'un segment donné sur une demi-droite d'origine donnée ; l'existence d'un tel report est énoncée par l'axiome III,1 qui définit la congruence entre segments, l'unicité résulte de l'axiome III,5 compte tenu de l'unicité du report des angles assurée par l'axiome III,4<sup>31</sup>.

30. David Hilbert, o.c. p. 22.

31. On pourra comparer avec la proposition 2 du livre I des *Éléments* qui énonce une construction explicite (algorithmique) du report, Euclide, o.c. p. 197.

Notons d'abord que deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont dits congruents si les côtés correspondants et les angles correspondants sont congruents. On peut alors énoncer le théorème suivant (théorème 12) :

*"Si entre deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$ , sont satisfaites les congruences*

$$AB \equiv A'B' \quad AC \equiv A'C' \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C'$$

*ces deux triangles sont congruents.*<sup>32</sup>"

L'axiome III,5 implique les congruences

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

Reste à démontrer la congruence  $BC \equiv B'C'$ . Sur la demi-droite d'origine  $B'$  et portant le segment  $B'C'$ , il existe un point  $D'$  et un seul tel que  $BC \equiv B'D'$ ; l'axiome III,5 appliqué aux deux triangles  $ABC$  et  $A'B'D'$  implique la congruence :

$$\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$$

Ainsi l'angle  $B'A'D'$ , congruent à l'angle  $BAC$  est congruent à l'angle  $B'A'C'$  ce qui contredit l'unicité du report des angles. Il s'ensuit que les points  $C'$  et  $D'$  coïncident et que les triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  sont congruents.

Une comparaison entre les énoncés hilbertien et euclidien nous montre une proximité sémantique si l'on considère que les termes hilbertiens, même s'ils sont en principe sans signification antérieure au discours, renvoient à la connaissance intuitive. Ainsi la construction formelle n'est pas arbitraire et renvoie à des significations qui lui sont antérieures; en ce sens on peut parler chez Hilbert d'une conception dualiste de la connaissance. Ce qu'il précisera dans la préface de *Anschauliche Geometrie* (traduction anglaise : *Geometry and Imagination*) :

*"In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward **abstraction** seeks to crystallise the **logical** relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward **intuitive understanding** fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live **rappport** with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations."*<sup>33</sup>

La distinction entre les démonstrations euclidienne et hilbertienne se situe dans la constitution du discours démonstratif. Si le discours euclidien s'appuie sur les objets en tant que tels, ce qui implique qu'il suppose d'une part leur existence, d'autre part une connaissance intuitive de ces objets (que ces objets participent des

32. David Hilbert, o.c. p. 25.

33. David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952, p. iii.

Idées platoniciennes ou relèvent de la connaissance empirique importe peu ici), le discours hilbertien recherche, pour des raisons de légitimation sur lesquelles nous reviendrons ci-dessous, une autonomie par rapport à toute signification extérieure ; les objets ne sont que des mots (les termes primitifs de la théorie) reliés par des assertions (les axiomes) énoncées *a priori*.

Si, dans le cadre de la géométrie euclidienne, la figure, en tant qu'elle représente les objets sur lesquels porte le raisonnement euclidien (sans que nous nous prononcions ici sur la nature de ces objets), joue un rôle essentiel, elle n'a plus de place dans le raisonnement hilbertien qui porte uniquement sur les mots et les règles d'usage de ces mots, c'est-à-dire la syntaxe. Il faut cependant noter les nombreuses figures qui accompagnent l'exposé hilbertien et qui nous rappellent que ce discours, s'il se veut indépendant de toutes significations extérieures, se constitue en référence à ces significations. Si celles-ci n'interviennent pas en tant que telles dans le discours, celui-ci doit, en dernière instance, énoncer les propriétés attendues, la différence avec Euclide portant essentiellement sur la méthode ; c'est en ce sens que l'on peut parler du formalisme comme méthode, c'est l'autonomie du discours (ou plutôt la constitution d'un discours autonome) qui permet d'assurer la rigueur des démonstrations, celles-ci étant débarrassées de tout recours à l'intuition.

#### *la démonstration "algèbre linéaire"*

Tout autre est la troisième démonstration de ce premier cas d'égalité dans sa version "algèbre linéaire". Ici, non seulement le langage se veut indépendant de toute signification extérieure, mais la relation avec la géométrie élémentaire est occultée par le formalisme.

Nous nous plaçons ici dans le cadre de l'algèbre linéaire dont on sait que, du point de vue structural, la géométrie élémentaire n'est qu'un chapitre<sup>34</sup>.

Plaçons-nous dans le plan affine euclidien sur le corps des réels, on sait définir la longueur d'un segment AB, c'est la norme euclidienne du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  ; quant à l'angle de deux vecteurs il est défini par la relation :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|}$$

On appelle triangle un triplet de points non alignés.

On peut alors énoncer le théorème suivant :

*Soient deux triangles ABC et A'B'C' tels que :*

- les vecteurs  $\overrightarrow{A'B'}$  et  $\overrightarrow{A'C'}$  aient respectivement mêmes normes que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$
- et les angles  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  soient égaux ou opposés

34. Nous renvoyons ici à l'ouvrage de Jean Dieudonné, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964

alors il existe une isométrie et une seule  $f$  telle que :

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'.$$

En effet, on sait qu'il existe une transformation affine et une seule telle que :

$$f(A) = A', \quad f(B) = B', \quad f(C) = C'.$$

et les hypothèses impliquent que cette transformation est une isométrie.

Dans cette démonstration la figure n'intervient pas, la situation géométrique est définie dans le seul cadre de l'algèbre linéaire et les seules propriétés utilisées sont les propriétés générales des espaces affines et des formes quadratiques, propriétés supposées antérieurement explicitées. Il n'y a ici, en principe, aucun recours à quelque intuition géométrique, ne serait-ce que comme simple référence à la façon hilbertienne citée ci-dessus.

### 3 - Parallélogrammes et relation d'équipollence.

Quelle différence entre un plan et une sphère? Empiriquement la réponse est évidente et la question semble de peu d'intérêt. Nous allons voir cependant que l'on peut, sous réserve d'appeler droite sphérique un arc de grand cercle et segment joignant deux points  $X$  et  $Y$  de la sphère le petit arc de grand cercle joignant les points  $X$  et  $Y$ <sup>35</sup>, tenir, au début de l'étude géométrique du plan et de la sphère, le même discours; se pose ainsi la question de ce qui les distingue et nous verrons ci-dessous comment le discours démonstratif permet d'y répondre.

Notons d'abord que les trois cas d'égalité des triangles sont valables sur la sphère autant que sur le plan et que leurs démonstrations sont analogues<sup>36</sup>. On peut alors montrer, en utilisant les cas d'égalité des triangles, la proposition suivante :

#### Proposition :

Soit  $ABCD$  un quadrilatère, les assertions suivantes sont équivalentes :

- a) Les segments  $AC$  et  $BD$  ont même milieu.
- b)  $ABCD$  est un quadrilatère convexe et  $AB = CD$  et  $AC = BD$

Nous dirons qu'un quadrilatère  $ABCD$  est un *pseudo-parallélogramme* s'il remplit les deux conditions a) et b) de la proposition précédente.

Nous dirons que deux segments de droite orientés<sup>37</sup>  $PQ$  et  $RS$  sont *équipollents* si  $PQSR$  est un pseudo-parallélogramme; on peut alors noter que la relation d'équipollence est une relation d'équivalence dans le plan alors qu'elle ne l'est pas sur la sphère.

35. Cette dénomination est liée au fait que le petit arc sphérique réalise le plus court chemin sphérique joignant ses deux extrémités.

36. Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie Élémentaire, volume II, Géométrie dans l'espace*, huitième édition refondue et augmentée, Armand Colin, Paris 1949, p. 67-71.

37. Rappelons que deux points  $X$  et  $Y$  étant donnés sur la sphère, le segment de droite  $(XY)$  est le petit arc de grand cercle.



La démonstration de cette propriété s'appuie sur le postulat des parallèles et l'on voit ainsi le rôle joué par ce postulat dans la construction de la géométrie euclidienne, non seulement pour démontrer une *vérité*: la transitivité de la relation d'équipollence, que pour en expliciter les raisons et ainsi assurer la discrimination discursive d'objets connus empiriquement comme distincts.

Notons que l'on peut étendre ces remarques à la géométrie de Lobatchevski; les cas d'égalité, dont la démonstration reste la même que dans le cas euclidien, permettent d'énoncer la proposition ci-dessus énoncée et par conséquent de définir les pseudo-parallélogrammes et la relation d'équipollence.

Nous reviendrons ci-dessous sur le rôle du discours dans l'activité déductive et la façon dont le discours démonstratif s'est transformé en fonction des problèmes rencontrés par les mathématiciens<sup>38</sup>.

### La démonstration : les invariants historiques

Les exemples de démonstrations rappelés ci-dessus nous montrent non seulement la grande diversité des démonstrations mais aussi comment les principes de légitimation d'icelles ont varié avec le temps. Ceci nous amène à poser deux questions : d'abord celle des raisons qui ont conduit à reconsidérer les principes de légitimation, non seulement dans le temps (l'évolution de la notion de rigueur), mais encore dans la réflexion didactique comme le montre l'ouvrage de Clairaut; ensuite celles des permanences : qu'y a-t-il de commun à ces divers modes de démonstration qui font que l'on reconnaît que ces divers modes participent de la même notion?

La première question nous renvoie à ce que l'on peut appeler l'évolution de la notion de rigueur. Les modes de démonstration deviendraient de plus en plus rigoureux et c'est ainsi que l'on parle des lacunes des démonstrations euclidiennes lesquelles auraient été corrigées par Hilbert. Cette conception *progressiste* de l'histoire des mathématiques occulte les raisons des transformations des modes de légitimation du raisonnement en renvoyant à une rigueur idéale dont on approcherait pas à pas; ainsi, à chaque époque de l'histoire, les canons de l'époque effaceraient les canons anciens. C'est ignorer les aspects problématiques de la démonstration, les raisons qui font que les canons se transforment.

Sur le plan de l'enseignement, point que nous aborderons à la fin de cet article, c'est considérer que ne doivent être enseignés que les canons contemporains, les modes antérieurs pouvant tout au plus être tantôt considérés comme des curiosités, plus ou moins intéressantes à connaître, tantôt comme un artefact pédagogique à la fois utile et encombrant, utile lorsqu'il permet, comme on dit aujourd'hui, de *donner du sens*, encombrant dans la mesure où il risque d'être un obstacle à l'enseignement de la modernité. C'est cela qui conduit Brousseau à dire que le professeur doit choisir "*entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier*"<sup>39</sup>. Situation paradoxale qui conduit à choisir entre

38. Rudolf Bkouche, "La démonstration : du réalisme au formalisme", o.c.

39. Guy Brousseau, "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", in *Didactique des mathématiques*, sous la direction de Jean Brun, Delachaux & Niestlé, Lausanne 1996, p. 88.

le vrai et le signifiant. Il est clair qu'une telle position rend impossible l'enseignement des mathématiques.

Notre point de vue au contraire se propose de prendre en compte dans l'enseignement les transformations de la démonstration moins d'un point de vue historique que d'un point de vue problématique, les aspects historiques pouvant être utiles pour étayer les aspects problématiques. C'est donc autant pour des raisons épistémologiques que pour des raisons didactiques que nous mettons en avant l'étude des permanences *via* ce que nous appellerons, suivant la terminologie de Paul Veyne, les *invariants historiques* de la démonstration<sup>40</sup>.

Avant d'aborder l'étude de ces permanences, nous voudrions mettre l'accent sur une question qui nous semble essentielle, celle de l'évidence.

Lorsque Descartes écrit le premier précepte de la Méthode

*"Le premier estoit de ne recevoir jamais aucune chose pour vraye que je la connusse évidemment comme telle: c'est-à-dire d'éviter la Précipitation et la Prévention; et de ne comprendre rien de plus en mes jugemens, que ce qui se présenteroit si clairement et si distinctement a mon esprit que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute"*<sup>41</sup>.

il énonce moins un critère de vérité qu'un critère de certitude. La certitude n'est pas preuve de vérité, elle reste cependant un point d'ancrage important autant dans l'acquisition que dans la construction de la connaissance<sup>42</sup> et la question se pose de mettre à nu la relation entre certitude et vérité. Il est vrai que le précepte cartésien concerne l'évidence rationnelle que Descartes oppose à l'évidence sensorielle, la première étant considérée comme preuve de vérité alors que la seconde risque de n'être qu'illusion; mais cette opposition est seconde, elle suppose la distinction entre l'évidence sensorielle et l'évidence rationnelle déjà prise en compte. Nous reviendrons sur cette question dans la dernière partie de ce texte à propos de l'enseignement.

Dans un recueil de textes récemment publié<sup>43</sup>, Marcel Conche critique la mise en doute par Descartes de l'évidence sensorielle. Nous reprendrons cette critique en remarquant que la connaissance scientifique se construit dans un double mouvement, celui de la prise en compte de l'évidence et celui de la mise en question

40. La notion d'invariant historique est développée par Paul Veyne dans sa leçon inaugurale au Collège de France (cf. Paul Veyne, *L'inventaire des différences*, Seuil, Paris 1976). Pour une étude plus complète des invariants historiques liés à la démonstration nous renvoyons à notre article "*Perspective historique et longue durée*", à paraître in Actes du colloque Inter-IREM "Histoire des Mathématiques", Rennes mai 2000.

41. René Descartes, *Discours de la Méthode* (1637), "Corpus des Œuvres de Philosophie en Langue Française", Fayard, Paris 1986.

42. Nous distinguons ici l'acquisition des connaissances qui est le premier objectif de l'enseignement, de la construction des connaissances, laquelle s'appuie sur les connaissances déjà acquises. On ne saurait construire du savoir *ex nihilo*, l'autonomie de l'élève passe par l'appropriation d'un savoir qui *a priori* n'est pas le sien et l'enseignement a justement pour but qu'il devienne sien; c'est parce qu'il a acquis du savoir que l'élève peut construire du savoir. Quelle serait l'autonomie d'une personne qui n'aurait pas acquis sa langue maternelle, à laquelle on aurait laissé la *liberté* de construire sa propre langue?

43. Marcel Conche, *Présence de la nature*, "Perspectives critiques", PUF, Paris 2001.

de l'évidence. Le doute cartésien, loin d'être un mouvement premier de l'esprit, est d'abord le doute de celui qui a pris conscience que l'évidence peut être fausse, autrement dit qui a dépassé le stade de la connaissance naïve du monde. Or cette connaissance naïve est essentielle; en faire l'économie constitue un obstacle à la compréhension de toutes connaissances ultérieures, en particulier les connaissances enseignées, lesquelles risquent de se réduire alors à un discours insignifiant<sup>44</sup>.

Dans le cas qui nous intéresse ici, celui de la démonstration, on pourrait considérer que le raisonnement informel joue le rôle de connaissance naïve, encore que l'acte même de raisonner, aussi primaire soit la forme du raisonnement, suppose un dépassement de la connaissance naïve; autant dire qu'il n'existe pas de raisonnement informel à l'état pur, que le raisonnement informel est déjà structuré. Nous pouvons cependant remarquer le rôle que joue l'évidence dans le raisonnement informel par rapport aux modes de raisonnement plus sophistiqués et nous renvoyons ici aux démonstrations de Clairaut dans ses *Éléments de Géométrie*.

Il nous faut cependant préciser, pour éviter tout malentendu, que la place de l'évidence, qu'elle soit de l'ordre du sensoriel ou de l'ordre du rationnel, ne se situe pas dans le seul raisonnement informel, qu'elle joue un rôle premier dans la construction des premières sophistications qui conduisent à la construction de la rationalité et que ces sophistications ont pour objectif à la fois d'augmenter le champ de l'évidence et de la corriger si besoin est. En ce sens l'évidence à une histoire, autant sur le plan collectif comme le montre l'histoire des sciences que sur le plan individuel. C'est cette historicité que souligne Enriques dans un ouvrage publié au début du XXème siècle, *Problema della Scienza*:

*"L'évidence est sans rapport avec un développement psychologique s'effectuant selon des lois déterminées mais repose seulement sur un fondement historique"*<sup>45</sup>.

En ce sens l'évidence ne relève pas du seul sujet<sup>46</sup>, elle nous apprend sur le monde parce qu'elle est donnée par le monde, parce qu'elle est manifestation de la présence du monde pour reprendre un langage proche de celui de Marcel Conche. Cette conception de l'évidence comme manifestation de la présence du monde n'implique pas la vérité de la connaissance évidente. C'est alors le rôle du raisonnement que de permettre d'une part d'appréhender les limites de l'évidence et d'autre part de construire de nouvelles évidences, de déplacer l'évidence pourrait-on dire. La recherche de la vérité peut alors se définir comme construction ou reconstruction

44. Ce fut le cas de la réforme dite des *mathématiques modernes* et c'est en cela qu'elles ont constitué à la fois une erreur épistémologique et une catastrophe pédagogique.

45. Federigo Enriques, *Les concepts fondamentaux de la Science*, (traduction française Louis Rougier), Flammarion, Paris 1913.

46. C'est ce caractère objectif de l'évidence qui nous conduit à distinguer la connaissance évidente et la connaissance intuitive, laquelle implique essentiellement le sujet connaissant. Nous ne pouvons développer dans le cadre de cet article la relation entre connaissance évidente et connaissance intuitive et nous espérons développer ce point dans un article ultérieur.

de l'évidence, et nous renvoyons à Legendre qui écrit au début de ses *Éléments de Géométrie* :

"**Axiome** est une propriété évidente par elle-même.

**Théorème** est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé **démonstration**.<sup>47</sup>"

Ainsi la démonstration n'a d'autre objectif, pour celui qui propose de revenir à la rigueur euclidienne, que de produire de l'évidence. Plus tard, Littré donnera dans son *Dictionnaire* la définition suivante de la démonstration :

"*Démonstration* : raisonnement qui prouve avec évidence".

Autrement dit, la démonstration est ainsi un raisonnement qui s'appuie sur l'évidence pour produire de nouvelles évidences. La démonstration apparaît ainsi comme un instrument de connaissance prolongeant nos connaissances premières, celles que *Arnauld* appelle, au début de ses *Nouveaux Elémens de Géométrie*, les connaissances naturelles :

"*Toutes les sciences supposent des connaissances naturelles, et elles ne consistent proprement qu'à étendre plus loin ce que nous connaissons naturellement*<sup>48</sup>."

Si l'on considère que ces connaissances premières sont d'abord les connaissances sensorielles, on peut alors dire que le raisonnement se situe aux limites de la connaissance sensible dont il est un prolongement comme les instruments mécaniques prolongent nos capacités d'action sur le monde<sup>49</sup>.

Même si la démonstration a pris aujourd'hui une autre signification que celle du prolongement de nos connaissances premières, il nous semble important, autant sur le plan épistémologique que sur le plan didactique, de prendre en compte cet aspect qui nous semble un passage obligé pour comprendre le rôle du raisonnement et celui de la démonstration dans la construction de la connaissance et de l'intelligibilité du monde. Il ne s'agit pas ici de revenir sur les aspects historiques de la démonstration, mais d'en expliciter, autant que faire se peut, les aspects problématiques.

La question est d'autant plus importante que la connaissance rationnelle est devenue, dans notre tradition héritée des Grecs, le mode de connaissance privilégié et le plus propre à nous assurer la certitude. En ce sens l'évidence construite par le raisonnement a une valeur de vérité plus forte que l'évidence perçue par les sens. Ainsi la certitude des vérités géométriques en tant que vérités démontrées : qui oserait dire que, ayant dessiné un triangle dont les médianes ne concourent pas, il a mis en défaut une vérité géométrique ? Il saurait que son dessin est mal fait.

47. Adrien-Marie Legendre, *Éléments de Géométrie*, o.c. p. 4.

48. Arnauld Antoine [Arn1], *Nouveaux Elémens de Géométrie*, Paris 1667, livre I.

49. J.D. Bernal, *The Extension of Man*, Paladin, Frogmore 1973.

Notons que cette question ne relève pas de la seule connaissance géométrique ou plus généralement mathématique ; la rationalisation de la physique espérée par Aristote et qui a pris forme au XVII<sup>ème</sup> siècle a conduit à considérer que la connaissance des phénomènes physiques ne prenait toute sa force que lorsqu'elle s'insérait dans le discours organisé de la connaissance rationnelle<sup>50</sup>.

Nous pouvons ainsi parler de *l'idéal déductif* dont voudrait se réclamer toute connaissance qui se veut scientifique, idéal qui se traduit aujourd'hui par une mathématisation croissante de la connaissance, idéal d'autant plus fort qu'il s'appuie sur le succès des sciences de la nature. C'est ainsi qu'on peut lire sous la plume d'Alfred Grosser, professeur de sciences politiques :

"Il s'agit d'accomplir une démarche inductive dans l'espoir de conquérir la possibilité d'une démarche déductive"<sup>51</sup>.

Alfred Grosser retrouve ici le projet des philosophes grecs de construire une théorie rationnelle de la conduite des affaires de la cité, identifiant ainsi deux modes de rationalité, la rationalité de la connaissance du monde sinon du monde et la rationalité politique<sup>52</sup>. Ce n'est pas le lieu ici d'explicitier ce qui rapproche et ce qui distingue ces deux modes de rationalité et nous renvoyons à un article antérieur<sup>53</sup>.

L'idéal déductif, lequel est la marque de notre héritage grec, nous renvoie aux invariants historiques de la démonstration dont nous avons parlé ci-dessus. Nous ne pouvons développer ici l'étude de ces invariants et nous nous contenterons d'en donner les principaux points, renvoyant pour une première approche à un article antérieur<sup>54</sup>.

Un article plus développé doit paraître dans les Actes du Colloque Inter-IREM "Épistémologie" de Rennes de juin 2000.

Nous distinguerons ici deux invariants que l'on retrouve à travers les diverses formes de la démonstration et qui sont la marque de l'idéal déductif explicité par Aristote dans les *Seconds Analytiques*<sup>55</sup>, invariants que l'on peut ainsi caractériser :

- la démonstration permet une connaissance a priori en ce sens que s'appuyant sur un discours convenablement réglé, elle n'a pas besoin, en principe, du recours explicite à l'expérience. Ainsi on sait, sans qu'il soit besoin de dessiner un triangle, que ses médianes sont concourantes.
- mais la connaissance a priori n'est possible que si elle est nécessaire, c'est-à-dire si le discours démonstratif ne nous laisse pas le choix des conclusions, ce que

50. On peut remarquer que si la connaissance physique peut être remise en question par l'expérience, les mathématiques construites autour de cette connaissance gardent toute leur valeur de vérité mathématique.

51. Alfred Grosser, *L'explication politique*, Éditions Complexes, Bruxelles 1984, p. 17.

52. Sur la naissance concomitante de ces deux formes de rationalité et sur ce qui les rapproche nous renvoyons à l'ouvrage de Jean-Pierre Vernant, *Les origines de la pensée grecque*, PUF, Paris, 1981.

53. Rudolf Bkouche, "Les déraison de la raison", *Quadratures*, n°17, juillet-août-septembre 1997.

54. Rudolf Bkouche, "De la démonstration en géométrie" in *Le Dessin géométrique, de la main à l'ordinateur*, Colloque Inter-IREM Géométrie, (Le Quesnoy 1994), IREM de Lille 1996.

55. Aristote, *Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par Tricot), Vrin, Paris 1979.

Wittgenstein appelle l'inexorabilité des mathématiques<sup>56</sup>. En ce sens une vérité démontrée non seulement est vraie mais elle ne peut pas ne pas être vraie : il est impossible que les médianes d'un triangle ne soient pas concourantes. En ce sens la nécessité nous fait connaître les raisons du vrai, c'est cela qui lui donne son caractère explicatif<sup>57</sup>.

Ce sont ces deux caractères, connaissance a priori et connaissance nécessaire, qui permettent d'appréhender ce que l'on appelle les *idéalités mathématiques*. En ce sens la démonstration est une part indispensable de l'enseignement des mathématiques.

### La construction des objets mathématiques

Que sont les objets mathématiques : sont-ils antérieurs au raisonnement ou sont-ils construits via le raisonnement ?

On ne peut échapper ici à l'ambiguïté. En effet tout raisonnement porte sur des situations qui lui sont antérieures : si le raisonnement est une méthode de connaissance, c'est qu'il y a quelque chose à connaître. On peut alors considérer que le raisonnement permet de structurer ce que l'on veut connaître et de lui donner ainsi un statut d'objet de connaissance rationnelle, ce que l'on peut appeler un *objet abstrait*, abstrait au sens qu'il a été construit par un processus d'abstraction. Nous reprendrons ici la définition de D'Alembert qui écrit :

*"L'abstraction en effet n'est autre chose que l'opération par laquelle nous considérons dans un objet une propriété particulière, sans faire attention aux autres."*<sup>58</sup>

Ainsi le processus d'abstraction se définit via un questionnement que nous nous posons à propos de la situation que nous étudions et le raisonnement à la fois porte sur des objets qui lui sont antérieurs et redéfinit ces objets comme objets abstraits.

Pour préciser ce point, nous reviendrons sur la démonstration de la proposition 4 du livre I des *Éléments* citée ci-dessus, laquelle précise la notion empirique d'égalité par superposition. On pourrait considérer cette démonstration comme la description d'une expérience, par exemple avec du papier calque ou du carton, mais ce qui importe ici, et c'est là qu'intervient la démonstration, c'est qu'il n'est point besoin de faire l'expérience pour la décrire. C'est en cela que l'on peut considérer cette démonstration comme une expérience de pensée, expérience de pensée au sens que l'on est obligé de se donner des règles explicites pour contrôler le discours qui décrit

56. Ludwig Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques* (1937-1944), éditées par G.E.M. Anscombe, Rush Rhees et G.H. von Wright, édition revue et augmentée, traduit de l'allemand par Marie-Anne Lescourret, "Bibliothèque de philosophie", NRF/Gallimard, Paris 1983, page 33.

57. Nous reviendrons sur ces deux points, la caractère a priori et le caractère nécessaire de la connaissance démontrée dans notre article à paraître dans les Actes du Colloque Inter-IREM Épistémologie de Rennes (juin 2000).

58. D'Alembert, *Essai sur les Éléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986, p. 29.

l'expérience<sup>59</sup>. Ici la pensée s'explique *via* le langage et c'est en ce sens que nous pouvons dire que la démonstration se constitue comme discours.

Mais il y a plus qu'une simple expérience de pensée ; en précisant les conditions de l'égalité de deux triangles, la proposition I, 4 met l'accent sur les éléments des triangles (côtés, angles) qui permettent d'énoncer des critères d'égalité, c'est cela qui permet de construire le concept de corps solide dégagé de ses origines empiriques. Ainsi se précise la relation entre la chose connue par l'expérience et l'objet en tant que reconstruction rationnelle de la chose permettant de l'insérer dans le discours démonstratif. Ainsi le discours démonstratif à la fois porte sur une chose qui lui est antérieure en même temps qu'il reconstruit cette chose comme objet, qu'il substitue l'objet à la chose pourrait-on dire.

Le principe de l'égalité par superposition, issu de la connaissance empirique des corps solides, devient principe rationnel, la superposition peut alors être redéfinie indépendamment du mouvement qui la produit *via* ces critères de superposition que sont les cas d'égalité des triangles.

Il est vrai que toute démonstration n'est pas de ce type ; à côté des démonstrations constitutives d'objets, d'autres démonstrations supposent les objets déjà constitués. Reste que, pour qui s'initie aux mathématiques, toute démonstration, y compris parmi les plus sophistiquées auxquelles est confronté l'apprenti, est une façon de réfléchir aux objets sur lesquels il travaille et aux règles qui conduisent le discours démonstratif. Cela reste vrai pour le praticien des mathématiques lorsqu'il rencontre une situation nouvelle l'obligeant à repenser les objets qu'il étudie et les méthodes qu'il utilise. On est ainsi renvoyé à l'aspect problématique de la démonstration ; celle-ci ne peut se réduire à un ensemble de règles du discours, l'usage de la démonstration conduit à repenser les raisons des règles qui la fondent.

C'est cet aspect problématique qui permet de comprendre comment les règles de légitimation de la démonstration se sont transformées au cours de l'histoire, depuis le réalisme euclidien, réalisme en ce sens que les objets de la géométrie grecque sont proches, même s'ils s'en distinguent, de leur signification empirique, jusqu'au formalisme hilbertien dans lequel les objets sont définis *via* le discours.

Il suffit de penser à la notion de droite pour voir combien différent la ligne droite euclidienne, "*celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle*"<sup>60</sup> et la ligne droite hilbertienne, terme primitif du discours géométrique dont la signification n'apparaît que *via* les règles d'usage du terme énoncées par les axiomes.

La définition euclidienne nous renvoie à quelque chose dont la définition est loin d'être claire, définition de chose au sens des philosophes de Port-Royal<sup>61</sup>, définition

59. On peut comparer l'expérience de pensée à la représentation perspectiviste lorsque l'on se propose de dessiner un paysage imaginaire qui donnera l'illusion, à celui qui le regarde, d'être la représentation d'un paysage réel. En ce sens on peut considérer l'expérience de pensée comme l'une des premières formes du raisonnement.

60. Euclide, *Les Éléments*, o.c. p. 154.

61. Arnauld et Nicole, *La Logique ou l'Art de Penser*, introduction de Louis Marin, "Champs",

qui n'apprend rien à qui ignore l'objet dont il s'agit mais qui suppose que le lecteur a une connaissance intuitive de cet objet. C'est pourquoi Antoine Arnauld ne définit pas la droite dans ses *Nouveaux Éléments de Géométrie*, se contentant d'annoncer :

"Nous n'avons pas défini la ligne droite, parce que l'idée en est très claire d'elle-même, et que tous les hommes conçoivent la même chose par ce mot<sup>62</sup>."

mais il ajoute :

"Mais il est bon de remarquer ce que nous concevons naturellement être enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre si l'on veut comme définition."

C'est en ce sens qu'il faut comprendre les représentations de la droite données dans certains traités classiques renvoyant aux rayons lumineux ou aux fils tendus. On rencontre ici l'aspect "science physique" de la géométrie ; la géométrie renvoie à des objets empiriques en même temps que ces objets se structurent *via* le discours démonstratif. Le discours euclidien s'appuie ainsi sur des objets premiers, objets pré-existant au discours ; c'est en ce sens que l'on peut présenter les mathématiques grecques comme une *mathématique des objets*.

La définition hilbertienne est tout autre. Les objets sont des termes a priori sans signification, celle-ci se construit à travers les assertions primitives (axiomes) qui relient les termes primitifs ; on peut alors dire que c'est le discours qui crée les objets et l'on peut parler d'une *mathématique des relations*. Mais si en principe le discours se veut indépendant de toutes références extérieures au discours, ce discours ne prend sens que parce qu'il renvoie à des significations extérieures. Le formalisme à la Hilbert peut alors se définir comme une méthode permettant de construire un discours autoréférent aux fins d'étudier des objets antérieurs à ce discours. Il faut alors comprendre ce formalisme dans son contexte historique, celui des difficultés posées par l'apparition dans le paysage mathématique des géométries non euclidiennes d'une part, de la théorie des ensembles d'autre part. Ici encore c'est l'aspect problématique renvoyant aux raisons qui ont conduit aux méthodes formalistes qui permet de comprendre pourquoi objets et méthodes sont amenés à se transformer au cours de l'histoire.

Mais cette transformation ne rend pas caduques les mathématiques antérieures, au contraire c'est le point de vue euclidien qui permet de comprendre l'apport des méthodes formalistes. Sans cette perspective, on est incapable de comprendre en quoi ces deux sommes de la connaissance géométrique du vingtième siècle, les *Leçons de*

---

Flammarion, Paris 1970, p. 120-124. Les auteurs y expliquent la distinction entre une définition de chose et une définition de nom, celle qui définit un terme par une suite d'autres mots déjà définis.

62. Antoine Arnauld, *Nouveaux Éléments de Géométrie*, Paris 1667, p. 82.



*Géométrie Élémentaire* de Jacques Hadamard<sup>63</sup> et la *Géométrie* de Marcel Berger<sup>64</sup> se ressemblent et en quoi elles diffèrent. Il suffit de poser la question du lien entre la droite représentée par un trait sur du papier, ou par un rayon lumineux, ou encore par un fil tendu, et la droite définie comme espace affine de dimension 1 sur le corps des réels pour comprendre combien la connaissance des mathématiques ne saurait se réduire à un seul point de vue et combien serait mutilée une connaissance qui ne s'appuierait que sur la modernité; une telle connaissance ne permettrait même pas de comprendre la modernité.

Enfin nous reviendrons sur le rôle du discours dans la définition des objets à propos des pseudo-parallélogramme. Ce qui distingue deux objets mathématiques, c'est moins la connaissance empirique que nous pouvons avoir de ces objets que les différences des discours que l'on peut tenir sur eux. En contrepoint, des objets sur lesquels on peut tenir le même discours sont les mêmes; c'est le sens de la "*seule et même énonciation*"<sup>65</sup> qui a permis à Desargues de considérer d'abord que les points à l'infini définis comme intersections de droites parallèles et les points à distance finie participe d'un même concept, ensuite que les coniques constituent une seule et même courbe<sup>66</sup>.

On voit ainsi le rôle du discours dans l'activité mathématique: le discours est constitutif de la pensée mathématique même si celle-ci ne saurait s'y réduire; c'est ce rôle que souligne Ferdinand Gonseth lorsqu'il écrit :

*"le discours n'est pas simplement surajouté à des significations extérieures qui sans lui resteraient ce qu'elles sont. Sa participation à ce qu'il énonce est une participation active organiquement opérante"*<sup>67</sup>.

Cela nous renvoie à la question suivante que nous nous contenterons de poser: qu'est-ce qui, dans l'activité mathématique, ne se réduit pas au discours? La question est d'autant plus difficile que toute tentative de réponse s'exprime par un discours<sup>68</sup>; reste cependant que le discours n'est jamais arbitraire, il est guidé par la connaissance, aussi embryonnaire soit-elle, que nous avons des choses sur lesquelles portent le discours. C'est seulement au bout du discours que nous pouvons dire dans quelle mesure le discours exprime les choses dont nous voulons parler, s'il est *idoine*, pour user du langage de Gonseth.

63. Jacques Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, (2 tomes), Armand Colin, Paris 1949, réédition Jacques Gabay, Paris 1989. Notons que la première édition est publiée en 1898 et qu'elle fait partie d'une Collection dirigée par Gaston Darboux à l'usage des élèves des classes de mathématiques élémentaires.

64. Marcel Berger, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977, ré-édition en 2 volumes, Nathan, Paris 1990.

65. "Lettre de Desargues à Mersenne", in René Taton, *L'œuvre mathématique de Desargues*, Vrin, Paris 1981, p. 83.

66. Girard Desargues, *Brouillon Project d'une Atteinte aux Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan* (1639), in René Taton, *L'œuvre mathématique de Desargues*, o.c.

67. Ferdinand Gonseth, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation*, o.c. p. 15.

68. Sur cette question nous renvoyons à l'analyse de Umberto Eco sur les relations entre métaphysique et langage in *Kant et l'ormithorynque*, traduit de l'italien par Julien Gayraud, Grasset, Paris 1999, chapitre 1.

### Questions d'enseignement

Si la démonstration est au cœur de l'activité mathématique, même si celle-ci ne se réduit pas à la seule démonstration, la démonstration doit tenir un rôle important dans l'enseignement des mathématiques. En ce sens on ne peut penser un enseignement des mathématiques qui considérerait la démonstration comme une activité périphérique, un point secondaire de l'enseignement. Si, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, la démonstration joue non seulement un rôle de légitimation des propriétés énoncées, mais aussi un rôle d'explication de ces propriétés, elle a un rôle essentiel dans la compréhension des mathématiques et on ne saurait la négliger dans un enseignement consistant des mathématiques. Se pose alors la question des formes de démonstration ; la question porte alors moins sur l'apprentissage des canons actuels que sur l'usage, à chaque étape de l'enseignement, des formes les plus adéquates, autant sur le plan technique que sur le plan conceptuel, permettant aux élèves de comprendre les mathématiques qui leur sont enseignées.

Si nous avons insisté sur le rôle du raisonnement informel, c'est que ce mode de raisonnement, d'une part permet d'obtenir des résultats, telle la construction de la perpendiculaire dans l'ouvrage cité de Clairaut, d'autre part permet de prendre conscience des raisons qui fondent la certitude, sinon la vérité d'une assertion. C'est ce raisonnement que fera un élève (et pas seulement un élève) à qui l'on pose la question : pourquoi c'est évident ? la question est moins celle de la vérité de ce qu'il trouve évident que celle de la construction de l'argumentation ; le rôle du professeur est de remettre les choses en place en amenant l'élève à structurer son raisonnement et si nécessaire de lui montrer les limites d'un raisonnement qui se veut une justification de l'évidence. Cela permet aussi de prendre conscience des limites de ce type de raisonnement et par conséquent de comprendre les raisons des sophistications nécessaires à toute activité scientifique, sophistications dont nous avons dit ailleurs qu'elles ont pour objectif essentiel de construire du simple<sup>69</sup>. Mais ces sophistications, aussi importantes soient-elles, pour être comprises par les élèves, ne peuvent apparaître dans l'enseignement qu'au moment où elles sont signifiantes, c'est-à-dire lorsque les raisons de ces sophistications peuvent être explicitées. Cela nous renvoie à la question de la problématisation dont nous avons parlé dans un article antérieur<sup>70</sup>.

On peut alors considérer le raisonnement informel comme une propédeutique qui conduit vers la démonstration ; s'appuyant sur l'évidence sensorielle, au sens que nous avons dit plus haut, il se situe au carrefour de la connaissance empirique et de ce qui deviendra la connaissance rationnelle ; en fait les aspects empiriques et les aspects logiques du raisonnement s'entremêlent comme le montre par exemple la construction de la perpendiculaire dans l'ouvrage cité de Clairaut, et la logique y apparaît comme un simple agent de la circulation, pour reprendre une image gonséthienne (cf. ci-dessus).

69. Rudolf Bkouche, "Épistémologie, histoire et enseignement des mathématiques", *For the learning of mathematics*, vol. 17, n°1, february 1997.

70. Rudolf Bkouche, "Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science", *Repères-IREM* n°39, avril 2000.

Mais il faut prendre en compte que ces raisonnements informels ne sont pas seulement un passage nécessaire pour qui veut s'initier à la démonstration, ils deviennent de véritables démonstrations lorsqu'ils prennent la forme d'expérience de pensée comme c'est le cas de la démonstration euclidienne du premier cas d'égalité des triangles (cf. ci-dessus) ou des démonstrations de Cauchy<sup>71</sup> ou de Jordan<sup>72</sup> de la formule d'Euler pour les polyèdres, démonstrations que nous ne pouvons donner ici. C'est d'ailleurs souvent la mise en forme de ces raisonnements informels, y compris par les praticiens des mathématiques, qui conduit à la démonstration canonique, encore qu'il ne soit pas toujours facile pour un débutant de comprendre pourquoi le raisonnement informel ne suffit pas; d'autant que le canonique n'est pas donné une fois pour toutes, qu'il se transforme comme le montre l'histoire des mathématiques. Mais cette historicité n'est pas arbitraire, elle se situe dans le cadre des problématiques mises en œuvre; le rôle des canons a essentiellement pour objectif de répondre aux difficultés auxquels le sujet connaissant est confronté et de légitimer la certitude. Cet aspect problématique de la démonstration doit être présent dans l'enseignement si l'on veut éviter que la démonstration n'apparaisse pour l'élève que comme un ensemble de règles à respecter, règles du professeur ou règles de l'institution scolaire, bien plus que nécessité d'ordre scientifique.

Nous terminerons cet article par quelques remarques sur les propriétés admises sans démonstration. Il est clair que certaines propriétés ne peuvent être démontrées, souvent pour des raisons techniques qui se situent au-delà des connaissances des élèves. La question est alors de rendre de telles propriétés significatives et compréhensibles pour ceux qui les reçoivent et seront amenés à les utiliser; on ne peut demander à un élève d'utiliser une propriété dont le sens lui reste étranger, ainsi ces litanies de propriétés d'incidence énoncées sans démonstration que l'on trouve dans certains manuels d'enseignement, manuels que l'on n'ose à peine appeler "ouvrages de mathématiques", propriétés qui sont loin d'être évidentes.

On peut par contre admettre une propriété dont le sens est apparent ou dont le sens devient apparent après une explication convenable.

Je citerai l'exemple classique du théorème de D'Alembert. Après avoir vu qu'une équation de degré 1 (resp. 2, 3, 4) admet 1 (resp. 2, 3, 4) solution, l'idée que la propriété se généralise pour un degré quelconque peut sembler naturelle<sup>73</sup>. Autrement dit l'énoncé de D'Alembert est signifiant et ce qu'il exprime est facilement compréhensible. La démonstration viendra plus tard lorsque les élèves auront les moyens techniques et conceptuels de la comprendre.

On pourrait citer aussi certaines propriétés d'analyse "géométriquement évi-

71. Cauchy, "Recherches sur les polyèdres", *Journal de l'École Polytechnique*, 16, 1813, p. 68-86.

72. Camille Jordan, "Recherche sur les polyèdres", *Journal für Mathematik*, Bd. LXVI, 1866, p. 22-91.

73. Rappelons que ce fut la démarche de Girard dans son *Invention nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam 1629. Il fallut attendre Gauss, plus d'un siècle et demi plus tard, pour avoir la première démonstration du théorème, cf. Jean-Pierre Friedelmeyer, Klaus Volkert, "Quelle réalité pour les imaginaires" in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, "Commission Inter-IREM Épistémologie", Ellipses, Paris 1993

dentes" mais dont la démonstration demande la construction préalable des réels ; ainsi le théorème de la valeur intermédiaire à partir d'une représentation graphique ou le théorème fondamental de l'analyse qui montre comment, via la notion intuitive d'aire, la primitivation est l'opération inverse de la dérivation<sup>74</sup>.

On pourrait citer aussi le théorème de Thalès qui, dans le cadre d'un enseignement de collège ou de lycée, ne peut être démontré en toute rigueur que pour les rapports rationnels et dont les élèves peuvent comprendre qu'il reste vrai pour tout rapport<sup>75</sup>.

Parmi les difficultés auxquelles sont confrontés certains étudiants<sup>76</sup>, nous citerons la difficulté de compréhension de la distinction entre une propriété admise sans démonstration et un axiome, que ce soit au sens d'une propriété évidente par elle-même ou au sens hilbertien d'une assertion primitive. C'est un point important de l'enseignement des mathématiques que de marquer cette distinction.

Il est vrai que certaines propriétés évidentes n'ont pas besoin d'être démontrées et qu'une démonstration prématurée risque "d'obscurcir la vérité" et "de dégoûter les lecteurs" pour reprendre les termes de la préface de Clairaut<sup>77</sup>. Dans ce cas la question est moins celle d'une démonstration prématurée que celle d'amener les élèves à comprendre, au moment adéquat, que la démonstration de telles propriétés devient nécessaire dans le cadre d'une organisation générale qui montre les liens logiques entre les diverses propriétés, c'est-à-dire dans le cadre de ce que l'on appelle une axiomatique ; la question reste de ce moment adéquat qui ne peut se définir que dans le cadre général de la progression de l'enseignement des mathématiques.

Cela permettrait aux élèves de comprendre pourquoi, selon les choix, certaines assertions peuvent être choisies comme axiomes dans une axiomatique alors qu'elles sont à démontrer dans une autre axiomatique. Il devient alors intéressant de comparer par exemple diverses axiomatiques de la géométrie élémentaire pour comprendre le rôle organisateur de l'axiomatique, cela devrait permettre aussi de comprendre la spécificité de chaque axiomatique et d'éviter de les mélanger. Mais cela demande d'abord d'avoir compris les raisons qui font sortir du cadre euclidien ou legendrien des axiomes considérés comme propriétés évidentes par elles-mêmes, ensuite de penser la relative autonomie du langage.

74. Cf par exemple Chenevier, *Cours d'Algèbre*, classe de Mathématiques, Hachette, Paris 1930. Dans son article "Calcul d'aires et calcul intégral en TS : un essai pédagogique" (*REPÈRES-IREM* N°31 - avril 1998), Jean-Pierre Daubelcour montre comment on peut construire, à partir de la notion d'aire, un cours rigoureux d'analyse en terminale S.

75. On peut cependant expliquer, à un niveau élémentaire comment on peut étendre aux rapports incommensurables les relations de proportionnalité géométrique (arcs et angles, théorème de Thalès) comme le montre l'ouvrage de Neveu et Bellanger, *Cours de Géométrie, Première Partie : Géométrie Plane*, Masson, Paris 1907, ouvrage destiné aux élèves des Écoles Primaires Supérieures. Leur approche est reprise dans Rudolf Bkouche, "Autour du théorème de Thalès", *Actes du Colloque Inter-IREM Géométrie* (Limoges 1992), IREM de Limoges 1994.

76. Cette remarque est issue de l'expérience d'enseignement de l'auteur de cet article.

77. Clairaut, o.c. préface, p. xiii. Nous renvoyons le lecteur à la lecture de cette préface, non seulement pour son intérêt didactique, mais aussi parce qu'elle montre comment se situe le lien entre une géométrie issue de la connaissance empirique et la géométrie rationnelle.

Cette distinction entre les axiomes en tant que propriétés évidentes par elles-mêmes et les propriétés suffisamment évidentes pour n'avoir pas besoin de démonstration est loin d'être aisée<sup>78</sup>; mais c'est peut-être un point sur lequel il faut sans cesse revenir dès que les élèves ont acquis une certaine maturité, par exemple dans les classes de lycées (et pas seulement dans les classes scientifiques!).

A titre d'exercice, on pourrait, lorsque l'énoncé explicite de l'axiome des parallèles sera ré-introduit dans l'enseignement<sup>79</sup>, demander aux élèves qui acceptent de se prêter à ce genre d'exercice, d'essayer de le démontrer; c'est une façon à la fois de réfléchir à ce qu'est une démonstration et de comprendre la signification de la notion d'axiome, justement à partir de l'exemple d'un énoncé loin d'être évident par lui-même; les tentatives de démonstration qui ont jalonné l'histoire des mathématiques jusqu'à la découverte des géométries non-euclidiennes l'ont bien montré et l'étude, dans une classe de terminale, de certaines de ces "démonstrations" peut s'avérer utile<sup>80</sup>. C'est alors une question intéressante et loin d'être facile que de chercher "ce qui ne va pas" dans la démonstration.

---

78. Nous avons vu ci-dessus l'exemple de l'égalité des angles droits.

79. Rudolf Bkouche, "Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles", *Bulletin de l'APMEP* n° 430, septembre-octobre 2000.

80. On peut trouver de telles démonstrations dans la note II de la douzième édition des *Éléments de Géométrie* de Legendre déjà cité ainsi que dans son mémoire "Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, tome 12, 1833, p. 367-408. Pour une étude systématique et historique de ces démonstrations nous renvoyons à l'ouvrage de Roberto Bonola, *Non-euclidean geometry* (1912), translated by H. S. Carslaw, Dover Publications, New York 1955. et à celui de Jean-Claude Pont, *L'Aventure des Parallèles*, Peter Lang, Berne 1986.



# PERSPECTIVE CENTRALE AU COLLÈGE

ET... PEUT-ÊTRE AU LYCÉE

Bernard CAZIER et Françoise CHAMONTIN

IREM de LILLE

## Pourquoi la perspective centrale ?

*Seule la perspective cavalière est au programme du Collège. Et il est important de ne pas la négliger. Mais on peut lire dans les objectifs de ce programme: "Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. Une telle activité est ainsi accessible au plus grand nombre et a une valeur formatrice évidente"*

*Il y a un souci esthétique dans cette démarche car «la perspective centrale permet de donner un effet de profondeur et de rendre la diminution de dimension en rapport avec l'éloignement», et une certaine jubilation à confronter ses élèves à une transformation qui ne conserve ni les milieux ni le parallélisme, uniquement par une pratique du dessin. Mais ce n'est pas la seule motivation: «C'est un domaine qui plaît aux élèves car il a du sens: chaque dessin nécessite un raisonnement sanctionné par un résultat visible». Dans cette phrase chaque mot a un sens: le raisonnement est une nécessité, la sanction n'est pas une note attribuée de l'extérieur mais la gratification intime d'une réalisation aboutie.*

*On a là, certes, une pratique géométrique intéressante qui, à partir de règles arbitraires —ou plutôt pour lesquelles il est recherché un consensus minimum—, développe un faisceau de raisonnements qui ont pour seul but, dans un premier temps, d'élaborer des représentations satisfaisantes d'objets de l'espace, mais qui conduisent, tôt ou tard pour certains, à questionner le pourquoi des règles (en particulier celle de la ligne d'horizon<sup>1</sup>).*

*Nous donnerons un premier aperçu de cette pratique au Collège, qui peut déboucher au Lycée sur une étude plus théorique, permettant de légitimer les règles de la perspective centrale.*

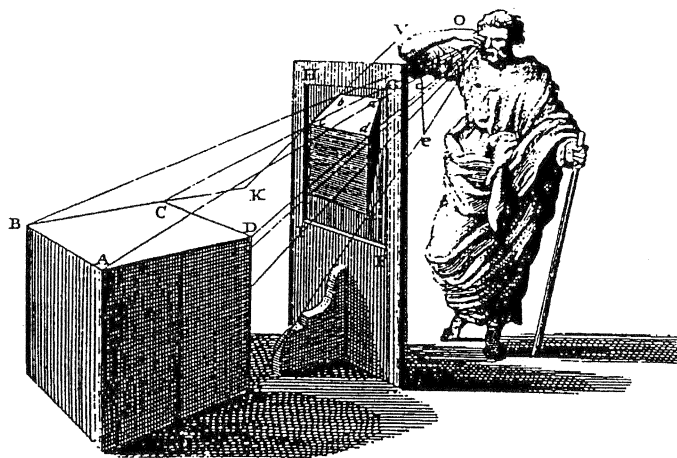
---

1. Pourquoi tous les points de fuites des droites horizontales sont-ils alignés sur la ligne d'horizon ?

## Qu'est-ce que la perspective centrale?

La perspective centrale a pour origine les recherches picturales des artistes de la Renaissance Italienne.

Alberti<sup>2</sup> écrit en 1436, dans un ouvrage intitulé "Della Pittura": «Lorsque je dois peindre voilà comment je procède: Je dessine un rectangle aussi grand que je le veux, que je considère comme étant une fenêtre ouverte par laquelle je regarde ce qui, en ce cadre sera peint»<sup>3</sup>. De même Léonard de Vinci dans sa célèbre "Paroi de verre" traduit l'idée de représenter dans un plan l'espace tout entier comme on le voit à travers une fenêtre, tel qu'il apparaît au regard.



La gravure ci-dessus<sup>4</sup> explicite ce principe. Y sont tracés les rayons lumineux entre l'œil droit de l'observateur et les sommets du cube, et leur intersection avec la vitre verticale. En reliant ces traces sur la vitre, on a obtenu la représentation du cube sur le tableau vertical. Une des faces du cube est parallèle au tableau, on voit alors que l'arête **AB**, plus éloignée de l'observateur que l'arête **CD** aura une image **ab** sur la vitre parallèle **cd** mais plus petite qu'elle. L'image du carré **ABCD** sur le tableau est un **trapèze**.

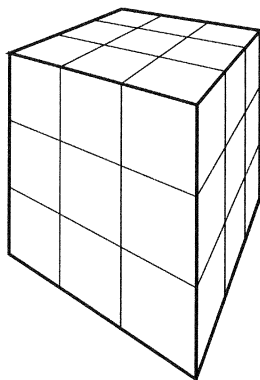
Si on fait tourner le cube sur lui-même dans la configuration de la gravure, on obtient la figure de la page suivante. On a marqué d'un point entouré d'un cercle, la place la perpendiculaire duquel l'observateur doit mettre son œil droit pour voir un cube.

2. Léo Battista ALBERTI, "De Pittura", 1436. Préface et traduction de Jean-Louis Schefer, introduction de Sylvie Deswarte-Rosa, Collection "La Littérature Artistique", Macula Dédale, Paris 1992

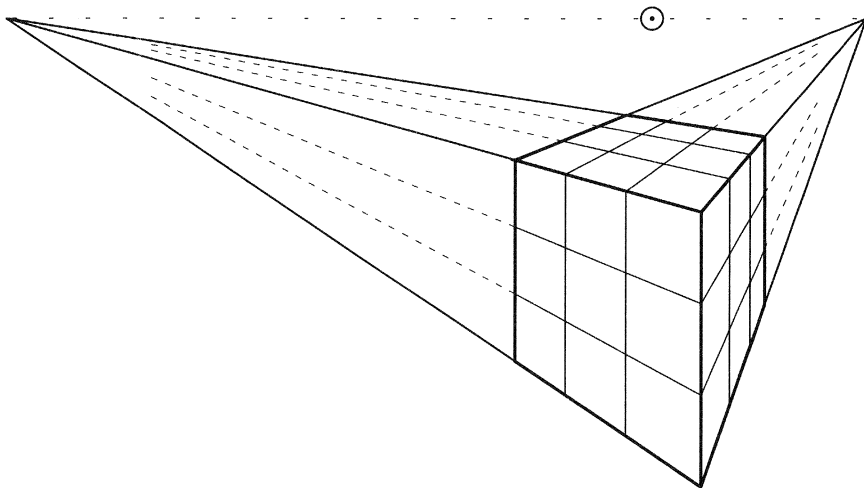
3. Léo Battista ALBERTI, "De Pittura", 1436. Traduction de Jean-Pierre Le Goff. Texte et traduction originaux dans Les Cahiers de la Perspective, n°4, IREM de Basse-Normandie, Caen.

4. extraite de BROOK TAYLOR, *New Principles of Perspective (1719)*, in Kirsti Andersen, *Brook Taylor's Work on Linear Perspective*, Springer Verlag, p.231





Mettre un œil à la perpendiculaire du point, à une distance entre 6 et 8 cm, et regarder le dessin.



Si on prolonge les segments du dessin qui représentent des segments horizontaux à supports parallèles dans l'espace, ils se rejoignent en un même point : le point de fuite. A chaque direction de droites correspond un point de fuite. Et tous les points de fuites sont alignés avec le point encerclé.

**On vise à faire dessiner des solides de l'espace (pavés droits, édifices, ...) mais on s'aperçoit — Cf la figure qui suit — qu'une étape fondamentale est la représentation d'objets plans carrés, rectangles, damiers, ...) posés sur un plan horizontal.**

## Une pratique au Collège :

L'objectif est de faire pratiquer par les élèves le dessin en perspective centrale pour représenter, sur un plan à deux dimensions — qu'on appellera tableau et qu'on supposera vertical — ce qu'ils voient dans l'espace à trois dimensions. Le but à terme, est qu'ils puissent dessiner dans les règles des objets familiers, leur maison, leur rue ou la cour du Collège.

## Qu'est-ce qui est en jeu ?

Pour représenter dans un plan, un carré de l'espace, on constate que le côté parallèle au tableau, proche de l'observateur, est vu plus grand que le côté éloigné. Ce n'est pas tout de suite évident pour tout le monde, et on s'aidera de l'observation du pavage au sol.

Sur le dessin on est donc amené à tracer deux segments parallèles, l'un plus grand que l'autre. Il en résulte que les deux autres côtés sont représentés par des segments ayant des supports sécants.

La consigne du début n'est pas parfaitement claire :  
dessine-t-on vraiment ce que l'on voit ?

En fait on dessine une représentation du carré qui donne l'impression, de voir effectivement un carré de l'espace (comme sur une photo). Il s'agit donc de transformer un carré de l'espace en une figure du plan.

**La discussion qui s'établit entre le professeur et les élèves a pour but de rechercher les règles permettant d'effectuer cette transformation en séparant les propriétés qui se conservent de celles qui se modifient.**

## Première phase.

La mise en place de l'activité commence par bousculer les idées reçues des élèves. Les longueurs égales de deux côtés opposés du carré ne sont pas représentées par des longueurs égales.

## Deuxième phase.

Pourtant un segment est représenté par un segment, une droite est représentée par une droite, des points alignés sont représentés par des points alignés.

## Troisième phase.

Lorsqu'une droite horizontale, découpée en segments égaux, est parallèle au plan de tableau, on constate qu'elle est représentée par une droite horizontale coupée elle aussi en segments égaux.

## Quatrième phase.

L'observation des droites perpendiculaires au plan du tableau, surtout celles du plafond et celles des murs (c'est encore plus flagrant avec des rails), montre que leurs prolongements se rencontrent. Le professeur fait admettre que ces droites parallèles sont représentées par des droites concourantes en un point qu'on appelle le point de fuite principal

On énonce les règles, en s'appuyant sur une connaissance intuitive et expérimentale (photographie, dessin d'art, tableaux anciens, ...) que l'on développe simultanément par l'observation.

L'enjeu à ce stade n'est pas de justifier rigoureusement les propriétés relevées, mais d'être convaincu de leur pertinence et de savoir s'en servir pour dessiner. Le résultat obtenu, s'il apporte bien l'impression espérée du début – voir un carré dans l'espace –, sera un critère d'exactitude, suffisant à ce stade.

## Premières propriétés..

On synthétise en énonçant la liste des propriétés qui vont être utilisées comme règles pour la construction des dessins.

- une droite de l'espace est représentée par une droite sur le dessin
  - une droite verticale dans l'espace est représentée par une droite "verticale"
- une droite horizontale et parallèle au plan du tableau, est représentée par une droite horizontale
- sinon, les droites horizontales, parallèles entre elles, sont représentées par des droites concourantes en un point de la ligne d'horizon, qu'on appelle point de fuite de la direction
  - le point de fuite principal correspond au point de fuite des droites perpendiculaires au plan du tableau
- des segments égaux entre eux sur une droite parallèle au plan du tableau sont représentés par des segments égaux entre eux sur le dessin<sup>5</sup>.

---

5. **Remarque.** Ces deux dernières propriétés ne sont pas indépendantes. Si on partage les côtés parallèles du trapèze en segments égaux on obtient à partir des points obtenus, les bandes en profondeur. Avec le théorème de Thalès on démontre que des droites tracées sont concourantes.

**Dans une première partie** ou les carrés représentés sont dans un plan horizontal, deux de leurs côtés sont parallèles au plan du tableau.

## Apprentissage fondateur.

Ce premier apprentissage (fiche I-1) se fait ensemble, professeur et élèves. C'est la réalisation d'un quadrillage (ou d'un damier) en perspective centrale. Le professeur présente les premiers principes.

Le professeur dessine à gauche du tableau un carré vu de face et à droite du tableau un trapèze représentant un carré placé dans un plan horizontal de l'espace. Le travail se fait sur deux niveaux. À gauche, le quadrillage est vu de face. On utilise dans cette situation les propriétés élémentaires du carré : les diagonales du grand côté rencontrent les petits carrés en leurs sommets.

La question qui se pose est : quelles sont les droites que l'on peut tracer directement sur le trapèze ? les diagonales bien sûr et les parallèles fuyantes.

Les élèves ont une feuille sur laquelle est dessiné un trapèze, il s'agit pour eux d'y transcrire ce qui est fait sur le carré vu de face. Cette transposition en perspective centrale va conduire au déroulement :

- Partage d'un côté horizontal du trapèze en segments égaux
- Tracé de bandes en profondeur
- Tracé des diagonales
- Technique de construction des bandes parallèles horizontales -.

Au début les élèves se demandent où le professeur veut en venir ; certains même préviennent « je ne comprends pas ! ». C'est en voyant évoluer le dessin et en regardant ce que fait le voisin que tout s'arrange. Quelques uns comprennent très vite, spontanément ils aident leurs camarades : une sorte d'enseignement mutuel. Marquer d'un même signe ou d'une même lettre les points correspondants du carré et du trapèze est très éclairant pour les élèves.

# Fiche I - 1

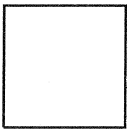
## Apprentissage fondateur

### Réalisation d'un quadrillage en perspective

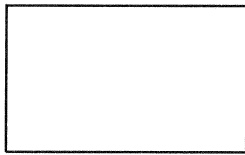
Un carré (un rectangle) est représenté sur le dessin par un trapèze.

Le partager en  $5 \times 5$  petits carrés (rectangles) égaux.

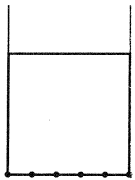
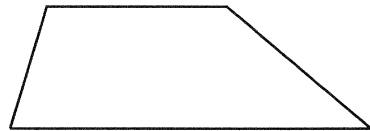
carré vu de face



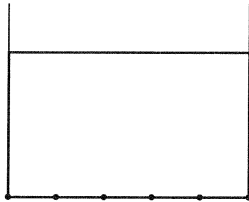
rectangle vu de face



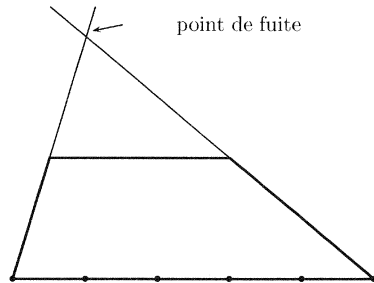
carré ou rectangle vu en perspective centrale



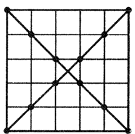
carré vu de face



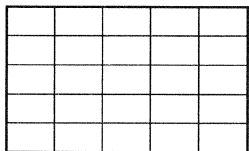
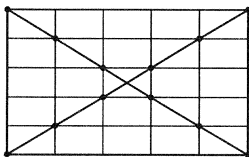
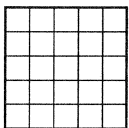
rectangle vu de face



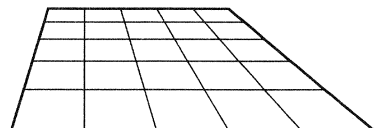
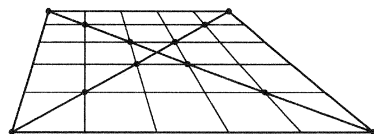
point de fuite



résultat final



carré ou rectangle vu en perspective centrale



Le tracé des deux diagonales permet d'obtenir en général deux points. Ces deux points déterminent une parallèle au bord. Pour le soin du dessin, les ajustements de la règle sont nécessaires.

Après le premier exercice fondateur on propose une série d'exercices, apportant chacun quelques variantes : on aboutit à l'exercice de synthèse suivant.

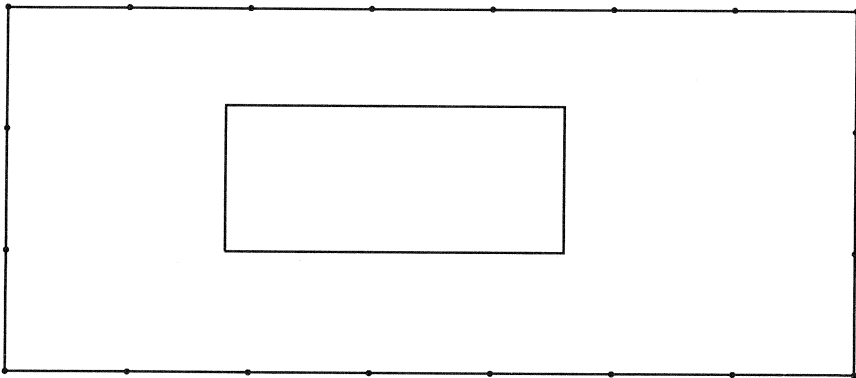
## Fiche II - 3

### Exercice 5

Représenter l'intérieur d'une boîte rectangulaire de dimensions  
largeur 7, hauteur 3, profondeur 5.

Les parois latérales gauche-droite, haut-bas étant des damiers  
 $3 \times 5$  et  $7 \times 5$ .

Tracer d'abord les 4 arêtes de la boîte qui vont de l'observateur vers le fond.  
Déterminer ensuite le point de fuite commun aux 4 faces.



### Remarque

Aisé en théorie, mais de réalisation difficile, il suffit de partager un seul segment "horizontal" en 7.

## Sortir du rectangle, sortir du trapèze.

Jusqu'ici on a travaillé à l'intérieur d'un trapèze qui représente un rectangle. Il s'agit maintenant, à partir d'un de ces trapèzes représentant un rectangle, de lui adjoindre sur ses côtés, à gauche et à droite, devant et derrière, d'autres trapèzes qui représentent d'autres rectangles égaux dans l'espace.

C'est un nouveau problème.

Pour le résoudre on va procéder à l'analyse de la situation familière et mieux connue : celle de la géométrie plane élémentaire. Il restera ensuite à transposer les propriétés en utilisant les invariants mis en évidence auparavant.

Deux méthodes viennent à l'esprit

### La première.

Celle qui convient le mieux aux élèves. Elle utilise la conservation du milieu d'un segment, lorsque la droite est parallèle à la ligne d'horizon, et la conservation de l'alignement des points. Ces règles sont maintenant tout à fait admises : on les a utilisées plusieurs fois et constaté leur efficacité.

En deça, il se peut qu'il n'y ait pas de construction possible. C'est l'occasion de revenir au réel (il a été vite oublié par le souci qu'on apporte à respecter les contraintes imposées). Le rectangle ne peut, parfois, être représenté tout simplement parce que l'observateur se trouve à l'intérieur de ce rectangle et qu'un de ses bords est derrière lui.

Il est à remarquer qu'ici on n'utilise pas le point de fuite.

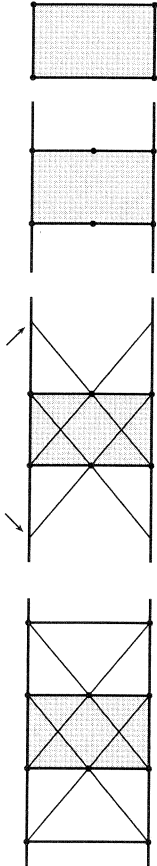
### La deuxième.

Celle qui utilise un point de fuite annexe : celui de la diagonale. Ce point de fuite se trouve sur la ligne d'horizon : nouvelle contrainte, nouvel outil de construction. Il faut encore du temps, de l'attention, de la motivation chez les élèves pour assimiler cette nouvelle propriété. On parle alors de la ligne d'horizon que l'on voit constamment lorsqu'on se déplace dans un paysage plat ou au bord de la mer.

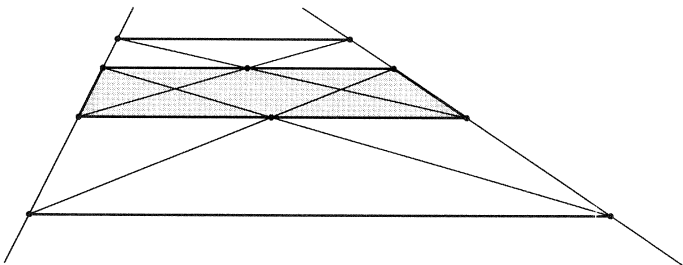
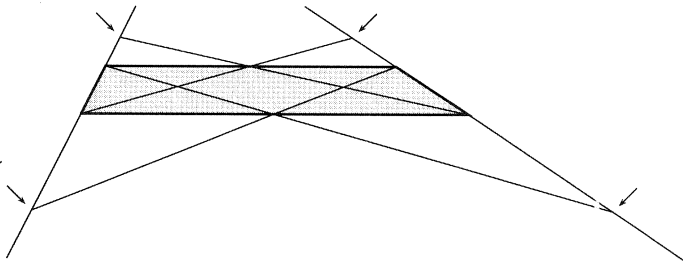
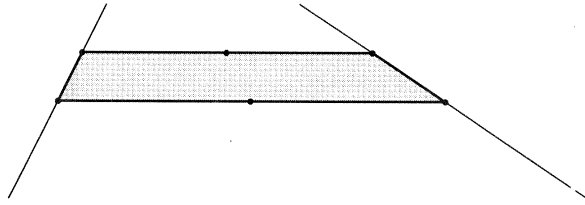
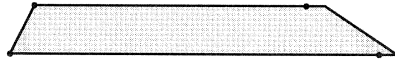
## Fiche IV - 3

3<sup>ème</sup> exemple, adjoindre un rectangle derrière et devant.

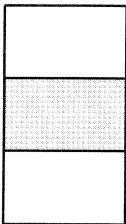
Un rectangle vu de face



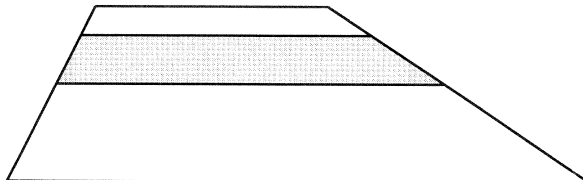
Le rectangle vu en perspective centrale



Les trois rectangles vus de face



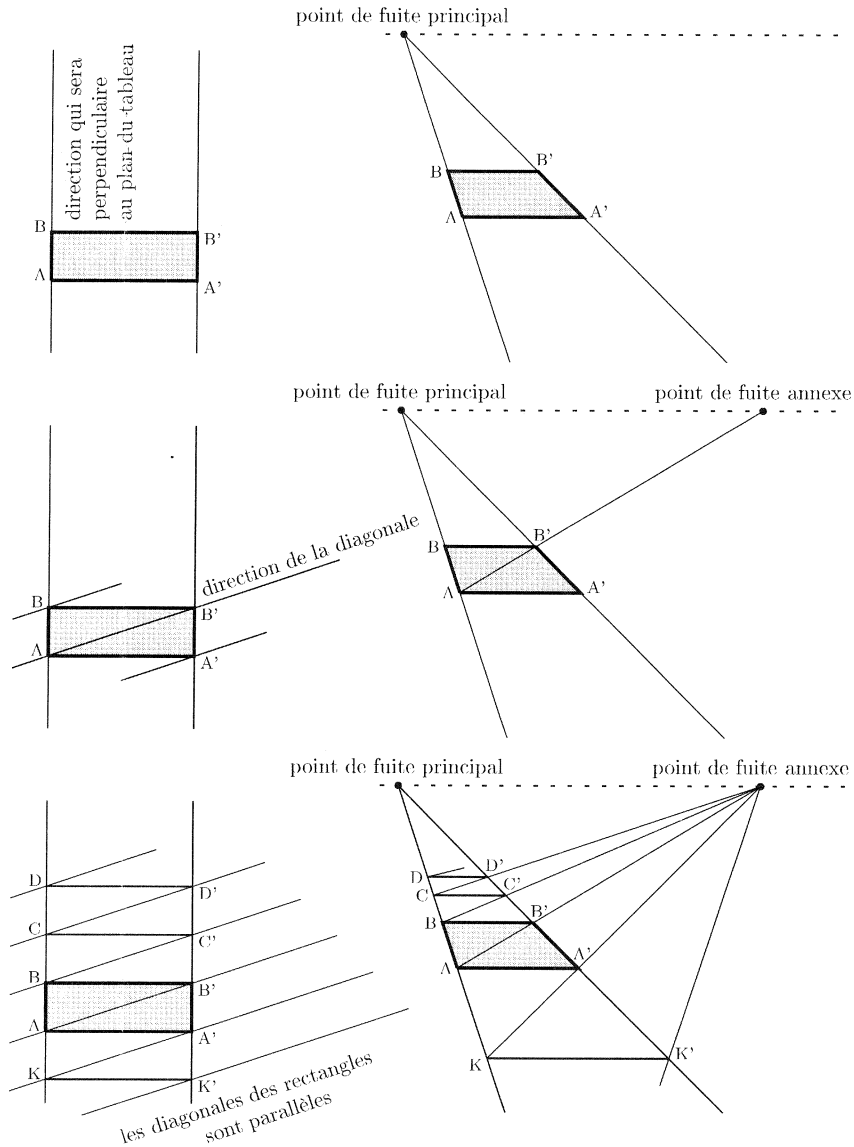
Les trois rectangles vus en perspective centrale





# Fiche IV - 4 Deuxième méthode.

Un rectangle (un carré) est représenté par un trapèze.  
Lui adjoindre au delà et en deça des rectangles qui lui sont égaux.



Dans une deuxième partie les figures représentées sont toujours dans un plan horizontal, mais, les côtés ne sont pas toujours parallèles au plan du tableau.

## La ligne d'horizon, les droites parallèles à la ligne d'horizon.

On considère maintenant un rectangle (un carré) placé dans un plan horizontal dont aucun des côtés n'est parallèle au plan du tableau. Les parallèles aux côtés vont être représentées par deux familles de droites, concourantes en deux points de fuite situés sur la ligne d'horizon.

Le premier problème qui se présente est le partage, en perspective centrale, d'un segment oblique en un nombre donné de segments égaux. Sachant que sur les droites parallèles à la ligne d'horizon, les segments égaux de l'espace restent égaux entre eux sur le dessin, on va tracer une droite intermédiaire parallèle à la ligne d'horizon.<sup>6</sup>

Là encore, c'est l'analyse de la figure en vraie grandeur, en triant ce qui se conserve (l'égalité des longueurs sur les parallèles à la ligne d'horizon) de ce qui se modifie (les droites parallèles deviennent des fuyantes) qui va permettre la transposition de la colonne de gauche (dessin en vraie grandeur) à la colonne de droite (perspective).<sup>7</sup> Dans la représentation en vraie grandeur, la partition d'un côté du rectangle en segments égaux se projette parallèlement à l'autre côté suivant une équipartition sur la droite auxiliaire d'après le théorème de Thalès.

On trace la droite auxiliaire: la projection parallèle d'une équipartition donne une équipartition en segments égaux; cette construction se fait pour chacun des deux côtés. Dans le report sur le dessin en perspective, on trace la ligne d'horizon et sa parallèle qui passe par l'un des sommets du quadrilatère. C'est sur cette ligne qu'on utilise l'invariant des rapports de longueurs. La famille des parallèles projetantes va se transformer en une famille de droites concourantes qui s'appuie sur une équipartition horizontale.

Dans cette activité on raisonne beaucoup. Autant avec sa tête qu'avec ses yeux, son crayon, sa règle et ses mains. La multiplication des exercices, le succès et la permanence des résultats amènent peu à peu l'auteur et acteur de ses dessins à désirer, à un niveau donné, une justification mathématique rigoureuse.

### Pourquoi ça marche?

Mais ce n'est pas aussi simple qu'il y paraît.

---

6. Pour plus de commodité on a choisi pour parallèle à la ligne d'horizon, celle qui passe par le sommet inférieur du quadrilatère: rien n'empêche d'en choisir une autre.

7. On voit que la colonne de gauche se lit de bas en haut, et celle de droite de haut en bas. En effet, on analyse la figure 5 de la colonne de gauche, on ajoute une droite parallèle à la ligne d'horizon et on obtient la figure 4, puis on oublie progressivement les structures jusqu'à la figure 0, et on transpose les figures sur la colonne de droite.

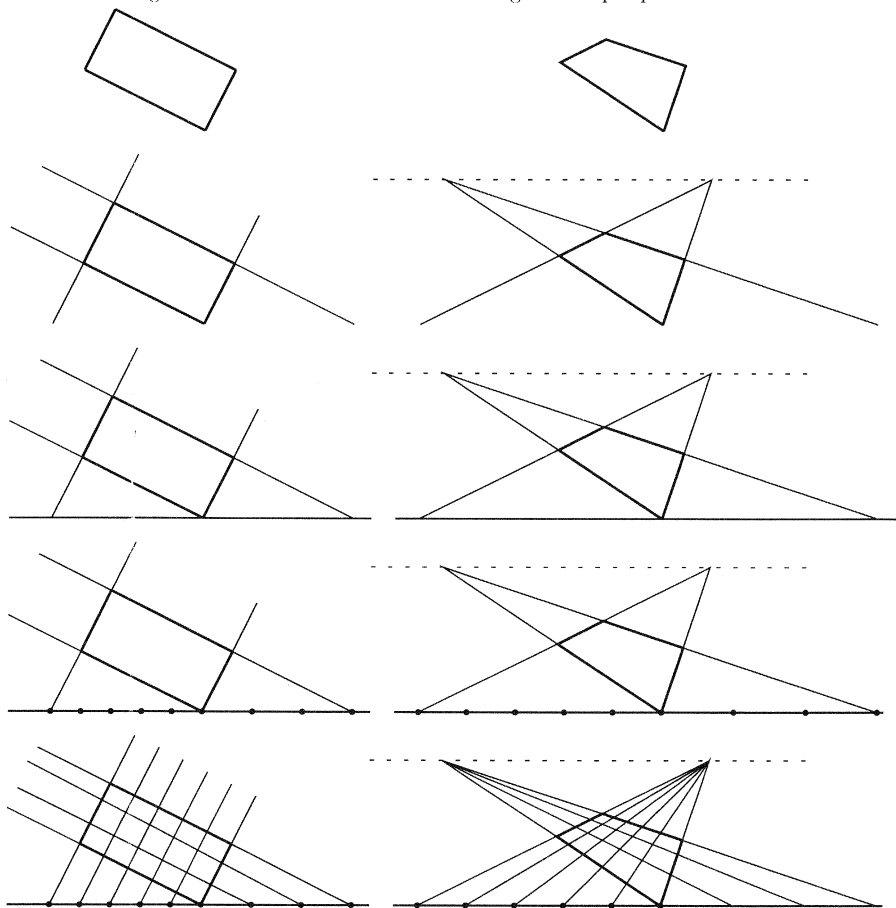
# Fiche V - 3

3<sup>ème</sup> exemple  
Partager le rectangle en 3 × 5 rectangles égaux.

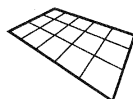
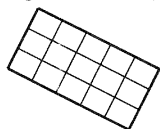
Partager le rectangle en 3 × 5 rectangles égaux.

Le rectangle vu de face

Le rectangle vu en perspective centrale



Le rectangle vu de face, partagé en 3×5    Le rectangle vu en perspective centrale, partagé en 3×5



## Première conclusion

On vient de voir quelques éléments fondamentaux permettant une activité plus complète qui débouche sur la réalisation en perspective centrale de dessins, de solides et d'édifices.

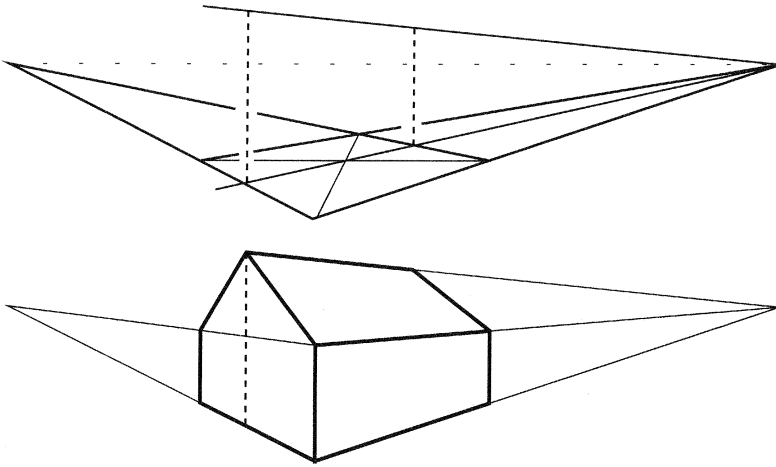
Pour exemple on a dessiné, sur la page qui suit, les traces structurales qui permettent de représenter convenablement une maison et un hangar. Selon le but recherché dans l'expression du dessin, il est possible d'être plus ou moins précis dans le rendu des volumes. La connaissance des règles de bases de la perspective centrale est indispensable pour un dessin précis et efficace quand la complexité augmente.

Tout au long des exercices on n'oublie pas que le dessin en perspective centrale est l'expression d'une relation entre un objet et son observateur. Pour un dessin effectué, l'observateur doit se placer en un endroit précis afin que celui-ci voit ce qu'a voulu représenter le dessinateur. Se placer autrement c'est voir un autre objet. On trouvera à la fin de l'ouvrage cité en référence la détermination exacte du point où doit se situer l'œil pour voir correctement un tableau réalisé en perspective centrale.

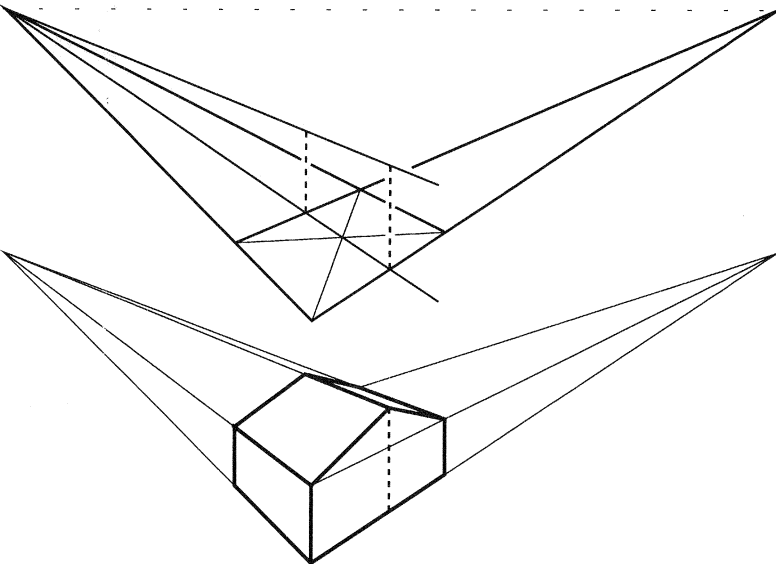
J'ai développé cette pratique, d'une façon ou d'une autre, pendant une quinzaine d'années, sans que ce soit jamais au détriment du programme. Il se trouve toujours des périodes particulières où cette activité est la bienvenue : les fins de trimestres, les séances qui suivent immédiatement les conseils de classe, brevets blancs et autres contrôles ... Des moments où l'on serait tenté de faire de la garderie, et où il vaut mieux proposer un travail apparemment ludique mais qui contribue à la formation culturelle et scientifique.

La perspective cavalière et la perspective centrale sont toutes deux très intéressantes à pratiquer avec les élèves : elles initient au passage des objets de l'espace à leurs représentations et permettent aux élèves d'élaborer et de structurer leur propre rapport à l'espace. Tandis que la perspective cavalière conduit à étudier bon nombre de propriétés des solides en travaillant sur le parallélisme et les milieux, la perspective centrale, elle, outre qu'elle fournit une meilleure représentation du réel sur le papier, utilise ces propriétés et fournit l'occasion d'approcher de façon sensible la notion d'invariant dans une transformation, notion centrale de la géométrie moderne.

## Représentation d'une maison

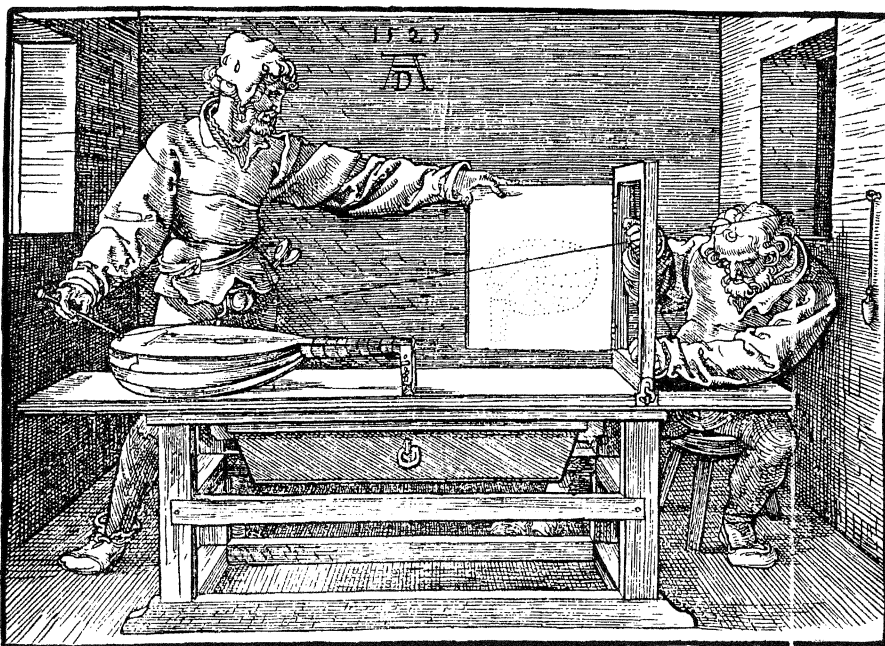


## Représentation d'un hangar vu du haut



## Mathématiser pour démontrer

Jusqu'ici c'est l'observateur-dessinateur qui a utilisé des règles en faisant un raisonnement étayé et conforté par des résultats cohérents et efficaces. Ces règles ont été établies par des artistes-mathématiciens<sup>8</sup> de la Renaissance, capables de mettre simultanément en situation l'objet à dessiner, qu'ils placent dans un plan horizontal, et l'œil de l'observateur, qu'il représente par un point. Le rayon lumineux qui joint l'œil et l'objet est représenté par une droite. Un plan vertical – le plan du tableau – va symboliser la relation objet-observateur de la façon la plus simple qui soit. Un point de l'objet et le point O représentant l'œil de l'observateur déterminent une droite – le rayon lumineux – qui coupe le plan vertical : l'intersection sera la représentation du point de l'objet.



La gravure de Dürer placée ci-dessus, illustre parfaitement ce propos. Elle représente l'élaboration expérimentale, point par point, du dessin d'un luth : on voit que l'œil a été remplacé par un clou sur le mur, le rayon lumineux par le fil tendu, et les images des points du luth sont repérées dans le plan vertical par leurs distances aux bords du cadre, et reportées sur la feuille à côté.

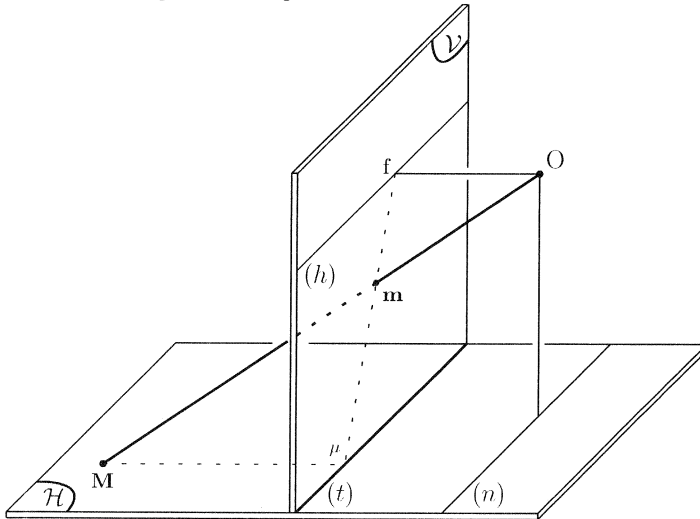
8. Alberti, Brunelleschi, Piero della Francesca, Viator ... et plus tard Desargues.  
Cf **Mais où est donc passée la troisième dimension ?** de Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF dans *"HISTOIRE DE PROBLÈMES, HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES"* - Ed. ELLIPSES.

Si on reprend la démarche des artistes de la Renaissance, on se place dans l'espace usuel, on applique les propriétés d'incidence et ce qui en résulte dans le plan vertical quant aux propriétés de la représentation en perspective centrale. Cette démarche pourrait inspirer un travail au lycée avec des élèves de seconde ou de première. Les contenus des programmes actuels le permettent<sup>9</sup>. Il est plus ambitieux de penser que dans l'avenir, il pourrait déboucher en terminale sur une introduction à la géométrie projective plane par les coordonnées homogènes.

## Image d'un point.

L'observateur (repéré par son œil  $O$ ) étant placé sur un plan horizontal  $\mathcal{H}$ , regarde devant lui et dessine sur un plan vertical  $\mathcal{V}$ . Si  $M$  est un point d'un objet situé derrière le tableau, le rayon visuel ( $OM$ ) allant de l'œil à l'objet rencontre le plan ( $\mathcal{V}$ ) en  $m$  qui sera l'image du point  $M$  sur le tableau.

Ce qui conduit à considérer d'un *point de vue mathématique*, la correspondance qui à tout point  $M$  de l'espace fait correspondre l'unique point  $m$  (quand il existe) de  $\mathcal{V}$  aligné avec  $O$  et  $M$ . C'est la projection centrale (ou perspective à point de fuite) de centre  $O$  de l'espace sur le plan  $\mathcal{V}$ .



- Elle n'est pas définie pour tout point du plan  $\mathcal{V}_o$  parallèle à  $\mathcal{V}$  passant par  $O$ .
- L'image d'une droite  $(d)$  est en général une droite, intersection du plan  $(O,d)$  et du plan  $\mathcal{V}$ .

Si on se limite à étudier les images des points de  $\mathcal{H}$ , trois droites apparaissent qui vont jouer un rôle particulier :

- la ligne de terre  $(t)$  intersection de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{V}$  sera une droite de points fixes.

9. On ne peut pas en dire autant des horaires impartis aux mathématiques aujourd'hui.

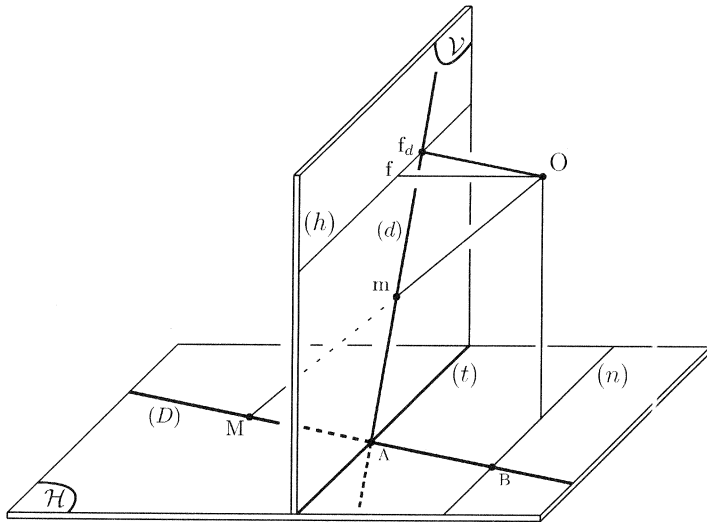
- la ligne neutre ( $n$ ), intersection de  $\mathcal{H}$  et de  $\mathcal{V}_o$  : ses points n'ont pas d'image.
- la ligne d'horizon ( $h$ ) parallèle à  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{V}$ , intersection de  $\mathcal{V}$  et de  $\mathcal{H}_o$  plan parallèle à  $\mathcal{H}$  passant par  $O$ .

Tous les points de  $\mathcal{V}$  seront atteints par la correspondance sauf ceux situés sur la droite ( $h$ ). Le point  $O$  se projette orthogonalement sur le plan  $\mathcal{V}$  en un point  $f$  de ( $h$ ) appelé le point de fuite principal.

**Pour construire le point  $m$ ,** on projette  $M$  en  $\mu$  orthogonalement sur  $\mathcal{V}$ . Le plan  $(OM\mu)$  contient la droite  $(Of)$  qui est parallèle à  $(M\mu)$ . Il coupe  $\mathcal{V}$  suivant la droite  $(\mu f)$  qui rencontre  $(OM)$  en  $m$ .

*En peinture,* on considère les points situés dans le demi-espace limité par  $\mathcal{V}$  qui ne contient pas  $O$  et dans  $\mathcal{H}$ , le demi-plan limité par  $(t)$  qui ne contient pas  $(n)$ .

## Image d'une droite.



Soit  $(D)$  une droite du plan  $\mathcal{H}$  qui coupe la ligne de terre  $(t)$  en  $A$ . Le plan  $(D; O)$ , déterminé par la droite  $(D)$  et le point  $O$ , coupe le plan  $\mathcal{V}$  selon la droite  $(d)$  qui est l'image de  $(D)$ .

Le plan  $(D; O)$  coupe la ligne d'horizon  $(h)$  en  $f_d$ . Comme le plan  $(h; O)$  est parallèle au plan  $\mathcal{H}$ , la droite  $(Of_d)$  est parallèle à la droite  $(D)$  :  $f_d$  est le point de fuite sur  $(h)$  lié à la direction de la droite  $(D)$ .

Tout point  $M$  de  $(D)$  n'appartenant pas à  $(n)$  a une image sur  $\mathcal{V}$ .

Le point  $A$  sur  $(t)$  est invariant.

Le point à l'infini de  $(D)$  a son image en  $f_d$ .



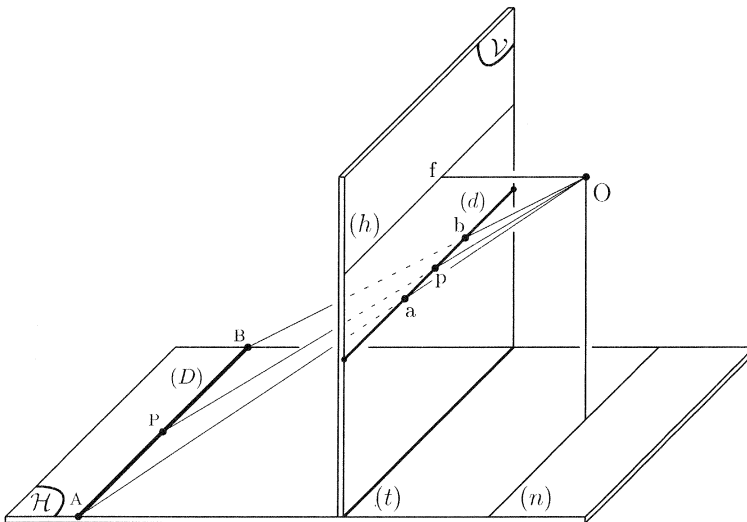
On retiendra la propriété :

**L'image d'une droite non parallèle à la ligne de terre ( $t$ ) est une droite passant par le point de fuite annexe  $f_d$  lié à la direction de ( $D$ ).**

**Remarque.**

On appelle B le point à l'intersection de ( $D$ ) avec ( $n$ ). L'image de la demi-droite ouverte ]BA) est la demi-droite ouverte ] $f_d$ A).

### Image d'une droite parallèle à la ligne de terre ( $t$ ).



La droite (AB) est dans le plan  $\mathcal{H}$  parallèle à la ligne de terre ( $t$ ) et distincte de la ligne neutre ( $n$ ) ; on la note ( $D$ ). Le plan ( $D$ ; O) déterminé par la droite ( $D$ ) et le point O coupe le plan  $\mathcal{V}$  selon la droite ( $d$ ) qui est son image. Cette droite ( $d$ ) est parallèle à ( $t$ ) et à la ligne d'horizon ( $h$ ).

A a pour image a, B a pour image b et le segment [AB] a pour image le segment [ab].

Les triangles OAB et Oab sont homothétiques. Si on ajoute un point quelconque P sur [AB] et son image p sur [ab], on a l'égalité des rapports

$$\frac{AP}{AB} = \frac{ap}{ab}.$$

En particulier si  $P$  est le milieu de  $[AB]$  son image  $p$  est le milieu de  $[ab]$  l'image de  $[AB]$ .

On retiendra les propriétés :

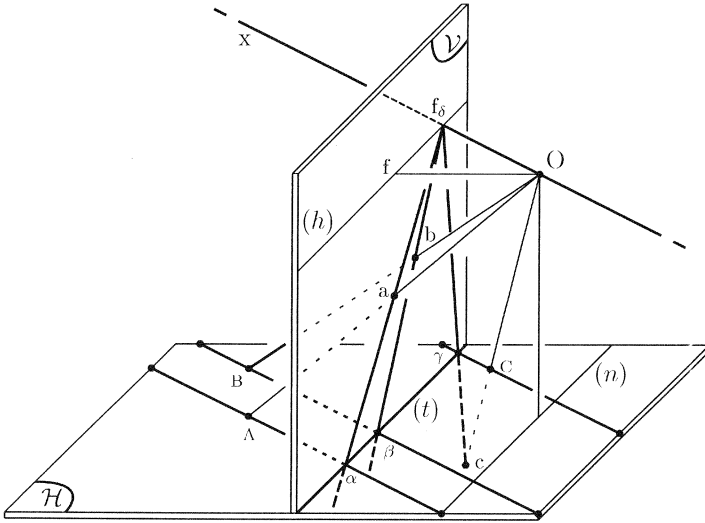
**L'image d'une droite de  $\mathcal{H}$  parallèle au plan  $\mathcal{V}$  est parallèle à la ligne d'horizon.**

**Lorsqu'un segment est parallèle à la ligne d'horizon, l'image de son milieu est le milieu de l'image de ce segment.**

## Image de droites à supports parallèles.

Si les droites sont parallèles à la ligne de terre leurs images seront parallèles à la ligne d'horizon et parallèles entre elles.

On considère maintenant des droites parallèles entre elles qui coupent la ligne de terre ( $t$ ).



On a tracé des droites parallèles appartenant à la direction  $\delta$ . Elles coupent la ligne de terre en  $\alpha, \beta, \gamma$ . Sur chacune d'elles se déplace respectivement les points  $A, B, C$  qui ont pour images  $a, b, c$ , sur le plan  $\mathcal{V}$ .

Les plans  $(A\alpha; O), (B\beta; O), (C\gamma; O)$  ont une droite commune qui passe par  $O$  et qui appartient aussi à la direction  $\delta$ . Cette droite coupe la ligne d'horizon ( $h$ ) en  $f_\delta$  qui est le point de fuite annexe lié à la direction  $\delta$ .

L'intersection de ces plans avec  $\mathcal{V}$  est formé des droites concourantes  $(f_\delta\alpha), (f_\delta\beta), (f_\delta\gamma)$ , qui se rejoignent en  $f_\delta$ .

On retiendra la propriété :

**Les droites parallèles du plan  $\mathcal{H}$  ont pour images des droites concourantes sur la ligne d'horizon en un point qui est le point de fuite lié à la direction de ces parallèles.**

**Si les droites de  $\mathcal{H}$  sont parallèles à la ligne de terre, leurs images sont des droites parallèles à la ligne d'horizon.**

## Conclusion.

On reproduit ici un extrait de l'article de Rudolf Bkouche dans Repère IREM n°39.

**“Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science”**

*Le problème de la représentation est exemplaire en ce sens que la théorisation, ici la géométrisation, se construit aux limites d'une pratique, pratique du peintre ou pratique architecturale si l'on se place du point de vue de l'histoire, mais simplement pratique du dessin si l'on se place du point de vue de la classe. La théorisation se situe ici à deux niveaux, le premier répond à la question du “comment faire” lorsqu'on ne sait pas ou on ne sait plus faire, le second répond à la question de la légitimation des réponses à la première question.*

*On peut alors considérer cet usage de la représentation perspectiviste dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace de deux façons. Ou bien l'on considère que la question de la représentation est une simple motivation pour “vendre” la géométrie dans l'espace et dans ce cas la problématisation est une donnée extérieure, une belle histoire qui peut convaincre quelques élèves et laisser d'autres sceptiques<sup>10</sup> ; ou bien l'on considère que la problématique de la représentation participe de la géométrie elle-même et dans ce cas la pratique perspectiviste participe pleinement de l'enseignement de la géométrie.*

*Il faut rappeler ici l'une des difficultés de l'enseignement de la géométrie dans l'espace ; d'une part la nécessité d'utiliser de représentations planes pour étudier les situations spatiales, d'autre part la nécessité de règles de représentation s'appuyant sur la géométrie dans l'espace. Le recours à l'histoire et en particulier à celle du développement de la représentation perspectiviste permet d'aborder la difficulté en montrant comment une pratique du dessin a conduit d'une part à construire les concepts théoriques qui la légitiment et d'autre part comment la construction de tels concepts a conduit la théorie à s'émanciper de ses origines avec le développement de la géométrie projective<sup>11</sup>. En ce sens, on peut concevoir que l'enseignement de la géométrie dans l'espace prenne en compte assez tôt le point de vue projectif.*

10. ainsi, lors d'une exposition sur les mathématiques, des élèves protestaient contre une partie consacrée à la peinture en proclamant : “la peinture c'est beau, les mathématiques c'est pas beau”.

11. Jean-Pierre Le Goff, “La perspective en première scientifique : une certaine suite dans les

*On voit ainsi l'apport d'une mise en perspective historique, d'abord la mise en évidence du rôle joué par une pratique (ici le dessin) dans le développement d'une théorie mathématique, ensuite la façon dont cette théorie d'une part légitime des règles pratiques et d'autre part s'émancipe de cette pratique pour constituer un nouveau domaine de la science. C'est alors une façon de rompre avec la dichotomie "mathématiques pures/mathématiques appliquées" et de mieux comprendre comment les mathématiques dites pures interviennent dans la connaissance du monde.*

Pour en savoir plus, on pourra consulter :

- "Mais où est donc passée la troisième dimension ? " de Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF dans *"HISTOIRE DE PROBLÈMES, HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES"* - Ed. ELLIPSES.
- *"DESTIN DE L'ART, DESSEINS DE LA SCIENCE"*. Actes du colloque A.D.E.R.H.E.M. de Caen (1986), diffusé par l'IREM de CAEN.
- *"LA PLACE DE J.-H. LAMBERT (1728-1777) DANS L'HISTOIRE DE LA PERSPECTIVE"* de Roger LAURENT et Jeanne PEIFFER. Ed ...
- *"LA PERSPECTIVE EN QUESTION"* de Thérèse GILBERT, Ciaco éd., Louvain-la-Neuve.
- *LES CAHIERS DE LA PERSPECTIVE*, IREM de CAEN. 5 numéros parus.
- *GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ET CALCUL VECTORIEL*, de Philippe LOMBARD, Topiques éditions.
- *LA RÈGLE, UN INSTRUMENT DE LA GÉOMÉTRIE PROJECTIVE*, de Rudolf BKOUCHE, bulletin APMEP N° 415 avril-mai 1998.

---

idées", *Repères IREM* n°7, avril 1992 ; Didier Bessot et Jean-Pierre Le Goff, "Mais où est passée la troisième dimension?" in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Commission Inter-IREM Épistémologie, Ellipse, Paris 1993.

Cet article a été inspiré dans une très large mesure par la publication:

LA PERSPECTIVE CENTRALE AU COLLÈGE  
et ... peut-être au lycée

BERNARD CAZIER - FRANÇOISE CHAMONTIN  
IREM de LILLE  
1999

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lille  
USTL - Bât.M1 - 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex  
émail: [irem@univ-lille1.fr](mailto:irem@univ-lille1.fr) - Site web: [www.univ-lille1.fr/irem/](http://www.univ-lille1.fr/irem/)  
tél 03 20 43 41 82 fax 03 20 33 71 61



# MARIVAUDAGE GÉOMÉTRIQUE

SANS MESURES

**Martine JANVIER**

IREM du MANS

*Sur des exemples simples et précis tirés des programmes du collège (droite des milieux du triangle et du trapèze, médianes, quadrature du triangle...) on montrera que l'utilisation des aires non mesurées construit un autre regard sur les exigences, les apports et les dangers d'une figure en lien avec la nécessité démonstrative.*

## Les acteurs

- Henry Plane, animateur IREM,
- Martine Janvier et Anne Gravier, enseignantes de mathématique d'un même collège et travaillant dans plusieurs groupes de recherche IREM au Mans,
- leurs élèves.

Suite du récit d'une expérience menée en collège sur trois années scolaires, cet atelier avait pour ambition de raconter l'évolution d'un travail de terrain. Son organisation et la place prise dans nos classes ont évolué avec le temps. Par exemple, il nous semble aujourd'hui intéressant de faire manipuler des surfaces dès la sixième et de laisser les jeunes élèves acquérir, intuitivement, certaines propriétés de ces surfaces ; ainsi la conservation de l'aire au cours d'un déplacement ; propriété parfois mise en doute par de plus grands élèves !

Une brochure IREM (Pays de Loire-Le Mans) est actuellement en préparation et devrait être disponible très prochainement.

## Progression

6<sup>ème</sup> : Prise en main des surfaces comme objets qu'on peut déplacer, juxtaposer pour les ajouter et découper pour soustraire.

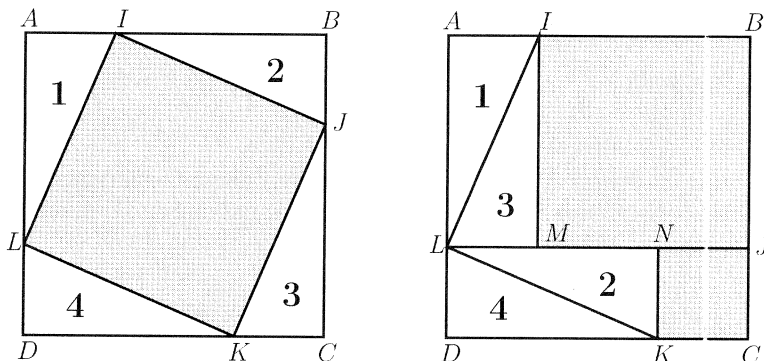
5<sup>ème</sup> : Mise en place des propriétés permettant de comparer les aires (rectangle, parallélogramme, triangle, polygone...) En particulier: quadratures...

4<sup>ème</sup> - 3<sup>ème</sup> : Pythagore, triangles à côtés parallèles, droites du triangle... Exemples et contre-exemples; mise en défaut d'une figure...

Dans l'atelier de Lille, les exercices suivants ont été proposés et plus ou moins développés. L'ordre répond à la progression que nous appliquons dans nos classes. Les propriétés indispensables à ces démonstrations seront énoncées ici; elles sont toutes établies avec les élèves, sous forme d'exercices et figurent dans les bilans de leçons.

### Exercice 1

1. Tracer quatre triangles rectangles superposables; les découper et les positionner comme sur la figure de gauche pour constituer le carré  $ABCD$ . Quelle est la nature de  $IJKL$ ?
2. Par glissement on déplace les triangles 2 et 3 comme indiqué sur la figure de droite. Quelle est la nature de  $IBJM$ ? de  $NJCK$ ?
3. Trouver une relation entre  $(IJKL)$ ,  $(IBJM)$  et  $(NJCK)$



### Solution :

1.  $ABCD$  est un carré. En effet, ses quatre côtés sont les hypoténuses des quatre mêmes triangles; ils sont égaux donc  $ABCD$  est un losange. Les angles  $\widehat{AIL}$  et  $\widehat{BIJ}$  sont complémentaires donc l'angle  $\widehat{LIJ}$  est droit et  $IJKL$  est bien un carré.
2.  $IBJM$  et  $NJCK$  ayant trois angles droits et deux côtés consécutifs égaux sont deux carrés.
3. Le carré  $IJKL$  est la "différence" entre le grand carré et la somme des quatre triangles:

$$(IJKL) = (ABCD) - 4.(AIL)$$

et aussi la somme des deux petits carrés:

$$(IBCKNM) = (ABCD) - 4.(AIL)$$



**Conclusion :**

Le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les deux côtés de l'angle droit.

**Remarques :**

*Selon le niveau auquel on s'adresse, le travail sera plus ou moins approfondi :*

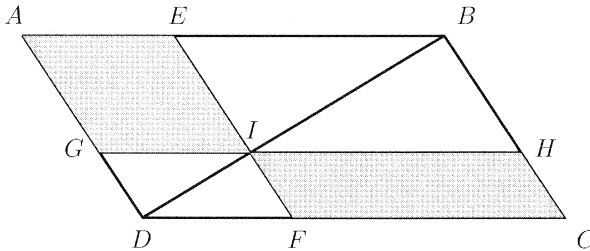
*En 6<sup>me</sup> : reconnaître les figures et remarquer l'égalité des surfaces.*

*En 5<sup>me</sup> : démontrer qu'un quadrilatère est un carré et établir l'égalité des surfaces.*

*En 4<sup>me</sup> : exploiter la configuration pour exprimer le théorème dit "de Pythagore".*

**Exercice 2**

$ABCD$  est un parallélogramme. On place un point  $I$  sur sa diagonale  $[AC]$ . Par ce point on construit les parallèles  $(EF)$  à  $(BC)$  et  $(GH)$  à  $(AB)$ . Comparer les aires de  $AEIG$  et  $IHCF$ .

**Solution :**

$EBHI$  et  $GIFD$  ont leurs côtés opposés parallèles : ce sont deux parallélogrammes.

Une diagonale partage le parallélogramme en deux triangles de même aire donc :

Dans  $ABCD$  :  $\mathcal{A}(ABD) = \mathcal{A}(CDB)$

Dans  $EBHI$  :  $\mathcal{A}(EBI) = \mathcal{A}(HIB)$

Dans  $GIFD$  :  $\mathcal{A}(GID) = \mathcal{A}(FDI)$

Or les six surfaces réalisent un pavage de  $ABCD$  donc par différence :

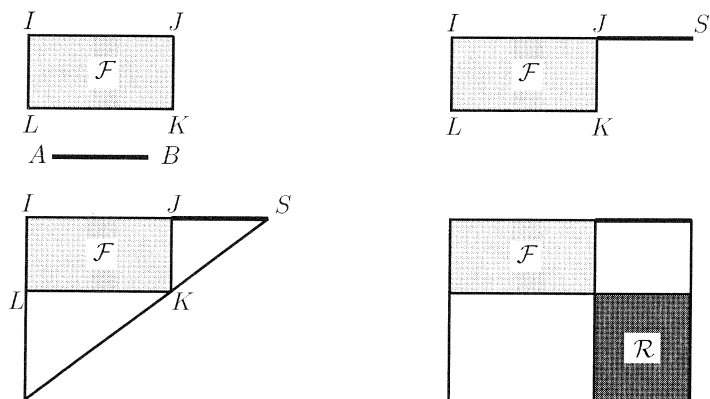
$$\mathcal{A}(AEIG) = \mathcal{A}(IHCF)$$

**Remarque**

*Cet exercice simple est particulièrement important : c'est l'occasion de rencontrer deux surfaces non superposables mais de même aire et donc de préciser ce que sont des surfaces équivalentes ou des aires égales. On pourra, par exemple, appliquer cet exercice au rectangle et en l'utilisant pour vérifier que deux rectangles (ou deux parallélogrammes) non superposables ont la même aire. Il permet aussi, réciproquement, de construire un parallélogramme de côté donné ayant même aire qu'un parallélogramme donné (Cf. exercice 2).*

### Exercice 3

Construire "sous  $AB$ " un rectangle dont l'aire est égale à celle d'un rectangle  $\mathcal{F}$  donné.



### Solution :

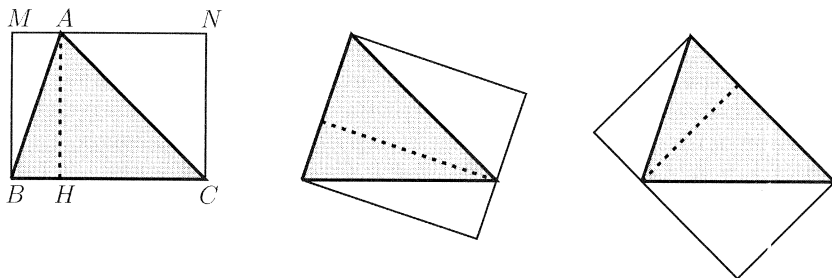
On prolonge un côté de  $IJKL$  c'est-à-dire  $\mathcal{F}$ , d'une longueur  $JS = AB$ . On trace  $(SK)$  qui coupe  $(IL)$  en  $T$  et, à partir de  $K$  on construit le rectangle  $\mathcal{R}$  qui a un côté de longueur  $AB$  et, d'après l'exercice précédent, est équivalent à  $\mathcal{F}$ .

### Exercice 4

$ABC$  étant un triangle, construire, de trois façons différentes, un rectangle dont l'aire est double de celle du triangle (et dont l'un des côtés est un des côtés du triangle).

### Solution

Traçons la hauteur issue de  $A$ ; elle coupe le côté opposé en  $H$ .



1. Si le triangle a trois angles aigus (1):

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ABH) + \mathcal{A}(ACH)$$

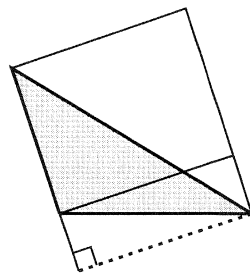
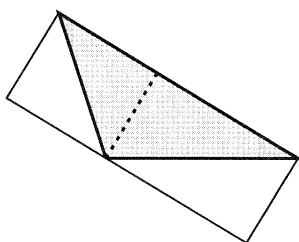
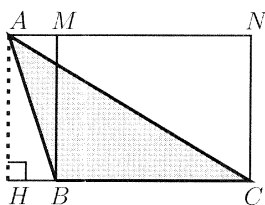
$AHB$  est un triangle rectangle et, si  $AHBM$  est un rectangle,

$$\mathcal{A}(AHB) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(AHBM)$$

De même  $AHC$  est la moitié du rectangle  $AHCN$

$$\mathcal{A}(AHBM) + \mathcal{A}(AHCN) = \mathcal{A}(MBCN) \quad \text{donc} \quad \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(MBCN)$$

2. Si le triangle a un angle obtus (ici  $\widehat{ABC}$ ) (2):



$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ACH) - \mathcal{A}(ABH) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(AHCN) - \mathcal{A}(AHBM) = \mathcal{A}(MBCN)$$

$$\text{donc} \quad \mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(MBCN)$$

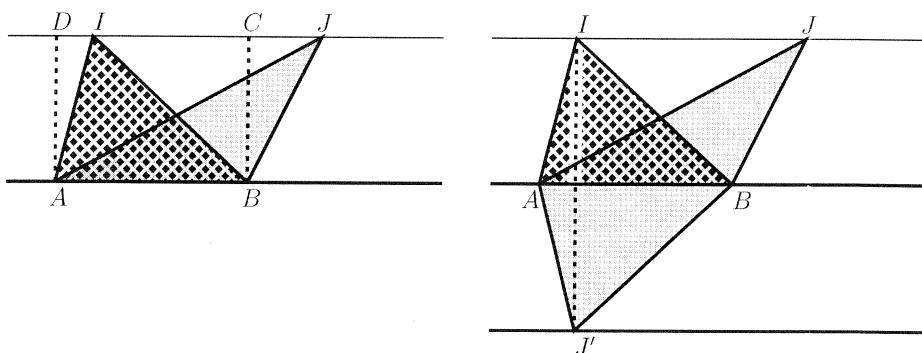
### Remarques :

Dans cet exercice on obtient trois rectangles de même aire et non superposables; ce peut être l'occasion d'utiliser la méthode de vérification d'équivalence des rectangles précédemment décrite (ex 2). Le cas du triangle dont les angles sont tous aigus est simple pour les élèves; il est nécessaire de les accompagner dans la seconde configuration.

### Exercice 5

$D_1$  et  $D_2$  sont deux droites parallèles. Sur  $D_1$  on place deux points  $A$  et  $B$  et sur  $D_2$  deux points  $I$  et  $J$ .

Montrer que  $\mathcal{A}(IAB) = \mathcal{A}(JAB)$



### Solution :

Ces deux triangles sont la moitié du même rectangle  $ABCD$ . Donc

$$\mathcal{A}(IAB) = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(JAB)$$

Si  $J'$  est le symétrique de  $J$  par rapport à  $(AB)$ , on remarque que :

$$\mathcal{A}(J'AB) = \mathcal{A}(JAB)$$

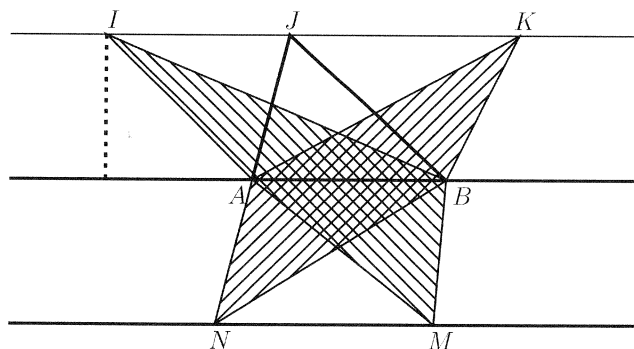
Autre remarque : les trois triangles ont même base<sup>1</sup> et même hauteur.

### Bilan de la leçon :

Tous les triangles qui ont même base et même hauteur ont la même aire et aussi...

Même aire et même base donc même hauteur.

Même aire et même hauteur donc même base.



1. Dans un énoncé, "même base" signifie indifféremment base commune ou base de même mesure ; idem pour même hauteur.

A la suite d'exercices, ces propriétés sont complétées par :

$k$  étant le rapport de deux entiers  $m$  et  $n$  ( $n$  non nul) :

- Deux triangles qui ont même base (resp. même hauteur) et des hauteurs (respect. des bases) dans le rapport  $k$  ont des aires dans le rapport  $k$ .
- Deux triangles qui ont même base (resp. même hauteur) et des aires dans le rapport  $k$  ont des hauteurs (respect. des bases) dans le rapport  $k$ .
- Deux triangles dont les hauteurs sont dans le rapport  $k$  et dont les bases sont dans le rapport  $k'$  ont des aires dans le rapport  $kk'$ .

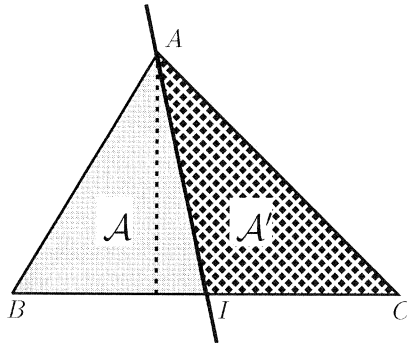
### Exercice 6

$ABC$  est un triangle et  $I$  est le milieu du segment  $[BC]$ . Comparer les aires de  $IAB$  et de  $IAC$ .

### Solution :

Si  $I$  est le milieu du segment  $[BC]$ ,  $BI = IC$ .

Les deux triangles  $AIB$  et  $AIC$  ont donc même base et même hauteur (cette hauteur commune est  $AH$ ) ; ils ont donc la même aire :  $\mathcal{A}(AIB) = \mathcal{A}(AIC)$



On peut remarquer que  $(AI)$  est une médiane de  $ABC$  et conclure que, dans un triangle toute médiane détermine deux triangles de même aire. Théorème qui sera précieux pour la suite des démonstrations.

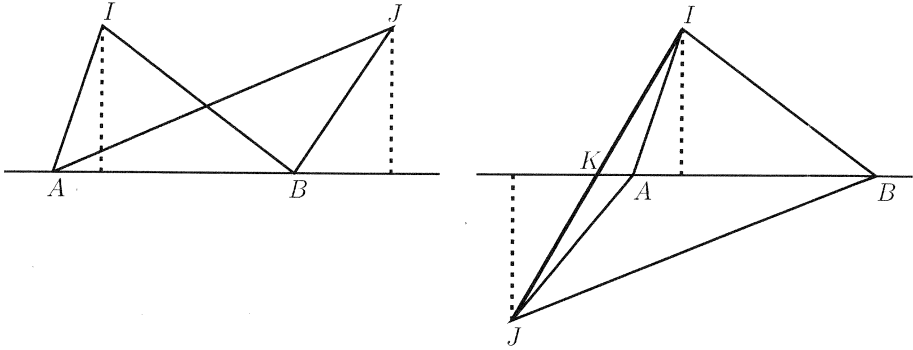
*Dans un triangle, une médiane détermine deux triangles de même aire.*

### Exercice 7

Soit  $ABI$  et  $ABJ$  deux triangles de même aire.  
Quelle est la situation du segment  $[IJ]$  par rapport à  $(AB)$ ?

#### Solution :

Il y a deux configurations à envisager :



1. Les deux triangles sont situés dans le même demi-plan de frontière  $(AB)$ . D'après ce qui précède, les deux triangles ont la même hauteur et donc (cf. distance de deux droites)  $(IJ)$  est parallèle à  $(AB)$ .
2. Les triangles sont de part et d'autre de  $(AB)$ . Le segment  $[IJ]$  est alors coupé par  $(AB)$ ; soit  $K$  leur point d'intersection.

$$\mathcal{A}(IAB) = \mathcal{A}(JAB)$$

et les triangles ont même base donc ils ont la même hauteur.

Mais  $IKA$  a même hauteur que  $IAB$  et  $JKA$  a même hauteur que  $JAB$  donc  $IKA$  et  $JKA$  ont même base et même hauteur donc ils ont la même aire et

$$\mathcal{A}(IAK) = \mathcal{A}(JAK)$$

On regarde alors ces deux triangles en considérant leurs bases  $IK$  et  $JK$ ; ils ont même hauteur mais, ayant même aire, ils ont même base.

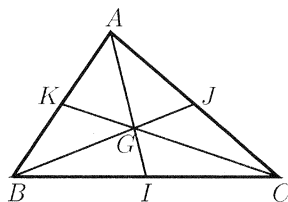
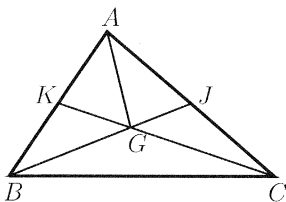
Donc  $IK = JK$  et  $K$  est le milieu du segment  $[IJ]$ .

*Si deux triangles ont même aire et base commune, le segment qui joint leurs sommets est :*

- soit parallèle à la base commune,*
- soit coupé en son milieu par cette base commune.*

**Exercice 7 bis**

Démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes.

**Solution :**

Dans  $ABC$  :

$$(BJ) \text{ médiane donc } \mathcal{A}(BAJ) = \mathcal{A}(BCJ) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$$

$$- (CK) \text{ médiane donc } \mathcal{A}(CAK) = \mathcal{A}(CBK) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(ABC)$$

$$\mathcal{A}(ABJ) = \mathcal{A}(ACI) \quad \text{d'où} \quad \mathcal{A}(BGI) = \mathcal{A}(CGJ)$$

par soustraction du quadrilatère commun  $AJGK$ .

Dans  $AGC$  :

$$(GJ) \text{ médiane donc } \mathcal{A}(CGJ) = \mathcal{A}(AGJ)$$

Dans  $AGB$  :

$$- (GK) \text{ médiane donc } \mathcal{A}(BGK) = \mathcal{A}(AGK)$$

Ces quatre derniers triangles ont donc la même aire et, par addition,

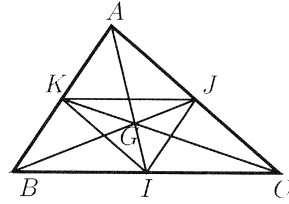
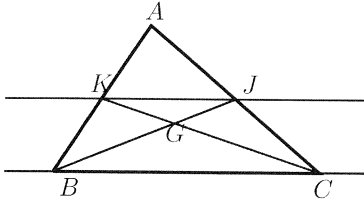
$$\mathcal{A}(AGC) = \mathcal{A}(AGB).$$

Nous sommes donc dans la configuration précédemment décrite : deux triangles de même aire, de base commune et situés de part et d'autre de cette base. On peut en déduire que  $(AG)$  coupe le segment  $[CB]$  en son milieu et que  $(AG)$  est la troisième médiane :

**Dans un triangle, les trois médianes sont concourantes.**

*Cette démonstration, simple, permet alors de déduire immédiatement que :*

1. les six petits triangles sont de même aire et donc que  $\mathcal{A}(ACI) = 3 \cdot \mathcal{A}(GCI)$  ; or, ces deux triangles ont la même hauteur et donc  $AK = 3 \cdot GK$  : le centre de gravité d'un triangle est au tiers de chaque médiane,
2. les triangles  $JBC$  et  $KBC$  ayant même aire et base commune et étant situés du même côté de leur base commune,  $(JK) \parallel (BC)$  ; la droite qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté,
3. on peut alors comparer les aires et les périmètres de  $ABC$  et  $IJK$ , etc. ...



### Exercice 8 (démonstration du théorème dit "de Thalès")

$ABC$  est un triangle.  $I$  est un point du segment  $[AB]$  et  $J$  un point du segment  $[AC]$  tel que  $(IJ) \parallel (BC)$ .

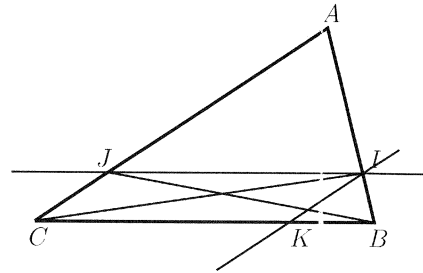
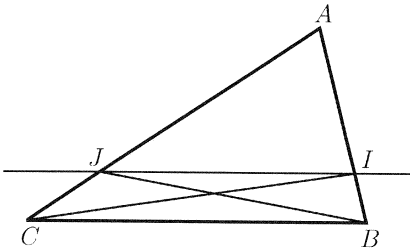
1. Démontrer que  $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$ .
2. Puis démontrer que  $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$ .

Réciproque :

$ABC$  est un triangle.  $I$  est un point du segment  $[AB]$  tel que  $AI = k \times AB$  et  $J$  est un point du segment  $[AC]$  tel que  $AJ = k \times AC$ .

3. Démontrer que  $(IJ) \parallel (BC)$ .

**Solution :**



1°  $(IJ) \parallel (CB)$  donc  $\mathcal{A}(JCI) = \mathcal{A}(IBJ)$  et, en ajoutant  $\mathcal{A}(AIJ)$  :  $\mathcal{A}(AJB) = \mathcal{A}(AIC)$

Les triangles  $AJB$  et  $AJI$  ont même hauteur donc  $\frac{\mathcal{A}(AJI)}{\mathcal{A}(AJB)} = \frac{AI}{AB}$

De même,  $\frac{\mathcal{A}(AIJ)}{\mathcal{A}(AIC)} = \frac{AJ}{AC}$  et donc :  $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC}$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

De même :  $\frac{\mathcal{A}(IBJ)}{\mathcal{A}(ABJ)} = \frac{IB}{AB}$  et  $\frac{\mathcal{A}(JIC)}{\mathcal{A}(AIC)} = \frac{JC}{AC}$  donc  $\frac{IB}{AB} = \frac{JC}{AC}$  (\*)



2° Traçons alors  $(IK)$  parallèle à  $(AC)$ . En appliquant (\*) on a:  $\frac{AI}{AB} = \frac{CK}{CB}$ ;

$IJCB$  étant un parallélogramme,  $IJ = CK$  On obtient ainsi la relation demandée:

$$\frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC} = \frac{AI}{AB}$$

3° On démontre simplement que  $\mathcal{A}(ICB) = \mathcal{A}(JCB)$  et donc que les droites  $(IJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles.

## Exercice 9

Construire (sans intermédiaire) un carré de même aire que le triangle équilatéral ABC.

### Remarque :

*Une première construction se fait par un coupé-collé d'un triangle équilatéral; le quadrilatère obtenu ressemble à un carré mais ce n'en est pas un ! Et la différence est très très légère: il est donc nécessaire de démontrer ! Cette démonstration ne pose pas de grande difficulté dans sa première partie mais n'est, à la fin, abordable que par des élèves de troisième. On proposera, ensuite, un "découpage" répondant au problème posé; il nécessite la connaissance de la construction d'une moyenne géométrique, par exemple par la méthode d'Euclide, et ce travail fait en classe dans les leçons précédentes, est proposé sous forme de deux exercices. Et enfin, on trouvera une construction géométrique de ce carré, sans découpage.*

### Méthode 1 :

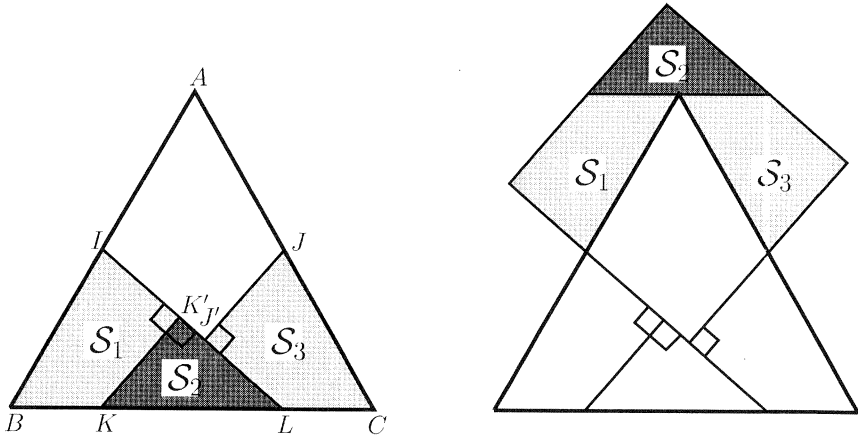
On découpe le triangle en quatre morceaux et on juxtapose les morceaux.

1. Découpage :  $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ ,  $J$  le milieu du segment  $[AC]$ ;  $K$  et  $L$  sont deux points du segment  $[BC]$  tels que

$$BK = CL = \frac{1}{4} \times BC.$$

On trace  $(IL)$  puis  $K'$  et  $J'$  les projetés orthogonaux respectifs de  $K$  et  $J$  sur  $(IL)$ .

On obtient ainsi trois quadrilatères et un triangle.



2. On déplace  $S_1, S_2$  et  $S_3$  comme indiqué sur le schéma en remarquant qu'on juxtapose bien des segments de même longueur (rien à calculer) et des angles supplémentaires: on obtient donc un quadrilatère et il n'y a pas de "vide" dans ce quadrilatère.

Il reste à chercher s'il s'agit ou non d'un carré...

Il a trois angles droits: c'est un rectangle.

Comparons maintenant ses côtés en prenant  $BC = 4$  (unités de longueur) donc  $BI = 2$  et  $BK = 1$

Remarquons que la différence est "très petite" ( $x - y$  vaut environ 0,027 (u)) et donc le collage fait illusion...

### Remarque:

On n'a donc pas répondu au problème posé!

### Méthode 2: Construire la moyenne géométrique $x$ de $AH$ (hauteur du triangle) et de $BH$ .

A partir de  $I$  milieu du segment  $[AB]$ , on reporte la longueur  $IL = x$ .  
On obtient  $L$  sur le segment  $[BC]$ . On place  $K$  tel que

$$LK = \frac{1}{2}.BC.$$

On achève la construction comme dans la méthode 1.

On montre alors que  $S_1$  et  $S_2$  ne sont plus identiques mais le quadrilatère est toujours un rectangle qui a la même aire  $\mathcal{A}$  que le triangle.

Un côté de ce rectangle mesure  $\sqrt{\mathcal{A}}$ , donc c'est un carré.

## Construction de la moyenne géométrique de deux segments

Il s'agit aussi d'un problème de quadrature :

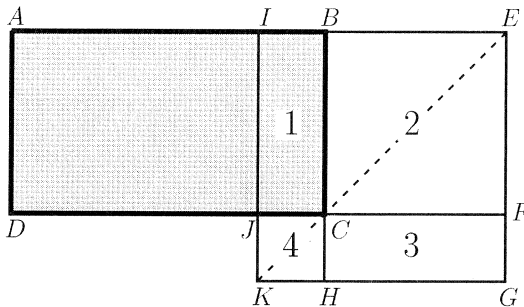
*Construire un carré ayant la même aire qu'un rectangle donné.*

Proposons la méthode d'Euclide, sous forme d'exercices (11 et 11bis)

### Exercice 11 (Proposition 6 du livre II des Éléments d'Euclide)

$ABCD$  est un rectangle.  $E$  est un point de  $(AB)$  extérieur au rectangle et tel que  $BE = AD$ .  $I$  est le milieu du segment  $[AE]$ .

On se propose de montrer que l'aire du rectangle est égale à l'aire du carré construit sur  $[IA]$  moins l'aire du carré construit sur  $[IB]$ .



### Solution :

On construit le carré sur  $[IE]$ ; on remarque que  $AI = IE$ .

Sachant que  $BE = AD = BC$ ,  $BEFC$  est un carré.

Sa diagonale  $(EC)$  coupe en  $K$  la perpendiculaire  $(IJ)$  à  $(AB)$  et  $IEGK$  et  $JCHK$  sont des carrés.

Si

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= (ABCD) & ; & \quad \mathcal{A}_1 = (IBCJ) & ; & \quad \mathcal{A}_2 = (BEFC) & ; \\ \mathcal{A}_3 &= (CFGH) & ; & \quad \mathcal{A}_4 = (CHKJ) & ; & \end{aligned}$$

on a démontré que :

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_3$$

et,  $I$  étant le milieu du segment  $[AE]$  :  $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

ou encore :  $\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$

c'est-à-dire :  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\mathcal{A}(ABCD) - \mathcal{A}(JCHK) = \mathcal{A}(IEGK)$$

L'aire du rectangle  $ABCD$  est la même que l'aire du "gnomon"  $IEGHCJ$ .

On peut remarquer aussi que si  $AB = a$  et  $AD = b$ , on a

$$IE = \frac{1}{2}(a + b) \quad \text{et} \quad JC = \frac{1}{2}(a - b)$$

En langage algébrique cette égalité s'exprime par:

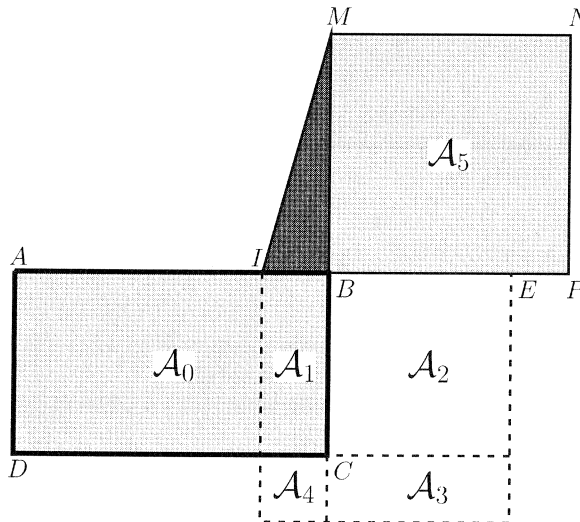
"le produit de deux nombres est égal au carré de leur demi-somme moins le carré de leur demi-différence"

### Exercice 11bis Proposition 14 du Livre II

On cherche un carré dont l'aire est la même que celle d'un rectangle  $ABCD$  donné.

#### Solution :

On prolonge le côté  $[AB]$  d'un segment  $[BE]$  égal à  $BC$ ; on appelle  $I$  le milieu du segment  $[AE]$ .



Le demi-cercle de centre  $I$  et de rayon  $IE$  extérieur au rectangle coupe  $(BC)$  en  $M$ : le carré de côté  $BM$  est le carré cherché.

On sait que  $IBM$  est un triangle rectangle donc (propriété de Pythagore):

l'aire  $\mathcal{A}$  du carré construit sur  $IM$  est égal à l'aire  $\mathcal{A}_5$  du carré construit sur  $BM$  plus l'aire  $\mathcal{A}_1$  du carré construit sur  $IB$ .

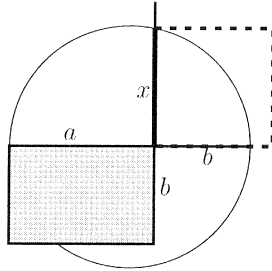
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}_5 + \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 + \mathcal{A}_4 \\ \text{donc en simplifiant :} \quad \mathcal{A}_5 &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3. \\ \text{D'après (11) l'aire du rectangle est} \quad \mathcal{A}_0 &= \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \end{aligned}$$

Ce qui démontre que :

$$\mathcal{A}(ABCD) = \mathcal{A}(BMNP)$$

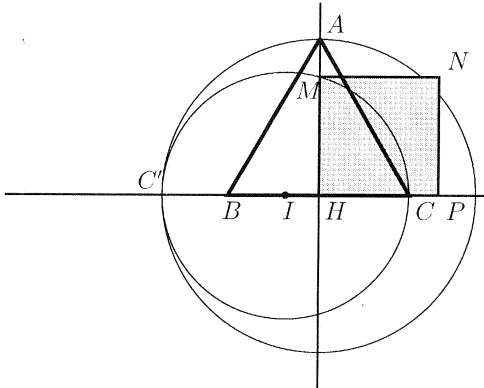
On remarque que, dans le triangle  $MBI$ ,  $BM^2$  est le produit  $a \times b$ ,  $IB$  est la demi-différence  $\frac{1}{2}(a - b)$  et l'hypoténuse  $IM$  est la demi-somme  $\frac{1}{2}(a + b)$ .

On obtient ainsi un procédé de construction de la moyenne géométrique de deux longueurs. ( $x^2 = a \cdot b$ ).



Méthode 3 :

Construction géométrique effective du carré d'aire équivalente au triangle équilatéral



Ici:  $HC' = HA$

Le point  $I$  est le milieu du segment  $CC'$ .

Le cercle de centre  $I$  et de diamètre  $CC'$  coupe  $(HA)$  en  $M$  donc

$$HM^2 = HA \times HC$$

et le carré de côté  $HM$  a la même aire que le triangle équilatéral  $ABC$ .



# HARMONIQUE,

MOYENNE, DIVISION, FAISCEAU ET LA SUITE. . .

Henry PLANE

IREM de PARIS

## Avis au lecteur

Celui qui espère trouver ici un cours avec des démonstrations et un enchaînement logique est invité à passer ces pages. Peut-être la bibliographie lui donnera-t-elle des pistes, mais pour le reste ce petit exposé ne veut que montrer combien cette notion a de liens avec maintes propriétés mathématiques, riches en prolongements, qui ont été très exploitées en leur temps.

Commençons par le début. Au Moyen-âge une des quatre parties du quadrivium, la musique, enseignait que, si une corde fixée en  $O$  et en  $A$  donnait en vibrant un son, par exemple “ $ut_n$ ”, et si on la pinçait en son milieu  $B$ , on avait alors un son plus aigu d’un octave “ $ut_{n+1}$ ”.

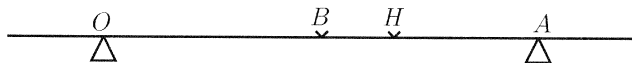


figure 1

Enfin, si on pinçait en  $H$ , au tiers de  $BA$ , on avait un autre son en accord, le “ $sol$ ” entre les deux.

Pour une oreille bercée de grec il y avait : “*harmonia*”.

$OH$  était la moyenne harmonique entre  $OA$  et  $OB$ . On avait

$$\frac{BH}{OB} = \frac{AH}{OA}$$

Plus généralement  $h$  est moyenne harmonique de  $a$  et  $b$  si :

$$\frac{h-a}{a} = \frac{b-h}{b} \quad \text{ou encore} \quad \frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

à moins que la fréquence  $\frac{1}{h}$  ne soit la moyenne arithmétique des fréquences  $\frac{1}{a}$  et  $\frac{1}{b}$  . . .

Plus tard - au  $XVII^{me}$  siècle - cette notion débordera la musique (relire MERSENNE). Le géomètre disait que  $O$  et  $H$  divisaient pareillement le segment  $AB$  car

$$\frac{HA}{HB} = \frac{OA}{OB}$$

Certes il fallait préciser. Un des points,  $H$ , était entre  $A$  et  $B$  et l'autre sur le prolongement. Il y avait "cas de figure" mais la notion était intéressante. Elle devient scolaire. Enfin l'arrivée des segments orientés avec les mesures algébriques ou relatives facilitera le travail - fin 19<sup>e</sup> siècle -.

On avait  $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -\frac{\overline{HA}}{\overline{HB}}$  Rapports opposés.

Tout cours de seconde avait un chapitre "*Division harmonique*" (seuvent excellente révision en début d'année).

On dit que des points  $C$  et  $D$  divisent harmoniquement  $AB$  si  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ .

Mais alors  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$  et  $A$  et  $B$  divisent harmoniquement  $CD$ .

$$\left( (A, B; C, D) \text{ forment une } \underline{\text{division harmonique}} \right) \iff \left( \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1 \right)$$

L'usage engendrera une foule de formules d'autant que le physicien s'en sert, en particulier en optique. Celles-ci sont de divers types: les unes (I) ignorent le rapport  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ , d'autres en usent (II)  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -k$ , d'autres enfin (III) font appel à  $l = \overline{AB}$ .

Regroupons les: soit  $I$  et  $J$  les milieux de  $AB$  et  $CD$ .





$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \quad \overline{AI} = \overline{IB} \quad \overline{CJ} = \overline{JD}$
<p>(I) <math>\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} \quad \frac{2}{\overline{CD}} = \frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CB}}</math> Formules de DESCARTES</p>
<p><math>IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID} \quad JC^2 = JD^2 = \overline{JA} \cdot \overline{JB}</math> Formules de NEWTON</p>
<p>avec les abscisses <math>2(ab + cd) = (a + b)(c + d)</math> Formule de MERSENNE</p>
<p><math>AB^2 + CD^2 = 4.IJ^2 \quad \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \overline{AJ} \cdot \overline{AB} \quad \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{BC}} + \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{BD}} = 0</math></p>
<p>(II) <math>\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -k \quad \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k.</math></p>
<p><math>\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{k-1}{k+1} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} \quad \frac{\overline{JA}}{\overline{JB}} = k^2 \quad \frac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2</math></p>
<p>(III) <math>\overline{AB} = l</math></p>
<p><math>\overline{AC} = \frac{kl}{1+k}, \quad \overline{AD} = \frac{kl}{k-1}, \quad \overline{BC} = \frac{-l}{1+k}, \quad \overline{BD} = \frac{l}{k-1}, \quad \overline{CD} = \frac{2kl}{k^2-1}.</math></p>

**Mais où trouve-t-on des divisions harmoniques (“dhq”)?**

**Dans un trapèze.**

$AB$  est parallèle à  $CD$  de milieux respectifs  $M$  et  $N$ ,  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $P$ ,  $(AC)$  et  $(BD)$  en  $O$ ,  $(M, N; O, P)$  est une “dhq”.

Il s’en suit que:

- la construction du conjugué harmonique  $P$  de  $O$  par rapport à  $M$  et  $N$  si on sait tracer deux parallèles.

- si  $AB = CD$  le trapèze devient un rectangle,  $O$  est le milieu de  $[MN]$ , et  $P \dots$ ?

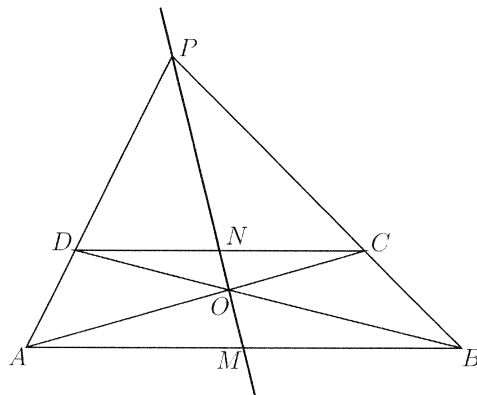


figure 2

On a alors une première rencontre avec le point à l’infini sur  $(MN)$  et  $k = 1$  (on avait oublié la condition  $k \neq 1$  dans ce qui précède! ...)

### Dans un triangle.

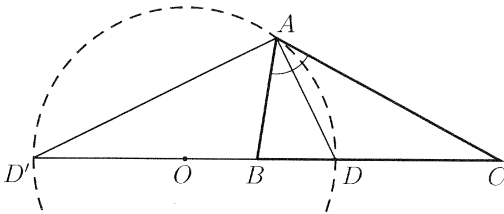


figure 3

Si  $AD$  et  $AD'$  sont les bissectrices de  $\widehat{BAC}$ ,

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC} = -\frac{\overline{D'B}}{\overline{D'C}}$$

$(B, C; D, D')$  est une "dhq".

Notons que  $\widehat{DAD'}$  est droit et que grâce au cercle de diamètre  $[DD']$ , de centre  $O$ :

$$OA^2 = OD^2 = \overline{OB} \cdot \overline{OC}.$$

Et puisque nous parlons cercle et division harmonique, considérons une division harmonique  $(A, B; C, D)$  avec les cercles de diamètres  $AB$  et  $CD$ .

Ils se coupent en  $T$ .

L'arsenal de formules donne

$$AB^2 + CD^2 = 4IJ^2$$

or  $IT^2 = \frac{1}{4}AB^2$  et  $JT^2 = \frac{1}{4}CD^2$

donc  $IT^2 + JT^2 = IJ^2$ .

Et  $\widehat{ITJ}$  est droit. Les droites  $(IT)$  et  $(IJ)$  sont tangentes aux cercles.

Ceux-ci sont "orthogonaux".

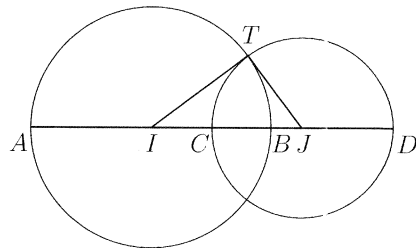


figure 4

On montrera que tout diamètre de l'un est divisé harmoniquement par l'autre. Ce qui est une propriété caractéristique des "cercles orthogonaux".

### Un peu d'algèbre.

Sur un axe, soient deux points fixes  $A(a)$  et  $B(b)$  ainsi que  $M(x)$  variable et son conjugué harmonique  $P(y)$  par rapport à  $A$  et  $B$ .

On a  $(a+b)(x+y) = 2(ab+xy)$ , c'est à dire qu'il existe une relation du premier degré entre la somme  $s = (x+y)$  et le produit  $p = xy$  de ces deux abscisses  $p = \alpha s + \beta$ .

Les amateurs de l'équation du second degré  $z^2 - sz + p = 0$ , mordus de "t'inômité", ne cessaient d'alimenter leurs problèmes à cette source, sur le couple  $MP$  réel ou imaginaire, distinct ou confondu.

## Un premier prolongement : les faisceaux harmoniques

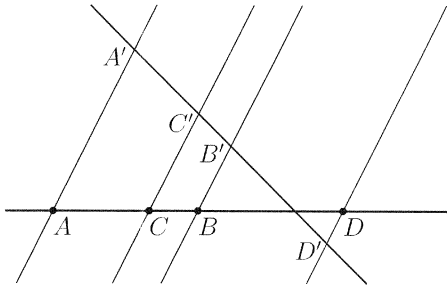


figure 5

Si par quatre points en “dhq” passent quatre droites parallèles, celles-ci coupent toute sécante selon une autre “dhq”.

Il en sera de même si les quatre droites sont concourantes. Soient la “dhq”  $(A, B; C, D)$  et le faisceau issu de  $O$ .

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

La parallèle à  $OA$  issue de  $B$  est coupée par le faisceau en  $c$  et  $d$ .

On a

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{dB}} \quad \text{et} \quad -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{Bc}}$$

(triangles homothétiques).

On obtient  $dB = Bc$ .

On en déduit, sur la parallèle en  $B'$ , que  $d'B' = B'c'$  et par suite

$$\frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = -\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$$

$(A', B'; C', D')$  est une “dhq”.

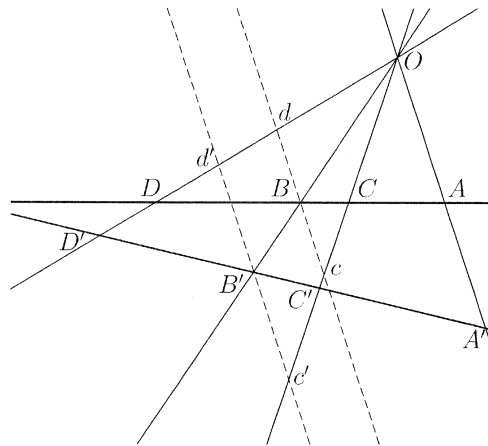


figure 6

### Remarque

Les rapports  $\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$  et  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$  ne sont égaux que si le faisceau est de quatre droites parallèles ou si les sécantes le sont.

On retrouve avec  $B$  milieu de  $CD$  une “dhq” avec le point à l’infini sur  $(OA)$ .

Ce faisceau des quatre droites est dit harmonique: “fhq”, s’il coupe toute sécante selon une “dhq”.

### Exemple de "faisceaux harmoniques"

- Dans un triangle, les bissectrices  $(AD)$  et  $(AD')$  forment un "fhq" avec les côtés  $(AB)$  et  $(AC)$ .

- Dans un triangle, la médiane  $(AM)$  et la parallèle  $(Am)$  à  $(BC)$  forment un autre "fhq" avec les côtés  $(AB)$  et  $(AC)$ .

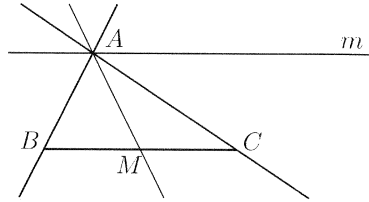


figure 7

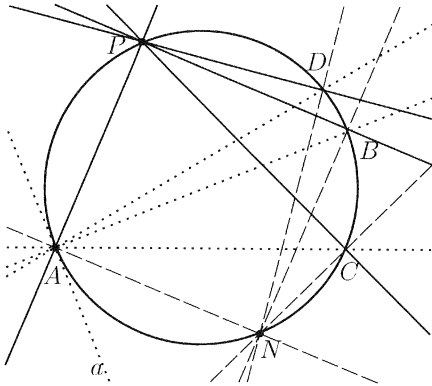


figure 8

Soit un cercle passant par le sommet  $P$  d'un "fhq" et coupant les rayons en  $A, B, C, D$ .

Tout autre point  $N$  du cercle forme un faisceau  $(NA, NB; NC, ND)$  qui est harmonique (angles inscrits égaux).

Le cas d'une tangente est intéressant  $(Aa, AB; AC, AD)$ .

### Une figure-clef

Soit un quadrilatère  $ABB'A'$  que l'on complète.

-  $(AB)$  et  $(A'B')$  se coupent en  $C$ ,

-  $(AA')$  et  $(BB')$  en  $O$ .

On place  $D$  et  $D'$  tels que  $(A, B; C, D)$  et  $(A', B'; C, D')$  soient des "dhq".

$(OA, OB; OC, OD)$  est un "fhq" qui coupe  $(A'B')$  en  $D'$  du fait de l'unicité du conjugué de  $C$  par rapport à  $A'$  et  $B'$ .

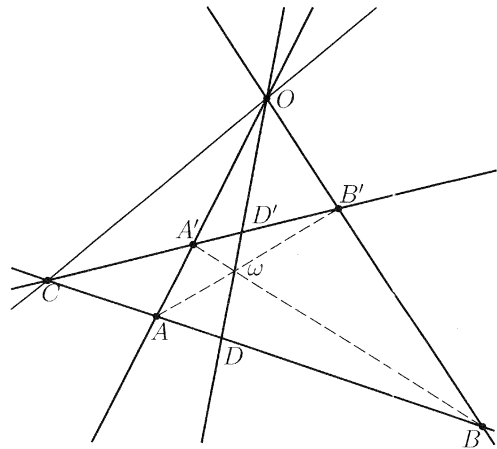


figure 9

Traçons  $(A'B)$  et  $(A'B')$  qui se coupent en  $\omega$ .  $(\omega A, \omega B; \omega C, \omega D)$  est un "fhq" qui coupe  $(A'B')$  en  $D'$  donc  $O, \omega, D, D'$  sont colinéaires.

Cette figure généralise celle du trapèze où  $(AB) \parallel (A'B')$ .

On peut la lire de moutt façons.

«Construction à la règle seule du conjugué harmonique D de C par rapport à A et B.»

«Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.»

«Si deux “dhq” ont un point commun, les droites joignant les deux points homologues sont concourantes (ou parallèles : point à l’infini . . .)»

«Si deux “fhq” ont un rayon commun, les autres rayons homologues se coupent en des points alignés.»

## Quelques figures sur ce thème

### MÉNÉLAÛS et CÉVA indissociables . . .

Si  $M, N, P$  sont sur les côtés  $(BC), (CA), (AB)$  du triangle  $ABC$

$$(M, N, P \text{ sont alignés}) \iff \left( \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \right)$$

Si  $M', N, P$  sont sur les côtés  $(BC), (CA), (AB)$  du triangle  $ABC$

$$(AM', BN, CP \text{ sont parallèles ou concourantes}) \iff \left( \frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1 \right)$$

— et si  $(M, M'; B, C)$  “dhq” on a

$$\frac{\overline{M'B}}{\overline{M'C}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1$$

alors  $(AM'), (BN), (CP)$  se coupent en  $K$ ,

— et le conjugué  $N'$  de  $N$  par rapport à  $A$  et  $C$  est sur  $(PM')$ ,

— et avec  $(P, P'; A, B)$  “dhq” alors  $(AM'), (BN'), (CP')$  concourantes,

et les divisions harmoniques  $(B, C; M, M')$  et  $(A, C; N, N')$  ayant  $C$  commun, les droites  $(BA), (M'N)$  et  $(MN')$  sont concourantes,

— et cætera . . .

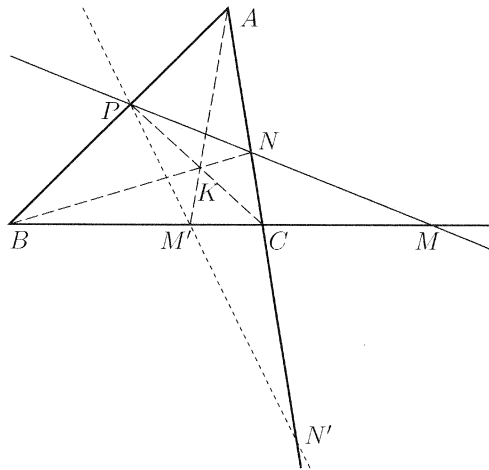


figure 10

### Moins classique

Dans le triangle  $ABC$ , soient  $BD$  et  $BD'$  bissectrices de  $\widehat{ABC}$ ,  $M$  milieu de  $[AB]$  et  $(Cm) \parallel (AB)$ .

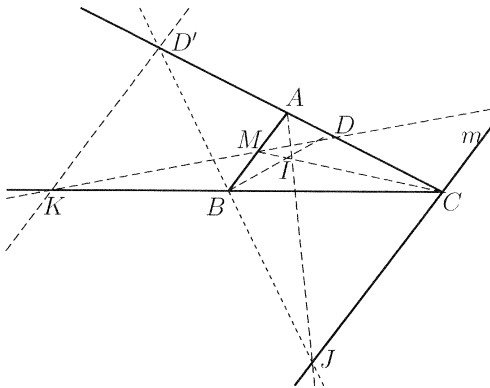


figure 11

$(BA, BC; BD, BD')$  est un "fhq"

$(A, C; D, D')$  est "dhq"

$(CA, CB; CM, Cm)$  est un "fhq"

$(A, B; M, m)$  est "dhq"

$(BC)$  est rayon commun,

-  $(BA)$  et  $(CA)$  se coupent en  $A$ ,

-  $(BD)$  et  $(CM)$  se coupent en  $I$ ,

-  $(BD')$  et  $(Cm)$  se coupent en  $J$  :

$A, I$  et  $J$  sont alignés.

$A$  est point commun,

$(BC)$ ,  $(DM)$  et  $(D'n)$  ont le

point  $K$  en commun.

Il y a d'autres alignements et d'autres points communs ...

Et puis, pour les tenants de la géométrie analytique, les pentes des droites d'un "fhq" vérifient une "dhq".

On coupe les droites  $y_i = mx_i$  par la droite  $x = 1$  et on a :

$$(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) = 2(m_1.m_2 + m_3.m_4)$$

ou toute autre relation caractéristique.

### Étude de lieux géométriques : autres prolongements

Soient un point  $P$  fixe, une droite  $(D)$  mobile passant par  $P$  et qui coupe deux droites fixes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  en  $A$  et  $B$ .

Quel est le lieu géométrique (l'ensemble) des points  $M$  conjugués harmoniques de  $P$  par rapport à  $A$  et  $B$  ?

Apparaît alors le quatrième rayon du faisceau harmonique défini par  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $OP$  et donc  $OM$ .

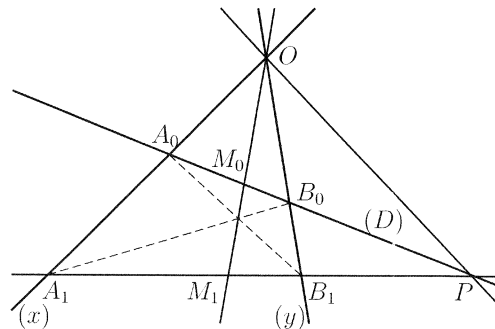


figure 12

Sa construction est connue. Elle a nom : Polaire de  $P$  par rapport à  $Ox$  et  $Oy$ . Tout point de  $(OM)$  a pour polaire  $(OP)$ .

Remplaçons le couple de deux droites par un cercle  $\gamma$

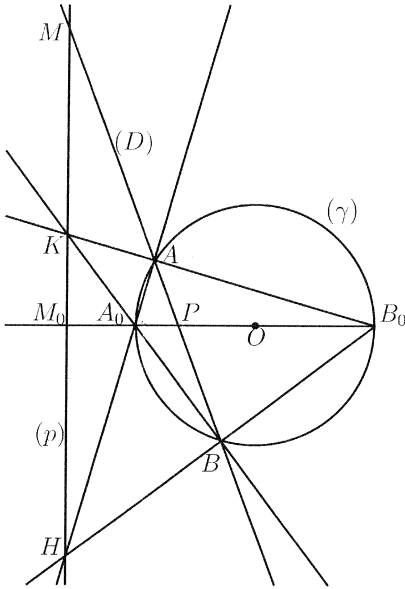


figure 13

La droite  $(D)$ , qui contient  $P$ , rencontre  $(\gamma)$  en  $A$  et  $B$ . Étudions l'ensemble des conjugués  $M$  de  $P$  par rapport à  $A$  et  $B$ .

Le diamètre passant par  $P$  rencontre  $(\gamma)$  en  $A_0$  et  $B_0$ .

$(A_0A)$  et  $(B_0B)$  se coupent en  $H$ ;  $(A_0B)$  et  $(AB_0)$  se coupent en  $K$ . On reconnaît en  $(HK)$  la polaire de  $P$  par rapport à  $(HA)$  et  $(HB)$  mais  $(HK)$  est la troisième hauteur du triangle  $HA_0B_0$  donc est orthogonale à  $A_0B_0$  en  $M_0$  conjugué de  $P$  par rapport à  $A_0$  et  $B_0$  donc ne dépend pas de la position de  $(D)$ .

C'est la polaire  $(p)$  de  $P$  par rapport au cercle  $\gamma$ .

$P$  est dit le pôle de  $(p)$

**Remarque**

- Lorsque  $P$  est extérieur à  $(\gamma)$ , l'ensemble est limité à la corde intérieure à  $(\gamma)$ , limitée par les points de contact des tangentes issues de  $P$  à  $(\gamma)$ .

- La polaire d'un point de  $(p)$  passe par  $P$  (réciprocité).

- La transformation qui à  $P$ , point, associe  $(p)$ , droite, est un prolongement nouveau. Ainsi à un triangle défini par trois sommets  $A, B, C$ , elle associe le triangle défini par trois droites  $(a), (b), (c)$  polaires de ces points

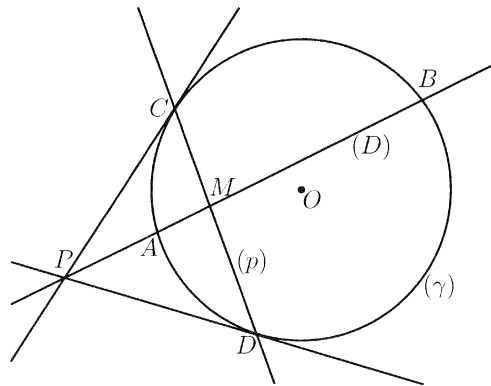


figure 14

- On peut remplacer  $(\gamma)$  par une conique (le couple  $Ox, Oy$  en était déjà une, dégénérée) la notion pôle et polaire demeure (projections).

On ne se limitera pas à la géométrie plane. On peut étudier un faisceau de quatre plans ayant une droite commune et coupant une sécante selon une division harmonique : faisceau harmoniques de plans.

### Une dernière figure harmonique?

Introduisons-la par un détour.

Soit sur une droite  $(\Delta)$  une "dhq"  $(A, B; C, D)$ ;

on a  $\overline{CA} \cdot \overline{DB} = -\overline{CB} \cdot \overline{DA}$  ( $\rho$ ).

Considérons une inversion de centre  $O$ . La droite  $(\Delta)$  devient un cercle passant par  $O$  qui comporte les points  $a, b, c, d$  inverses de  $A, B, C, D$ .

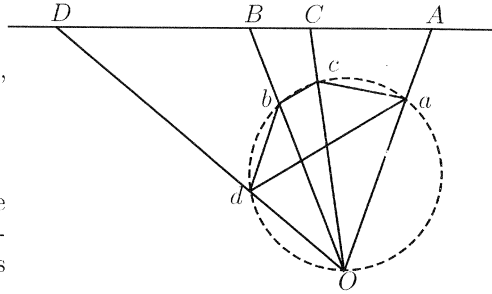


figure 15

La relation concernant la transformation des longueurs donne  $ac = \frac{AC}{OA \cdot OC} k$   $k$  étant le rapport d'inversion (relation entre longueurs).

Après simplification la relation ( $\rho$ ) donne  $ca \cdot db = cb \cdot da$ .

Le quadrilatère  $a, b, c, d$  étant inscrit, la relation de PTOLÉMÉE s'applique et l'on obtient

$$ac \cdot bd = bc \cdot ad = \frac{1}{2} ab \cdot cd$$

- Par ailleurs  $(OA, OB; OC, OD)$  est un "flq" donc pour tout point  $P$  du cercle,  $(P_a, P_b; P_c, P_d)$  est un "flq" et détermine une "dhq" sur toute sécante.

- Un tel quadrilatère est dit quadrilatère harmonique.

- On démontre que les tangentes aux extrémités d'une diagonale, d'un quadrilatère harmonique se recoupent sur l'autre diagonale.

- Ces propriétés ne sont pas sans réciproques et liens avec les précédentes.

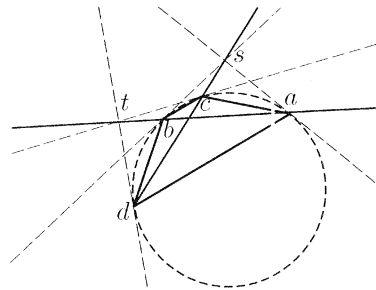


figure 16

D'une toute autre nature est le prolongement qui suit et qui par certains points est une généralisation.



## Généralisation.

On a une division harmonique lorsque  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$ , mais, quatre points étant pris sur une droite, la même expression  $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$  a une valeur  $\rho$ . On écrit  $(A, B, C, D) = \rho$

Il en est de même pour quatre nombres (abscisses), on peut considérer la valeur  $\rho$  de  $\frac{a-c}{b-c} \div \frac{a-d}{b-d}$ . On écrit  $(a, b, c, d) = \rho$ .

Un nom lui a été donné, d'abord "rapport anharmonique", puis plus simplement "birapport" de quatre points alignés ou de quatre nombres.  $\rho = -1$  est un cas particulier.

$\mathcal{N}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$
$\mathcal{I}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{M}$
$\mathcal{U}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{M}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{I}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{W}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{U}$
$\mathcal{W}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{M}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{I}$	$\mathcal{N}$

L'ordre des points importe. Avec 4 points il y a 24 combinaisons ( $4! = 24$ ), mais  $\rho$  ne prend pas 24 valeurs mais seulement 6 valeurs liées. On constate que :

- si on permute deux termes **et** les deux autres :  $\rho$  demeure. On notera  $\mathcal{N}$  cette opération.
- si on permute les deux premiers **ou** les deux derniers :  $\rho$  devient  $\frac{1}{\rho}$ . On notera  $\mathcal{I}$  cette opération.
- si on permute 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> termes **ou** 1<sup>er</sup> et 4<sup>e</sup> termes :  $\rho$  devient  $1 - \rho$ . On notera  $\mathcal{U}$  cette opération.

Ces trois opérations engendrent les trois autres (notées  $\mathcal{M}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ ).

On a ainsi un groupe (non commutatif) dont on dresse la table.

Ainsi on passe de  $(abcd)$  à  $(bacd)$  par  $\mathcal{I}$ , puis à  $(bcad)$  par  $\mathcal{U}$  et à  $(bcda)$  par  $\mathcal{I}$  à nouveau. C'est l'opération produit notée  $\mathcal{W}$ .

Ci-joint la table de composition des opérations et celle des valeurs correspondantes du birapport obtenu (ligne du

$\rho$	$\frac{1}{\rho}$	$1 - \rho$	$\frac{\rho - 1}{\rho}$	$\frac{1}{1 - \rho}$	$\frac{\rho}{\rho - 1}$
$\frac{1}{\rho}$	$\rho$	$\frac{1}{1 - \rho}$	$\frac{\rho}{\rho - 1}$	$1 - \rho$	$\frac{\rho - 1}{\rho}$
$1 - \rho$	$\frac{\rho - 1}{\rho}$	$\rho$	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{\rho}{\rho - 1}$	$\frac{1}{1 - \rho}$
$\frac{\rho - 1}{\rho}$	$1 - \rho$	$\frac{\rho}{\rho - 1}$	$\frac{1}{1 - \rho}$	$\rho$	$\frac{1}{\rho}$
$\frac{1}{1 - \rho}$	$\frac{\rho}{\rho - 1}$	$\frac{1}{\rho}$	$\rho$	$\frac{\rho - 1}{\rho}$	$1 - \rho$
$\frac{\rho}{\rho - 1}$	$\frac{1}{1 - \rho}$	$\frac{\rho - 1}{\rho}$	$1 - \rho$	$\frac{1}{\rho}$	$\rho$

haut suivie de la colonne de gauche).

Ce travail eut son heure de succès au temps des "math modernes".

### Birapport d'un faisceau de droites

A côté du birapport de quatre points, il y a celui d'un faisceau de quatre droites (parallèles ou concourantes). En effet si le faisceau  $(Ox, Oy, Oz, Ot)$  coupe une droite  $(\Delta)$  en  $ABCD$  et que l'on mène par  $C$  la parallèle à  $Ot$  coupant  $Ox$  en  $A_1$  et  $Oy$  en  $B_1$ , on a :

$$\rho = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{DA}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{DO}} \cdot \frac{\overline{DO}}{\overline{CB_1}} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB_1}}$$

$\rho$  est défini par le seul faisceau.

Si on envisage une autre sécante  $(\Delta')$ , une même construction et un même calcul conduisent à  $\rho' = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} \div \frac{\overline{D'A'}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{C'A'_1}}{\overline{C'B'_1}}$

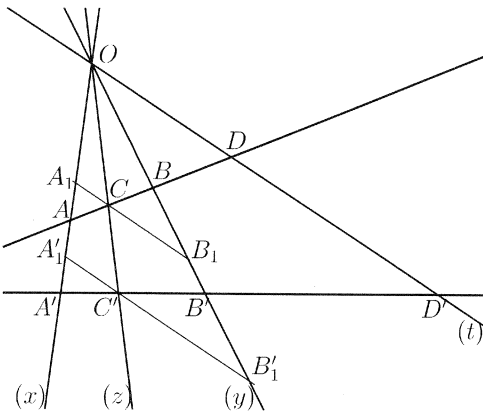


figure 17

Mais l'homothétie de centre  $O$  implique  $\rho = \rho'$ .

Donc "un faisceau de quatre droites définit sur toute sécante le même birapport". (Sur les parallèles à un des rayons on peut envisager le birapport avec point à l'infini...)

On généralisera alors deux propriétés importantes obtenues en harmonicité ( $\rho = -1$ ).

"Si deux birapports de quatre points sont égaux et ont un point commun alors les droites joignant les points homologues sont concourantes".

En effet si  $\rho$  est connu, il n'y a qu'un point  $D$  tel que  $(A, B, C, D) = \rho$  sur la droite  $(ABC)$ .

"Si deux faisceaux de quatre droites ont même birapport et un rayon commun, les points d'intersection de rayons homologues sont alignés".

Cela repose aussi sur l'unicité et fournit une extension à la propriété dégagée dans le cas particulier de l'harmonicité.

Nous arrêtons là ces rappels autour du sujet évoqué et nous terminons par une démonstration d'un troisième théorème célèbre : l'hexagone de PASCAL.

## L'hexagone de PASCAL

Soient six points sur un cercle (ce pourrait être une conique)  $A, B, C, D, E, F$ . Les faisceaux  $(AB, AD, AE, AF)$  et  $(CB, CD, CE, CF)$  sont superposables (angles inscrits), ils ont donc même birapport et coupent toute sécante en quadruplets de même birapport.

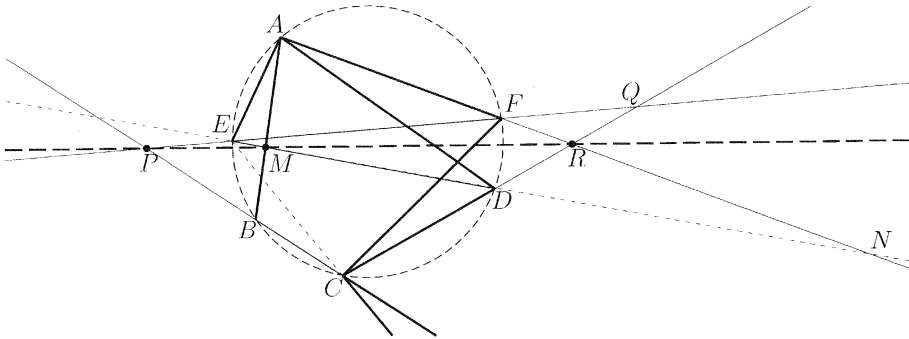


figure 18

Le premier faisceau coupe  $(DE)$  en  $M, D, E, N$ .

Le second faisceau coupe  $(EF)$  en  $P, Q, E, F$ .

Ces deux quadruplets de même birapport ont le point  $E$  en commun ; par suite les droites joignant les points homologues  $(MP)$ ,  $(DQ)$  et  $(FN)$  se coupent en un même point  $R$ .

Les points  $M, R$  et  $P$  sont donc alignés.

$M$  est l'intersection de  $(AB)$  et  $(DE)$ ,

$P$  est l'intersection de  $(BC)$  et  $(EF)$ ,

$R$  est l'intersection de  $(CD)$  et  $(FA)$ .

**Dans un hexagone inscrit les côtés opposés se coupent en des points alignés (certains de ces points pouvant être rejetés à l'infini) .**

## Bibliographie

Les notions relatées ici n'ont pris place qu'assez tardivement dans l'enseignement. On pourra consulter :

*Pour la division harmonique :*

- [1] COMBETTE - 1887 - *Cours de géométrie élémentaire.*
- [2] NIEVENGLOWSKI et GÉRARD - 1918 - *Leçons de géométrie élémentaire.*
- [3] BOUASSE - 1920 - *Mathématiques générales.*
- [4] DELTHEIL et CAIRE - 1950 - *Géométrie, classe de mathématiques ;*  
ré-édité chez GABAY .
- [5] MAILLARD et MILLET - 1951 - *Géométrie, classe de mathématiques.*
- [6] LEBOSSE et HÉMERY - 1963 - *Géométrie, classe de mathématiques ;*  
ré-édité chez GABAY.
- [7] COMMEAU - 1967 - *Géométrie, Terminale C.*

*Pour le birapport :*

- [8] DELTHEIL et CAIRE -1951 - *Compléments de géométrie ;*  
ré-édité chez GABAY
- [9] LEHMANN et BKOUCHE - 1980 - *Initiation à la géométrie.* - P.U.F.

# TRANSFORMATIONS ET SYSTÈMES ARTICULÉS

## MODÉLISATION À L'AIDE DU LOGICIEL CABRI-GÉOMÈTRE

Freddy BONAFÉ et Marie-Claire COMBES

IREM de MONTPELLIER

### Préambule

A la fin de leur scolarité au collège, dans l'ensemble, les élèves savent construire les images des principales figures planes par les transformations qu'ils ont successivement étudiées. Ils semblent beaucoup plus démunis lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes nécessitant l'intervention des transformations.

Que constate-t-on ? L'univers des transformations leur est familier, ils ont une perception globale de la régularité de certaines figures, de la réduction ou de l'agrandissement, mais ils ne parviennent pas, en général, à faire de ces transformations des outils permettant d'explorer les figures. Il faut pour cela qu'ils reconnaissent des points **homologues**, des points **invariants**. Ils ont besoin de considérer certains points comme intersections de deux **figures géométriques**. Ils sont conduits à utiliser les **propriétés d'invariance** des transformations. Ces différentes tâches sont loin d'être sans difficulté pour un élève. Elles renvoient souvent aux divers mouvements associés aux transformations et au delà de ces mouvements aux correspondances entre un état initial et un état final.

Nous pensons que l'apprentissage reçu, souvent coupé du mouvement qui accompagne les transformations, ne facilite pas leur mise en œuvre. Pour obtenir l'image d'un polygone par une des transformations étudiées au collège, l'élève construit les images des différents sommets et les relie ensuite. A-t-il conscience qu'à chaque point de la figure initiale correspond un point homologue par la transformation qu'il vient d'étudier ? A-t-il conscience qu'au mouvement d'un point sur la figure initiale correspond un mouvement du point homologue par la transformation qu'il vient d'étudier sur la figure image ?

Nous proposons de montrer comment un logiciel comme Cabri-géomètre peut apporter une aide à la découverte et à la compréhension de ces différentes notions.

Le mouvement qui est au cœur de ce logiciel, permet de modéliser des systèmes articulés qui vont à partir d'une figure donnée engendrer son image, point par point, par la transformation souhaitée.

La rapidité du travail d'exploration permet de diversifier les systèmes étudiés et de centrer l'étude sur les différentes notions mentionnées plus haut.

## Les systèmes articulés

Dès la fin du  $XVI^{me}$  siècle, le pantographe permettait de construire de façon dynamique l'image d'une courbe par une homothétie. Plus tard, les géomètres anglais HART, KEMPE, SYLVESTER, WATT, le mécanicien français PEAUCELLIER, et bien d'autres ont proposé des systèmes articulés capables de réaliser des mouvements rectilignes ou de servir de transformateurs.

LEBESGUE dans ses "Leçons sur les constructions géométriques" (1950) propose une étude des systèmes articulés ne faisant pas intervenir de glissières et développe l'utilisation de ces systèmes comme transformateurs.

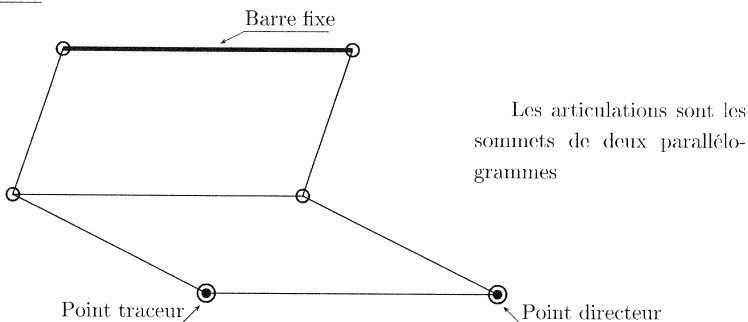
Précisons la notion de système articulé comme transformateur.

Un tel système est constitué de barres rigides de longueurs fixes situées dans un même plan. Ces barres sont reliées entre elles, soit par des articulations, soit par des glissières. Le système est rendu solidaire au plan de la feuille par un point fixe ou une barre fixe. Le système admet un point directeur qui va décrire une trajectoire et un point traceur qui va tracer l'image de cette trajectoire.

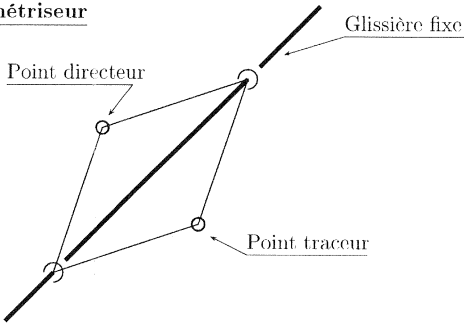
"Le Plot matériel" édité en 1983 par la régionale de l'APMEP de l'Académie d'Orléans-Tours présente un grand choix de transformateurs.

Les exemples ci-dessous montrent un translateur, un symétriseur et un pantographe (au sujet de la modélisation sur CABRI-GÉOMÈTRE, un article de Marie-Claire COMBES paraîtra fin 1999 dans la brochure Inter-IREM premier cycle consacrée au cycle central).

### Translateur

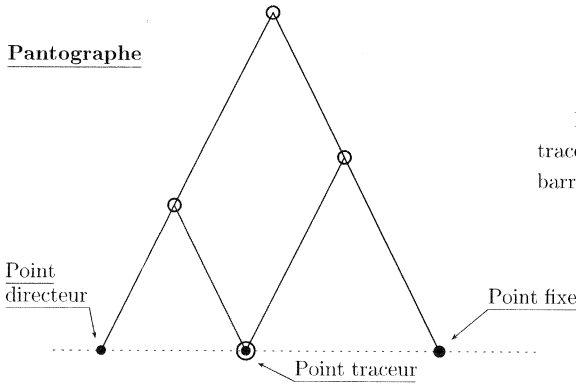


Symétriseur



Les articulations sont les sommets d'un losange

Pantographe

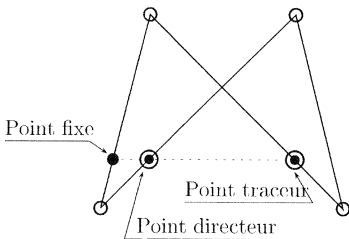


Les points fixe, directeur, traceur sont alignés et les barres deux à deux parallèles

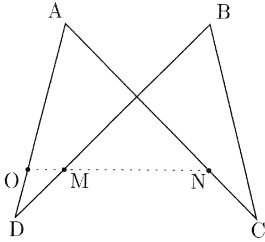
On peut imaginer de nombreux autres systèmes en combinant les trois précédents.

Il en existe d'autres, souvent basés sur le contre-parallélogramme, comme celui de HART ci-dessous.

Machine de HART



Les barres sans articulation commune ont des longueurs égales. Les points fixe, directeur, traceur sont sur une parallèle aux droites définies par les articulations.



En posant  $AD = BC = a$  et  $AC = BD = b$ ,  
on a  $\frac{OM}{AB} = \frac{DO}{a}$  et  $\frac{ON}{DC} = \frac{AO}{a}$  donc

$$OM \times ON = \frac{AB \times DO \times DC \times AO}{a^2}$$

Le produit  $DO \times AO$  est fixe puisque  $O$  est fixé sur la barre  $AD$ , et le produit  $AB \times DC = b^2 - a^2$ .  
En effet,  $ABCD$  est un trapèze isocèle donc inscriptible dans un cercle :

la propriété de PTOLÉMÉE donne :

$$AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$$

Ainsi  $OM \times ON$  est fixe et ce transformateur est associé à une inversion.

## Présentation d'une séquence : la translation en 4<sup>me</sup>

### Objectifs

Les objectifs poursuivis sont de natures différentes. Tout d'abord ceux qui sont propres à la transformation étudiée et qui motivent le travail :

- découvrir un algorithme de construction de l'image d'un point,
- découvrir les propriétés de la translation,
- réinvestir ces propriétés.

D'autres, relèvent de l'usage des transformations dans un cadre plus général :

- découvrir les notions de points images, antécédents, homologues, invariants,
- sensibiliser grâce au mouvement, à la notion d'ensemble de points.

Enfin, c'est l'occasion de développer raisonnement et démarche expérimentale :

- conjecturer, vérifier, dégager des procédés de validation,
- utiliser un contre-exemple, prouver,
- distinguer propriété et réciproque.

### Organisation matérielle

Le dispositif retenu se compose d'un seul ordinateur relié à un vidéo-projecteur. Tous les élèves de la classe sont face à l'écran, ils doivent individuellement compléter des figures fournies ou répondre par écrit à des questions posées. Leurs réponses sont revues après débat dans la classe. Certains, à tour de rôle manipulent l'ordinateur. L'enseignant met à la disposition de la classe une maquette de translateur.

### Déroulement de la séquence (six séances d'une heure)

#### Séance 1 :

Elle est centrée sur "homologues", "points invariants", "algorithme de construction".

Afin que les élèves se familiarisent avec ces notions, le dispositif et le travail



attendu, la première partie concerne la symétrie centrale étudiée dans la classe précédente.

Après avoir présenté la maquette d'un symétriseur central et sa modélisation à l'écran, on donne à chaque élève une représentation de ce symétriseur et une figure composée de deux quadrilatères homologues dans cette transformation.

Ils doivent découvrir et rechercher des points homologues à l'écran et les reproduire sur la feuille fournie. Ils observent ensuite les mouvements respectifs des points homologues et les décrivent sur leur document. Enfin ils doivent rechercher et découvrir le point invariant à l'écran puis le construire sur leur feuille. Cette transformation étant déjà connue d'eux, ils écrivent l'algorithme de construction d'une image et le mettent en œuvre.

La deuxième partie de la séance reprend pour le translateur le même scénario. Elle se termine par la recherche d'un algorithme de construction personnel (conjecture) et sa mise en application (validation).

### Séance 2 :

Elle commence par une mise en commun d'une sélection des productions écrites obtenues lors de la séance 1. L'algorithme de construction de la translation est mis au point et institutionnalisé.

La notion de point invariant est retravaillée à partir du symétriseur et du translateur.

Cette séance s'achève par la construction sur feuille d'images de figures par translation.

### Séances 3, 4 et 5 :

Avec l'introduction des mesures à l'écran, l'essentiel du travail va porter sur la notion d'isométrie et ses conséquences.

Les élèves doivent découvrir les invariants par la translation et les valider par le mouvement.

Pour chacun des invariants dégagés, avant de rechercher une preuve de la propriété entrevue, un nouveau transformateur qui ne la possède pas est montré. Par exemple, le pantographe est montré pour la non conservation des longueurs.

Après justification de cette propriété, le travail est centré sur l'image de certaines figures. Par exemple, la conservation des longueurs étant acquise, les élèves doivent conjecturer ce que sera l'image d'un cercle, le justifier, puis le visualiser à l'écran.

Ce travail se termine par une mise en relation des propriétés dégagées : conservation des longueurs, des angles, de l'alignement.

### Séance 6 :

Elle se déroule sans ordinateur, elle est centrée sur les constructions de figures.

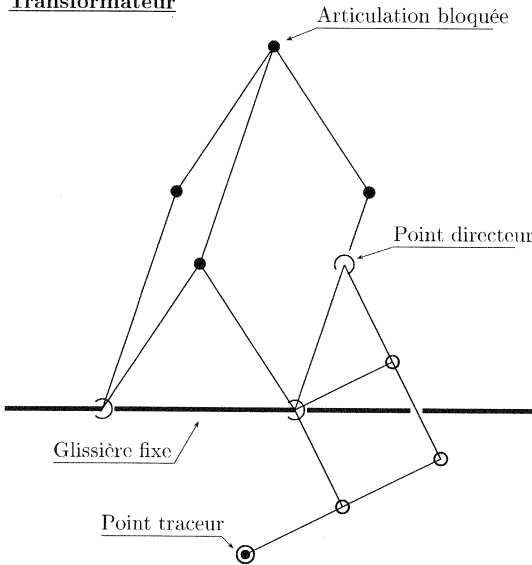
Les élèves doivent utiliser les propriétés de la translation pour construire de façon "économique" les images de figures fournies. Les différentes stratégies sont mises en commun et justifiées.

## Travaux pratiques

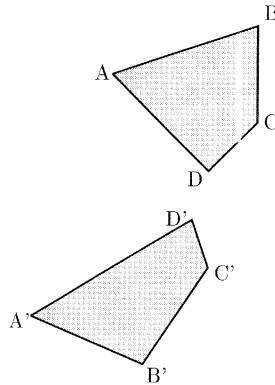
Les participants à l'atelier sont placés dans la situation des élèves pour le déroulement de la séquence à partir du transformateur suivant qui réalise une symétrie oblique.

L'activité consiste à rechercher et étudier les divers invariants de cette transformation.

### Transformateur



Ci-dessous un quadrilatère et son image à l'aide de ce transformateur.



## Bilan

Ce travail a été expérimenté durant les années 1997/1998 et 1998/1999 en cinquième et en quatrième.

Les objectifs donnés plus haut semblent atteints. En particulier les élèves sont passés successivement par les trois phases suivantes :

- une phase d'anticipation lors de l'écriture des conjectures à priori,
- une phase d'expérimentation au cours de l'observation de ce qui se passe à l'écran pour renforcer ou infirmer la conjecture,
- une phase de justification qui permet de réinvestir les différentes propriétés découvertes au fil des séances.

La rapidité du travail d'exploration conduit avec CABRI-GÉOM TRE permet d'exhiber très rapidement un contre-exemple invalidant une conjecture fausse ou un autre transformateur précisant cette conjecture. Ainsi à travers l'étude d'une transformation donnée, c'est la notion générale de transformation qui se construit.

Enfin, la présence d'éléments fixes dans les transformateurs donne davantage de sens à la notion d'invariants, qu'il s'agisse de points ou de propriétés. Cette présence introduit plus naturellement les éléments indispensables à la définition de la transformation étudiée.



# QUELLES RÈGLES POUR LE DÉBAT MATHÉMATIQUE AU COLLÈGE ?

Maryvonne LE BERRE

IREM de LYON

Cet atelier est une reprise de l'atelier mené au colloque d'Orléans, en 1998, sous le titre : un énoncé mathématique peut-il n'être ni vrai ni faux ?

## “Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux”.

Voilà une affirmation que nous avons tous, un jour ou l'autre, renvoyée à nos élèves, par exemple quand, devant des affirmations contradictoires, la classe ne semble pas vouloir s'engager dans un débat.

C'est d'ailleurs comme “règle du débat mathématique” que les auteurs de la brochure «Initiation au raisonnement déductif», publiée en 1989 par l'IREM de Lyon, ont proposé de poser cette affirmation en classe de cinquième.

Pour entrer dans le jeu mathématique, il faut en connaître les règles. Or, très souvent, nous mettons en œuvre des implicites et des présupposés qui sont loin d'être partagés par les élèves. Le travail proposé sur les règles du débat vise à faire surgir, à partir de problèmes choisis pour cela, certains écarts entre des points de vue d'élèves, souvent décrits comme relevant de la logique naturelle, et le point de vue mathématique.

À y regarder de plus près, cependant, le point de vue de la logique mathématique peut parfois éclairer celui des élèves.

Tout d'abord, **qu'est-ce qu'un énoncé mathématique ?**

La question est posée dans la première partie de l'atelier, à partir de l'activité suivante :

**Voici cinq énoncés :**

1. Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.
2.  $3a + 4a = 7a$
3. Un quadrilatère peut avoir exactement trois angles droits.
4. Le carré d'un nombre peut être plus petit que ce nombre.
5.  $3 + 4a \neq 7a$

**Question :** Chacun des cinq énoncés proposés ci-dessus est-il pour vous un énoncé mathématique ? Si ce n'est pas le cas, proposez une modification.

Dans la mise en commun des réponses, apparaissent diverses acceptions du terme :

- un énoncé mathématique, c'est peut-être un énoncé de problème (auquel cas, il manque à toutes les phrases une question ou une consigne, proposées en ajout)
- ou encore, c'est un théorème, un énoncé général vrai (par exemple quelqu'un propose de remplacer la troisième phrase par «un quadrilatère **ne peut pas** avoir exactement trois angles droits»)
- à moins que ce ne soit une proposition, au sens de la logique, un énoncé que l'on peut déclarer soit vrai, soit faux
- et, pourquoi pas n'importe quelle phrase parlant de mathématiques? (C'est le point de vue de ceux qui ne proposent aucune modification).

La discussion fait également apparaître que les énoncés (1) et (2) sont implicitement quantifiés pour les participants, ce qui correspond à l'usage courant dans l'emploi du « si ... alors » et des identités algébriques. En revanche, l'énoncé  $3+4a \neq 7a$ , construit comme le (2), pose question. On ne peut pas le considérer comme la négation de :  $3+4a = 7a$ . Il est soit admis comme «énoncé parfois vrai, parfois faux», soit complété de : «pour tout  $a$  différent de 1».

Dans la deuxième partie de l'atelier, les participants sont invités à tester sur tous les énoncés proposés (les cinq de départ et leurs variantes) les trois *règles du débat* proposées dans la brochure citée plus haut. L'objectif est de débusquer les implicites dans ces règles.

1. Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux.
2. Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé est vrai.
3. Un exemple qui ne vérifie pas un énoncé suffit pour prouver que cet énoncé est faux. Cet exemple est appelé «contre-exemple».

La première règle situe le choix des auteurs : un énoncé mathématique est une proposition, au sens habituel de la logique. Les suivantes font apparaître un implicite très fort. En effet ces règles ne s'appliquent qu'aux énoncés universels. Sont donc exclus de fait du champ des énoncés mathématiques, les énoncés existentiels comme

*Un quadrilatère peut avoir exactement trois angles droits*

qu'on ne peut réfuter à l'aide d'un contre-exemple, ou

*Le carré d'un nombre peut être plus petit que ce nombre*

qu'un exemple suffit à prouver.

L'identification du quantificateur existentiel signalé dans la langue par le verbe «peut» ne va pas de soi pour tous, et le passage par la formalisation mathématique est nécessaire.

À ce stade, on pourrait penser régler la question avec les élèves en précisant que les règles données ne concernent que les énoncés généraux.

Malheureusement, comme l'a montré Viviane Durand-Guerrier dans sa thèse<sup>1</sup>, les règles 2 et 3, telles qu'elles sont énoncées, sont contradictoires.

Prenons comme exemple, une déclaration d'élève :

**Élève :**

*Le carré d'un nombre est plus grand que ce nombre, c'est vrai, par exemple*  
 $2^2 = 4$  et  $5^2 = 25$

**Prof :**

*Voyons, tu sais bien qu'en math, un exemple ne démontre rien, il se trouve que tes exemples vérifient l'énoncé, mais cependant l'énoncé est faux.*

Nous sommes bien dans un cas d'application de la règle 2 :

**2 -** Des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas pour prouver que cet énoncé est vrai.

L'énoncé déclaré faux par l'enseignant c'est la proposition : *le carré d'un nombre est toujours plus grand que ce nombre*, que l'on peut formaliser en  $\forall a \in E, a^2 > a$ .

Mais quel est l'énoncé "vérifié" par les exemples de l'élève ? **Il s'agit d'une autre phrase : «  $a^2 > a$  » qui n'est pas une proposition, mais une phrase ouverte.**

Le mot « énoncé » se réfère à deux choses différentes dans la même phrase !

Un élève qui s'en tient à la lettre ne peut-il alors légitimement "entendre" qu'un énoncé peut être à la fois vrai (vérifié) et faux ?

Que dire alors aux élèves, sans entrer dans une lourde formalisation ?

Peut-être :

*Des exemples qui vérifient un énoncé ne prouvent pas que cet énoncé est vrai dans tous les cas, il peut y avoir aussi des exemples pour lesquels l'énoncé est faux.*

Avec cette formulation, il n'y a plus d'ambiguïté sur le mot énoncé, mais il est important d'être conscient qu'il désigne alors une phrase ouverte, autrement dit d'un énoncé qui n'est en soi ni vrai ni faux.

## Pour conclure :

L'analyse qui précède éclaire les réponses d'élèves déclarant certains énoncés "à la fois vrais et faux".

Il semble nécessaire de prendre en compte dans la classe l'existence d'énoncés "contingents", autrement dits de phrases ouvertes n'ayant pas de valeur de vérité, et d'accorder davantage d'importance à l'explicitation du rôle de la quantification. Celle-ci prend aisément sa place dans les débats entre élèves, pour peu que l'on soit attentif à débusquer les implicites.

<sup>1</sup> Durand-Guerrier V. (1996) Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1, sous la direction de Gilbert Arsac.





# QUELLE PLACE POUR L'ALÉATOIRE EN COLLÈGE ?

Jean-Claude GIRARD, Michel HENRY, Jean-François  
PICHARD

## CII STATISTIQUE et PROBABILITÉS

Depuis sa création, la Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités s'est intéressée à l'enseignement des statistiques au collège et à l'enseignement des probabilités au lycée<sup>1</sup>.

La problématique que nous avons choisi de présenter ici illustre la liaison entre probabilités et statistique et pose la question de l'introduction à l'aléatoire en collège.

### Peut-on envisager un enseignement de l'aléatoire au collège ?

Comme chacun sait, est "aléatoire" ce que le hasard rend incertain. On peut remarquer à ce propos que les mots "hasard" et "aléatoire" sont absents des programmes du collège. Le mot "hasard" ne figure d'ailleurs pas davantage dans les programmes du lycée. On peut s'interroger sur ces absences qui font que les élèves aborderont l'étude des probabilités sans avoir rencontré les phénomènes aléatoires autrement que par leur expérience sociale. On peut se demander quelles conceptions naïves (justes ou erronées) ils se seront faites alors du hasard et quelles conséquences cela aura pour l'apprentissage des probabilités. N'y aurait-il pas intérêt à aborder en classe la notion d'aléatoire en parallèle avec l'initiation aux démarches statistiques, avant l'enseignement des probabilités ?

Depuis leur introduction dans l'enseignement secondaire, il y a de cela 30 ans environ, les probabilités et la statistique ont beaucoup . . . fluctué au gré des réformes successives<sup>2</sup> et actuellement, les probabilités ne sont introduites — au mieux — qu'en classe de Première. Par contre, la plupart de nos voisins européens entreprennent beaucoup plus tôt, c'est-à-dire dès le collège, une initiation à l'aléatoire. Nous nous sommes posé la question de savoir si une telle étude était envisageable en France et, si oui, sous quelle forme et dans quelles conditions.

On peut dégager deux pistes de réflexion que les recherches didactiques pourraient prendre en charge.

1. Peut-on envisager un contact plus précoce (par exemple en classe de Quatrième) avec des phénomènes aléatoires de divers types (lancers de punaise

---

1. Nous renvoyons au livre et aux deux publications sur ces deux sujets :

*Enseigner les probabilités au lycée*, IREM de Reims, Juin 1997.

*Modélisation en probabilités*, IREM de Besançon, Juin 1997.

*Aides pour l'enseignement de la statistique au collège*, IREM de Besançon, Septembre 1997.

2. Cf. l'article de Bernard Parzys : *Les probabilités et la statistique dans le secondaire, d'hier à aujourd'hui*, dans *Enseigner les probabilités au lycée*, 17-38, éd. IREM de Reims, juin 1997.

ou d'osselets, tirages de boules, jeux de hasard, échantillonnage "au hasard" dans une population, etc. . . )? Cela permettrait d'engager à moyen terme une réflexion sur des questions telles que :

- l'imprédictibilité des résultats (on ne peut pas être sûr de ce qui va être obtenu),
  - la notion d'expérience aléatoire, comprise comme un protocole expérimental (comment s'assurer qu'on répète la même expérience? qu'appellera-t-on un «résultat»? . . . ),
  - l'analogie entre répétition d'une expérience aléatoire et échantillonnage.
2. Comment introduire l'articulation constante entre prévision (donc modèle plus ou moins "naïf") et observation, permettant, à partir de l'étude de la fluctuation des résultats selon l'échantillon (imprévisibilité, certes, mais dans certaines "limites"), de déboucher sur la construction et l'étude de modèles mathématiques et sur la notion de probabilité, en prenant explicitement en compte le caractère plus ou moins arbitraire d'un modèle?

Aujourd'hui, il nous semble donc légitime de poser la question :

### Y a-t-il une place pour l'aléatoire au collège?

Nous nous proposons de préciser le fonctionnement de connaissances de nature scientifique dans lesquelles une approche de l'aléatoire pourrait être envisagée, et d'en dégager quelques indications pour l'enseignement, illustrées par l'exemple du jeu de "Franc-Carreau"<sup>3</sup>, replacé dans le cadre générique des situations de Bernoulli<sup>4</sup>.

## Le hasard et l'aléatoire, du quotidien à sa modélisation

### Le hasard au quotidien

Les élèves des collèges vivent quotidiennement des situations hasardeuses. Ils rassemblent généralement sous ce vocable tout ce qui peut leur arriver qui soit imprévisible. Ils mélangent par là même diverses approches du hasard qui ne relèvent pas toutes de l'exploration scientifique. À ce niveau, et sans nous reporter aux conceptions apparues dans l'histoire, de la physique d'Aristote à la mécanique quantique en passant par Cournot, ou aux différences d'approches qui marquent divers champs de la connaissance<sup>5</sup>, nous pouvons distinguer :

- le hasard de la contingence, celui qui résulte d'un enchaînement unique de faits incontrôlables comme une rencontre accidentelle qui nous concerne personnellement, ce hasard mis en scène par Diderot dans *Jacques le fataliste*, et analysé par Aristote et Cournot,

3. Ce jeu du XVIII<sup>me</sup> siècle consistait à jeter un écu sur un carrelage et à parier sur "Franc-Carreau", c'est-à-dire sur la réalisation de l'événement : l'écu ne rencontre aucun joint entre les carreaux.

4. Situations aléatoires où l'on ne considère que deux issues : "succès" ou "échec", non nécessairement équiprobables, bien sûr.

5. Voir pour cela l'excellent livre de poche : *Le hasard aujourd'hui*, coordonné par Emile Noël, éd. Seuil, 1991.

- le hasard issu des aléas des prises de décisions humaines insondables, comme les choix stratégiques d'un joueur d'échecs, ou selon certains élèves de l'évaluation par tel ou tel enseignant de leurs productions,
- le hasard de l'indéterminabilité de l'évolution de phénomènes sensibles comme la météo à long terme (le fameux effet papillon) ou l'évolution des cours de la bourse, les positions à venir d'une particule dans un mouvement brownien ou la transmission héréditaire de facteurs génétiques,
- le hasard des générateurs de hasard, ces objets manipulables à volonté, fabriqués pour cela, comme des dés, cartes, urnes de loto, roulettes pour des phénomènes porteurs d'équiprobabilité «quelque part»<sup>6</sup>, ou punaises, pendules magnétiques et chaotiques pour d'autres, générateurs de non équiprobabilité,
  - le hasard des comportements des populations statistiques, celui des compagnies d'assurance, des files d'attentes, des pannes dans une technologie complexe, des épidémies ou des phénomènes démographiques,
  - le hasard des prélèvements "au hasard" dans une population, à partir de tables de nombres au hasard ou des données pseudo-aléatoires d'un ordinateur . . .

Quelles perceptions les élèves de collèges en ont-ils? Quels rapports entretiennent-ils avec les phénomènes hasardeux et quels sont leurs comportements dans ces situations? Quelle éducation au hasard à l'école?

Reconnaissons que celle-ci est aujourd'hui en France quasi-nulle. À la différence de nombreux pays étrangers, nous vivons encore l'époque où le déterminisme de Laplace<sup>7</sup> règle l'enseignement scientifique. Nous nous privons ainsi de l'introduction à l'âge le plus réceptif de concepts permettant la description et l'interprétation rationnelle des situations où le hasard intervient. Cette partie importante des outils modernes de pensée est renvoyée à la fin du secondaire, dans des conditions où ils sont l'objet du rejet de la majorité des élèves.

Peut-on espérer une évolution décisive des programmes des collèges dans ce domaine à moyen terme?

### **La perception pratique de l'évolution d'une situation aléatoire.**

Il s'agit pour les enfants de savoir reconnaître les situations où le hasard intervient dans des conditions bien précises, quand l'évolution du phénomène observé peut donner lieu dans ces mêmes conditions à diverses issues remarquables, d'avance bien identifiées. Nous parlerons alors de phénomène ou processus aléatoire, pour le distinguer du hasard de la contingence.

Le deuxième concept qui s'introduit naturellement est celui d'événement. Il s'agit de savoir repérer les issues de la situation aléatoire qui "réalisent" une certaine attente. Fermat les appelait les "*chances*" parmi les "*hasards*". Laplace parlait d'"*issues*

6. Cela veut dire que l'on peut décrire les issues (observables) à partir d'un système fini de cas pour lesquels on peut faire l'hypothèse d'équiprobabilité.

7. "*Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre*". Essai philosophique sur les probabilités, 1812.

*favorables*” et d’*issues possibles*”. Le terme de “chance” introduit une composante psychologique forte à l’âge des enfants du collège qu’il faudra gérer : la “chance” relève de l’équation personnelle, de la “bonne étoile”, plutôt que de l’enchaînement objectif de faits aléatoires.

Lorsque les issues sont bien repérées, elles font l’objet d’une approche naïve que nous qualifierons de “pré-probabilité”, entachée du “biais d’équiprobabilité” : quand aucune indication particulière sur les degrés de possibilités des issues résultant d’une situation aléatoire n’est donnée, il arrive que toutes les issues soient perçues a priori comme équiprobables. Il en est ainsi logiquement pour les boules tirées d’une urne par “une main innocente”, mais de nombreux élèves transposent cette équiprobabilité sur la couleur à venir, quelle que soit sa représentation dans l’urne. “*Tous les hasards sont égaux*” disait Fermat<sup>8</sup> et le nombre de “chances” qui réalisent un événement attendu détermine son “degré de certitude”, selon la définition de Bernoulli<sup>9</sup> de la probabilité. Mais quel traitement faire des “hasards inégaux” comme celui qui est engendré par le jet d’une punaise qui peut tomber sur sa pointe ou s’immobiliser sur sa tête?

Comment invalider le raisonnement de d’Alembert dans l’article *Croix ou Pile* de l’Encyclopédie (1751-1772) qui attribue deux chances sur trois à l’événement : obtenir un “pile” en au plus deux jets d’une pièce, expliquant que les issues favorables sont “pile” au premier jet, et “face” puis “pile” au premier et second jets, alors qu’il n’y a qu’une issue défavorable : “face” suivi de “face”?

Quelle description et quelle compréhension proposer du phénomène de stabilisation des fréquences d’une issue lorsque l’on répète la même épreuve aléatoire un grand nombre de fois, face à cet autre biais de l’interprétation erronée de la loi des grands nombres qui fait croire à certains élèves qu’après une série de “piles”, la même pièce a plus de chances de tomber sur “face”?

Bref, pour résumer :

### Quelle familiarité avec l’aléatoire faire vivre au collège?

Notre réponse didactique à ces questions, et à d’autres, réside dans l’élaboration de modèles descriptifs de situations aléatoires et des concepts de base comme ceux d’expérience aléatoire, d’issues et d’événements, et d’une approche objective et expérimentale de la probabilité.

### Élaboration d’un modèle descriptif et notions de base.

**a Notions d’expérience aléatoire et d’issue.** Nous appellerons “expérience aléatoire” un processus expérimental :

déterminé par un protocole, mis en œuvre et contrôlé par un expérimentateur,

8. Lettre à Pascal du 25 septembre 1654.

9. Jacques Bernoulli (1654-1705) dans *Ars Conjectandi* (publié en 1713) : “*La probabilité est en effet un degré de la certitude et en diffère comme la partie diffère du tout*”.

- reproductible “dans les mêmes conditions”,  
 – où le hasard intervient pour déterminer le résultat expérimental.

L’observation raisonnée de ce résultat suppose que l’on soit en mesure de donner de manière exhaustive la liste des issues possibles auxquelles on souhaite affecter tous les résultats envisageables de l’expérience. Ainsi, nous distinguons le résultat expérimental, état du système observé à l’aboutissement du processus aléatoire, de l’issue réalisée par ce résultat, observable ou non, mais déterminée sans ambiguïté parmi toutes les issues possibles qui ont été envisagées dans le protocole expérimental.

La description d’une expérience aléatoire fait entrer les élèves dans un processus de modélisation : l’expérience aléatoire est décrite par un protocole qui lui donne un statut générique, permettant de la répéter. Les objets mis en œuvre sont idéalisés : les dés ou les pièces deviennent parfaits, les boules “indiscernables au toucher”, de manière à valider dans ces exemples l’hypothèse d’équiprobabilité.

## b Notions d’événement et de probabilité.

La notion d’événement est alors conçue au sein de ce modèle dans un cadre ensembliste : un événement est assimilé à la famille des issues qui le réalisent.

Les élèves sont ensuite conduits à une étape de transition entre la perception naïve des «chances» qu’ils attribuent à des événements simples et la compréhension la plus élémentaire de la notion de probabilité dans des situations d’équiprobabilité assimilables au tirage d’une boule dans une urne de Bernoulli<sup>10</sup>.

Dans une telle situation, on observe que les élèves assimilent généralement sans difficulté les “chances” de tirer une boule d’une certaine couleur à la proportion des boules de cette couleur dans l’urne<sup>11</sup>.

Nous appellerons cette première approche : “pré-probabilité”. C’est le degré de la certitude de Jacques Bernoulli. C’est aussi le *rapport du nombre des issues favorables à celui des issues possibles* selon la définition donnée en premier principe par Pierre Simon Laplace.

Cette approche peut donner lieu à une définition, et en ce sens introduire un concept nouveau. C’est aussi une définition “en acte” au sens de Gérard Vergnaud, naturelle, mais naïve, incomplète et insuffisante à long terme. Mais elle fait le lien entre une perception sensible (les chances d’obtenir une boule blanche ...) et un concept théorique (une fraction plus petite que 1 égale au rapport du nombre des boules de la couleur donnée au nombre total des boules dans l’urne, lesquelles sont équiprobables dans l’urne idéale de Bernoulli).

10. Urne contenant des boules de deux couleurs dont la caractéristique probabiliste est entièrement déterminée par la proportion des boules de chacune des deux couleurs.

11. Cette assimilation chances-pré-probabilité que l’on peut attendre des élèves placés dans une situation aussi épurée que l’urne de Bernoulli, est une des hypothèses essentielles dans ce processus d’apprentissage que les recherches en didactique devraient conforter.

L'introduction de cette définition à ce moment-là de l'apprentissage permet de pointer et de faire rejeter par certains élèves l'obstacle que de nombreuses recherches ont mis en évidence : ces élèves pensent qu'on a d'autant plus de chances de tirer une boule blanche dans une urne que le nombre de ces boules blanches est grand, même si la proportion de ces boules dans l'urne ne change pas. On peut rapprocher cette conception de celle que l'on rencontre parfois à propos des angles, perçus comme d'autant plus grands que leurs côtés représentés sur un dessin sont plus longs.

Ainsi, de la même manière qu'en géométrie, l'introduction de ces quelques concepts théoriques proches de la réalité perceptible apporte aux élèves un vocabulaire et des outils de pensée leur permettant d'entrer dans le fonctionnement de modèles : analyser, structurer, simplifier, comprendre, expliciter, formuler, relier, inférer, contrôler, prédire. Ces concepts relèvent de définitions et de propriétés. Ils entrent dans des systèmes de représentations symboliques et interviennent dans les énoncés de théorèmes. Ils ont toutes les qualités requises pour être des objets mathématiques. Au collège, ces quelques notions sont suffisantes pour fournir les outils de description et de compréhension des situations aléatoires simples de la réalité qui peuvent leur être soumises.

Dans un deuxième temps, on peut passer à un niveau supérieur de compréhension de cette notion de probabilité par la mise en place de situations expérimentales propres à l'observation de la stabilisation des fréquences et permettant d'attribuer à la probabilité le statut objectif de représenter cette stabilisation. Le jeu du Franc-Carreau, que Jean-François Pichard va présenter ensuite, offre une manipulation intéressante pour les élèves, elle donne un bon exemple d'une telle situation expérimentale. Dans ce type de situations où l'on se place dans un cadre géométrique, l'ordinateur est un formidable outil de simulation qui rend maintenant accessible aux élèves des collèges l'observation pratique de la stabilisation des fréquences.

## **L'origine du calcul des probabilités et le jeu du Franc-Carreau pour une expérimentation**

L'incertitude, le hasard, interviennent très souvent dans la vie quotidienne, même pour des enfants d'un très jeune âge. Associé à la statistique, le calcul des probabilités est une clé primordiale, essentielle, pour analyser et comprendre les phénomènes incertains. Aussi, et en raison du fait que la plupart des enseignements scientifiques durant la scolarité obligatoire sont donnés dans un cadre déterministe laplacien, il nous semble important de commencer une introduction à l'aléatoire dès le collège, ce qui peut se faire en parallèle avec l'étude de la statistique descriptive.

Pour valider la possibilité d'une telle initiation, nous avons mené plusieurs expérimentations, en classe de 5e, à partir d'épreuves aléatoires dont les résultats étaient utilisés pour traiter les notions statistiques du programme. Nous avons de ce fait introduit les notions de hasard, de variabilité, d'indépendance, et une étude empirique de la loi des grands nombres par stabilisation des fréquences pour faire évaluer la probabilité d'un événement. Il semble que les enfants ont une bonne approche intuitive de ces notions, sauf de l'indépendance.

Mais y a-t-il un ordre préférentiel pour introduire les différents domaines des mathématiques, et en particulier ici, le calcul des probabilités et la statistique?

Pour commencer, replongeons-nous dans l'histoire pour voir comment ces deux disciplines sont apparues. A l'origine du calcul des probabilités, il y a d'abord des jeux concernant des ensembles finis, avec des astragales, pièces, dés, etc. . . , pour lesquels les répétitions de lancers sont des épreuves semblables (les chances de chaque éventualité restent les mêmes) et indépendantes; puis les jeux de cartes et tirages sans remise dans une urne pour lesquels les probabilités sont conditionnées par les résultats qui précèdent.

Cependant, l'assignation de valeurs aux chances d'obtention des différents résultats n'est pas basée sur la constatation empirique, qui aurait conduit à la statistique, comme c'est manifeste pour l'étude de l'astragale qu'a faite Jérôme Cardan<sup>12</sup> dans le premier livre écrit sur les jeux de hasard, *Liber de ludo aleae* (environ 1560, mais publié seulement en 1663), où il attribue les mêmes chances aux quatre faces sur lesquelles l'astragale peut se stabiliser, ce qui est grossièrement faux. L'hypothèse que chaque face d'un polyèdre a la même chance de se présenter semble être une idée très ancienne, elle a été adoptée naturellement par Cardan dans le premier écrit connu, et est adoptée par les élèves en présence de solides à peu près réguliers et homogènes, par exemple des cubes (dés).

On voit ainsi que, dès le tout début, l'émergence du calcul des probabilités est venue d'une abstraction des objets utilisés, une "géométrisation du hasard" comme l'a dit Blaise Pascal en 1654<sup>13</sup>. Pour ces jeux, qui ont un ensemble fini d'éventualités, on assigne des valeurs aux probabilités des événements<sup>14</sup> en se basant sur l'hypothèse que chaque côté a la même chance de se produire ("*les hasards sont égaux*" de Fermat), appelée principe d'indifférence ou de raison insuffisante par Leibniz (vers 1678) ou d'égalité de facilité par Bernoulli (1713) et Laplace (1774).

Comme l'écrit Bernoulli<sup>15</sup>:

*"Pour faire une conjecture correcte sur n'importe quel événement quel qu'il soit, il est nécessaire seulement de calculer exactement le nombre des cas possibles, et alors de déterminer combien il est plus vraisemblable qu'un cas se produira qu'un autre. Mais ici aussitôt survient notre difficulté principale, car cette procédure n'est applicable qu'à seulement très peu de phénomènes, et presque exclusivement à ceux en rapport avec les jeux de hasard".*

12. Il avait pourtant fait beaucoup d'expérimentations, étant un joueur invétéré, cf. "Cardan, Ma vie", Belin, 1991, et le *Liber de ludo aleae*.

13. Dans sa célèbre adresse à l'Académie Parisienne de Mathématiques Le Pailleur. Traduction précise du texte latin dans : *Blaise Pascal, Œuvres complètes*, tome II, de Jean Mesnard, éd. Desclée de Brouwer.

14. A. Arnauld et P. Nicolle, dans la *Logique, ou l'Art de penser* (1662), dite Logique de Port-Royal, introduisent le terme "degré de probabilité" comme rapport des chances.

15. *Ars conjectandi* (1713), d'après "Jacques Bernoulli & l'*Ars conjectandi*", trad. N. Meunier, IREM de Rouen, 1987.

On peut dire que le calcul des probabilités, dès le *XVII<sup>ème</sup>* siècle et au *XVIII<sup>ème</sup>* est relié à l'arithmétique (les probabilités sont des nombres rationnels), ou même à l'arithmétique infinie (i.e. les séries) quand on s'intéresse, pour le cas le plus simple d'une pièce, au nombre de lancers nécessaires pour obtenir Pile pour la première fois (J. Bernoulli, 1685, puis Leibniz). L'ensemble des valeurs possibles est alors  $\mathcal{N}^*$ , qui est infini dénombrable.

On remarquera ici que, à l'encontre de la géométrie où on ne peut parler des inventeurs en tant qu'hommes, ainsi que le déplorait J.C. Duperret, on connaît un peu la vie et même le visage des inventeurs du calcul des probabilités : Cardan (*XVI<sup>ème</sup>* siècle), Fermat et Pascal, puis Huygens (*xvii<sup>ème</sup>* siècle), J. Bernoulli (fin *xvii<sup>ème</sup>* siècle), etc<sup>16</sup>...



Ci-dessous :  
Christiaan Huygens (1629-1695).  
Auteur du premier écrit **publié** sur le  
calcul des probabilités.  
Gravure extraite de  
*Histoire des Mathématiques*  
de J. P. Collette, éd. Vuibert, 1979.

Ci-dessus : Gerolamo Cardano ou  
Jérôme Cardan (1501-1576).  
Auteur du premier écrit **connu** sur le  
calcul des probabilités.  
Gravure extraite de  
*Cardan, ma vie*, éd. Belin.



16. Voir l'article : J. F. Pichard, "Les probabilités au tournant du *xvii<sup>ème</sup>* siècle", dans l'ouvrage de la commission inter-IREM "Stat et Probas" : *Enseigner les probabilités au lycée*, éd. IREM de Reims, 1997.



Ci-contre :

Jakob Bernoulli (1654-1705). Auteur du premier théorème limite en calcul des probabilités.

Portrait présenté au musée de Bâle, reproduit dans

*Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi*, éd. IREM de Rouen 1987.



Le passage aux probabilités géométriques va se faire à propos d'un jeu inventé par Buffon<sup>17</sup>, le jeu du Franc-Carreau<sup>18</sup>, qui a servi de base à nos expérimentations en collège, à l'IREM de Rouen et à Grenoble pour la recherche que présentera Michel Henry ensuite.



Ci-dessus :

Georges L. Leclerc, comte de Buffon (1717-1788).

Frontispice de l'édition de 1855.

Le jeu du Franc-Carreau et le jeu de l'aiguille ont été donnés par Leclerc dans un mémoire de 1733 pour être admis membre de l'Académie Royale des Sciences. Le texte en est connu uniquement par sa publication dans *Essai d'Arithmétique Morale de Buffon en 1777*.

Dans la pratique, les règles du jeu doivent être précisées : de quel endroit peut-on lancer l'écu ? Comment lève-t-on les ambiguïtés (écu tangent aux joints) ?

17. G.L. Leclerc, comte de Buffon, a commencé à signer ses écrits : "Leclerc", puis "Leclerc de Buffon" vers 1735, puis seulement "Buffon".

18. Le jeu de Franc-Carreau et le jeu de l'aiguille consistaient donc à lancer un objet (un écu, une aiguille) au-dessus d'un carrelage ou d'un parquet. Les joueurs pariaient sur la position finale de l'objet : sur un seul carreau (à franc-carreau) ou une seule lame de parquet, ou à cheval sur un ou plusieurs joints ? Dans le cas de l'aiguille, le calcul des probabilités en jeu fait appel à l'analyse infinitésimale, laquelle était relativement récente à cette époque.

Mais Buffon pose le problème en termes plus abstraits : peut-on assigner une probabilité à l'événement "Franc-Carreau", faisant abstraction du joueur impliqué ? On est alors conduit à traduire en termes géométriques les différentes positions possibles pour le centre de l'écu dans les différents carreaux du carrelage. On voit bien que l'événement "Franc-Carreau" est réalisé dès lors que le centre de l'écu vient à une distance de tout joint strictement supérieure à son rayon. Quel lien y a-t-il entre les aires délimitées sur les carreaux par la condition géométrique précédente et la probabilité de "Franc-Carreau" ?

Il est remarquable, ici encore, que l'on puisse assigner des valeurs aux probabilités des événements par un principe d'égalité de facilité. Pour le jeu du Franc-Carreau, le lancer au hasard d'une pièce ronde sur un sol dallé, des domaines assez réguliers (triangles, rectangles, etc. . .) de même surface ont la même "chance" d'être touchés.

Un autre intérêt de l'introduction des probabilités géométriques est qu'on arrive, "d'une façon naturelle", à des valeurs théoriques non nécessairement rationnelles pour les probabilités. Par exemple, le nombre  $\pi$  intervient dans la probabilité que l'aiguille ne rencontre aucune rainure du parquet.

Lors de l'expérimentation<sup>19</sup>, menée dans des classes de Cinquième, nous voulions, entre autre, faire observer aux élèves la variabilité des résultats obtenus d'un groupe à l'autre et leur faire évaluer la valeur de la probabilité de "Franc-Carreau" en mettant en évidence la stabilisation des fréquences, sans qu'ils aient de façon intuitive une idée de cette valeur, la valeur attendue étant moins facilement perçue que dans le cas d'une pièce ou d'un dé. De plus, le jeu du Franc-Carreau est facile à mettre en œuvre en utilisant des pièces et des feuilles avec des tracés de grands carreaux.

Cette expérimentation a montré clairement qu'une introduction à l'aléatoire peut être faite au collège, comme c'est au programme dans d'autres pays européens (Allemagne, Angleterre, Espagne, . . .)<sup>20</sup>.

## L'observation des fréquences : élargissement du concept de probabilité, les probabilités géométriques .

### La stabilisation des fréquences.

On répète une même expérience de Bernoulli<sup>21</sup> un grand nombre de fois. La suite des "succès" et "échecs" est parfaitement aléatoire, mais on observe que la fréquence des succès tend à se stabiliser au voisinage de la valeur  $p$ , la probabilité du "succès"<sup>22</sup>. Ce phénomène naturel, une des lois du hasard appelée "loi des grands

19. *Une activité probabiliste au Collège, le jeu du Franc-Carreau*, groupe Statistique, IREM de Rouen, 1996

20. *Statistique au collège, leur enseignement en Europe*, groupe statistique, IREM de Rouen, 1994.

21. Expérience aléatoire où on ne considère que deux issues : "succès" ou "échec", la probabilité de "succès" est donné par  $p$ . Une telle expérience est modélisée par le tirage "au hasard" d'une boule d'une urne de Bernoulli où la proportion de boules blanches représente le succès égale à  $p$ .

22. On pourra se reporter à l'article de Repères-IREM n° 6 : *L'enseignement des probabilités dans le programme de Première*, Annie et Michel Henry, 1992

nombres", est tout simplement dû au calcul de la fréquence comme quotient du nombre  $s$  des succès par le nombre  $n$  des expériences. Quand  $n$  est grand, le résultat de la  $(n+1)$ ème expérience n'a que peu d'influence sur ce quotient, ce qui induit cette sorte de "stabilisation". Ce qui est remarquable, c'est que cette suite de fréquences semble converger vers la probabilité  $p$ .

En réalité, la définition de  $p$  comme proportion des boules blanches dans l'urne modèle de Bernoulli est une définition qui porte en elle ce résultat et qui conduit au premier théorème limite en probabilités, dû à Bernoulli<sup>23</sup>. Ce théorème, qui découle des définitions ainsi introduites, reflète bien un phénomène naturellement observé, permettant à la plupart des individus de "supputer" les chances qu'ils ont d'obtenir un «succès» en une seule expérience. Cette définition s'impose donc naturellement, si l'on veut rendre compte dans le modèle mathématique de cette propriété de stabilisation des fréquences. Toute autre définition de la valeur d'une probabilité (par exemple le nombre des "chances" qui réalisent un événement, ou encore le rapport de celles-ci aux cas défavorables, comme cela a d'abord été proposé) ne conduirait pas à un énoncé aussi simple de la loi des grands nombres. Ce théorème a donc pour signification de valider le modèle probabiliste comme adéquat pour représenter (à ce niveau élémentaire) une certaine réalité aléatoire.

Ce phénomène de stabilisation est bien compris par les adolescents qui jouent aux dés par exemple. Il est mis à profit par les parieurs pour apprécier si les enjeux d'un pari sont équitables, quand ils ne peuvent calculer d'avance la probabilité de l'emporter.

Remarquons qu'historiquement, c'est l'étude de la répartition des mises dans un jeu de "pile" ou "face" interrompu qui a amené Pascal et Fermat à jeter les bases du calcul des probabilités en 1654. Mais dans ce "problème des partis", la probabilité qu'a un joueur de gagner en  $n$  coups peut être calculée par avance (la géométrie du hasard) par dénombrement des suites possibles de pile ou face qui auraient pu intervenir si la partie n'avait pas été interrompue.

Le calcul a priori d'une probabilité par dénombrements ne semble pas être envisageable pour des "probabilités géométriques" où le hasard intervient dans des situations mettant en jeu des objets géométriques continus, comme dans l'exemple célèbre de l'aiguille de Buffon, jetée sur un parquet<sup>24</sup>. Dans ces situations de probabilités géométriques, on peut estimer la probabilité cherchée par la fréquence stabilisée de l'événement, à condition de pouvoir effectuer réellement ou par simulation l'expérience proposée et la recommencer un grand nombre de fois (en réalité, plusieurs centaines).

---

23. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la probabilité que la fréquence observée à la  $n$ -ième expérience se situe entre  $p - \varepsilon$  et  $p + \varepsilon$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini.

24. La probabilité qu'une aiguille de longueur  $l$ , jetée au "hasard" sur un parquet dont les lames sont de largeur  $a > l$ , tombe en travers d'une rainure, vaut  $\frac{2l}{\pi a}$ . Encore faut-il préciser ce qu'on entend par "au hasard", ce qui est la difficulté des probabilités géométriques, comme l'a souligné Joseph Bertrand en 1899. Voir l'article "Paradoxes et lois de probabilités" d'Henri Lombardi et Michel Henry - *REPÈRES-IREM* n°13 - octobre 1993.

Cette notion de probabilité repose sur une hypothèse de modèle. Dans les cas les plus simples, une hypothèse d'uniformité (ou d'égale facilité) peut donner du sens à la locution "au hasard" : des domaines géométriques bornés de même aire ont la même "chance" d'être atteints "au hasard". On peut faire ainsi l'estimation de l'aire d'une figure par la méthode (peu performante) de Monte-Carlo qui consiste à saupoudrer la partie du plan contenant cette figure par des points "choisis au hasard" et à compter le nombre de ceux qui tombent dedans.

Mais la réalisation concrète d'une telle expérience suppose de faire des choix dans le dispositif expérimental, de manière à matérialiser l'intervention du hasard. L'adéquation entre la valeur théorique de cette probabilité, inhérente au choix du modèle, et la fréquence stabilisée observée, ne peut être réalisée que dans la mesure où le dispositif expérimental correspond bien aux hypothèses de modèle.

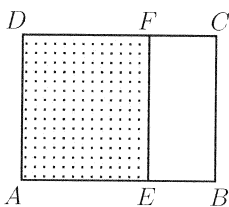
La méthode de Monte-Carlo repose donc sur une interprétation fréquentiste de la notion de probabilité. Du point de vue didactique, elle se conçoit concrètement dans le cadre de la simulation informatique, transformant une expérience de pensée en des instructions données à l'ordinateur, qui obligent à bien préciser les hypothèses de modèle introduisant l'uniformité quelque part.

L'ordinateur est alors un outil merveilleux pour l'observation des fréquences, particulièrement dans un cadre géométrique qui parle bien aux élèves par les images qu'il peut produire. Mais l'introduction d'expériences aléatoires dans un tel cadre pose une question didactique :

*Comment amener les élèves à faire le lien entre la définition de la probabilité donnée par Laplace, interprétant l'approche naturelle de pré-probabilité induite par l'urne de Bernoulli, et cette notion de probabilité géométrique, tout en les reliant à l'observation des fréquences ?*

La situation du jeu de Franc-Carreau permet précisément de faire ce lien. C'est en particulier l'objet d'une recherche didactique en cours à Grenoble, s'inscrivant dans l'environnement de Cabri-Géomètre. L'idée de base que cette recherche a pu expérimenter, présentée dans le paragraphe suivant, est de discrétiser les surfaces intervenant dans la détermination d'une probabilité géométrique par le biais des pixels, constituants élémentaires des images informatiques.

### L'urne à pixels.



La réponse proposée dans cette recherche est l'introduction d'une urne à pixels.

Sur l'écran de l'ordinateur, on a dessiné le rectangle fixe  $ABCD$ .

Le segment  $[EF]$  parallèle à  $(AD)$  peut être placé dans une position variable, délimitant ainsi l'aire du rectangle  $Aefd$  dans un rapport  $p$  avec l'aire de  $ABCD$ .

Remarquons que  $p$  est aussi le rapport des longueurs  $AE/AB$ .

Le générateur de nombres aléatoires de l'ordinateur fournit des couples de coordonnées, plaçant des points "au hasard" dans  $ABCD$ . Si un point tombe dans  $AEFD$ , c'est un "succès".

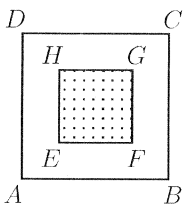
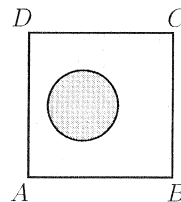
En fait l'ordinateur désigne au hasard dans  $ABCD$  l'un des pixels, ces petits carrés élémentaires qui tapissent l'écran. Si un tel pixel représente l'unité d'aire, l'aire de  $ABCD$  est, d'après la définition introduite à l'école primaire, le nombre de pixels qui composent ce rectangle.

Ce tirage au hasard d'un point dans  $ABCD$  s'apparente donc au tirage au hasard d'une boule dans une urne de Bernoulli. L'analogie devient parfaite si l'on considère que les points proposés par l'ordinateur ont les dimensions des pixels. Le nombre de pixels contenus dans  $AEFD$  détermine l'aire de ce rectangle et représente le nombre de boules blanches de l'urne de Bernoulli. Le rapport  $p$  des aires de  $AEFD$  à  $ABCD$  est donc aussi la probabilité de tirer une boule blanche, c'est-à-dire que l'ordinateur désigne un pixel de  $AEFD$ . L'urne à pixels est donc un outil de simulation d'une urne de Bernoulli, ou de toute expérience aléatoire à deux issues, immédiatement accessible aux élèves et réalisant le lien conceptuel entre pré-probabilité et probabilité géométrique. Les performances de l'ordinateur permettent alors un contrôle fréquentiste des probabilités géométriques. On a choisi d'en faire l'application en classe avec le jeu du Franc-Carreau.

### Le jeu de Franc-Carreau sur ordinateur.

Il est essentiel que les élèves manipulent le hasard avec différents générateurs, équiprobables ou non. Pour s'initier au jeu du Franc-Carreau, ils doivent pouvoir jeter eux-mêmes un disque sur un carrelage pour observer les régularités naissantes. L'enjeu peut être pour eux de comparer différentes aires de jeu, avec des tailles différentes pour le disque et le carrelage, afin de choisir le jeu qui leur soit le plus favorable. Mais le jeu devient vite fastidieux. La situation ayant été simulée sur l'ordinateur, cet outil s'impose naturellement.

Pour la simulation informatique, le lancer d'un disque au hasard revient à choisir le pixel qui en sera le centre. Le programme sur Cabri s'occupe du reste : construction du cercle de rayon donné et repérage des points d'intersection de ce cercle avec les côtés du carré  $ABCD$ , qui représente le carreau atteint.



Après une solution expérimentale au problème du choix entre plusieurs configurations, les élèves sont amenés à envisager une solution géométrique introduisant la notion de probabilité géométrique.

Le carré  $ABCD$  a pour côté  $a$ , le disque est de rayon  $r$ . Un succès est obtenu si et seulement si le centre du disque se trouve à l'intérieur du petit carré  $EFGH$  de côté  $a - 2r$ .

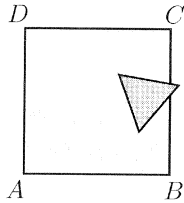
Comme pour l'urne à pixels, la probabilité de choisir au hasard un point de ce carré est égale au rapport des aires de  $EFGH$  à  $ABCD$ , soit  $\frac{(a-2r)^2}{a^2}$ .

Les surfaces des deux carrés sont ainsi "discrétisées" par les pixels les recouvrant, assimilés à de petits carrés unités élémentaires. Les nombres des pixels remplissant chacun de ces carrés peuvent être pris pour mesures de leurs aires respectives. Le choix au hasard d'un pixel dans le carré  $ABCD$  est alors assimilé au choix au hasard d'une boule dans une urne de Bernoulli, les boules de la couleur gagnante étant représentées par les pixels du carré  $EFGH$ .

Si la relation entre l'expérience informatique et le modèle d'urne de Bernoulli est comprise, les élèves ont franchi un grand pas dans la compréhension des concepts de base en probabilité.

### Le jeu du triangle.

Lorsque le lien entre probabilité géométrique, calculable d'avance par un rapport d'aires connues, et l'estimation fréquentiste de la probabilité d'un succès dans le cadre d'une simulation est bien compris, on peut poser un problème de probabilité géométrique non accessible au raisonnement a priori<sup>25</sup>.



On remplace le disque par un triangle, ou tout autre polygone dont l'orientation aléatoire introduit un deuxième degré de liberté dans le problème et une réelle difficulté pour la résolution géométrique, à supposer que cette orientation soit uniforme sur  $[0, 2\pi]$ .

Seule la répétition de l'expérience simulée un grand nombre de fois permet alors aux élèves de choisir la meilleure configuration entre plusieurs proposées, pour avoir le plus de chances de gagner à ce Franc-Carreau généralisé.

Cette résolution par estimation expérimentale de la probabilité cherchée permet alors de construire l'urne à pixels modélisant ce jeu. La notion d'expériences de Bernoulli équivalentes est ainsi en place, qui conduit à la compréhension abstraite de la notion de probabilité. Celle-ci pourra alors être définie sans problème au lycée dans toute sa généralité comme un nombre compris entre 0 et 1, qui décrit le degré de possibilité d'un événement associé à une expérience aléatoire, et qui formellement est défini de la manière qui suit.

### Vers l'introduction du concept mathématique de probabilité.

Mathématiquement, les issues possibles de cette expérience sont représentées par les éléments d'un ensemble référentiel  $\Omega$  (ou univers) dont les parties décrivent tous les événements qui peuvent résulter de l'expérience. La définition de cet ensemble  $\Omega$  dépend du problème posé et du degré de simplicité que l'on désire. La réalisation

<sup>25</sup> Buffon a entrepris un tel problème en son temps, dont la résolution utilise des outils mathématiques sophistiqués (calcul intégral).

d'une issue est donc représentée par le choix dans  $\Omega$  d'une partie réduite à un élément, appelée "événement élémentaire".

À chaque événement élémentaire est associée la probabilité de l'issue qu'il représente. Celle-ci peut être déterminée par une hypothèse d'équiprobabilité si l'expérience la permet exactement ou par approximation, ou encore par une valeur approchée provenant d'une estimation expérimentale par une fréquence stabilisée, ou bien par une donnée subjective fournie par un spécialiste ou appréciée a priori comme hypothèse de modèle, ou par tout autre moyen (ajustement d'une loi par exemple ...). Cette famille des probabilités élémentaires associées aux éléments de  $\Omega$  constitue ce qu'on appelle la "distribution de probabilité" sur  $\Omega$ .

Dans ce formalisme, la probabilité d'un événement  $A$  représenté par la partie  $A$  de  $\Omega$  (que les probabilistes appellent aussi "événement de  $\Omega$ ") est égale par définition à la somme des probabilités élémentaires associées aux éléments de  $A$ , c'est-à-dire des probabilités des issues qui réalisent  $A$ .

Cette définition est générale et suffisante pour travailler au niveau du second degré sur la plupart des situations aléatoires, y compris quand l'hypothèse d'équiprobabilité n'est pas pertinente. Elle permet de sortir des situations traditionnelles et fabriquées des jeux de hasard dont la combinatoire a rebuté tant d'élèves, pour atteindre de véritables situations de la réalité, notamment les situations d'échantillonnages. Elle suffit largement pour les besoins du lycée où l'on se restreint à considérer des univers  $\Omega$  finis (ou infinis dénombrables en post-bac). Elle pourra être complétée ensuite pour les modèles où  $\Omega$  est infini non dénombrable (introduit comme ensemble de réels) par une définition se plaçant dans le cadre de la théorie de la mesure, illustrée par la notion élémentaire de probabilité géométrique.

Mais ceci est une autre histoire qui nous renvoie à la cohérence des programmes de statistique et de probabilités dans la progression de la Seconde à la Terminale et à leur capacité à bien préparer cet enseignement en BTS, IUT ou à l'Université ...





# MAIS OÙ SONT LES NEIGES D'ANTAN ?

OU . . . LES STATISTIQUES

DANS LES NOUVEAUX PROGRAMMES DE COLLÈGE

Jean Claude GIRARD

IREM de LYON

## Introduction

L'objet de cet atelier est d'illustrer, sur un exemple, la méthode statistique (ses principes, ses difficultés) et de montrer ce qu'il est possible de faire au collège sur ce sujet. Je commencerai donc par une réflexion sur les nouveaux programmes de collège (en particulier de troisième).

Le projet initial donnait pour objectif "la comparaison de deux séries statistiques concernant un même caractère", non seulement à partir du calcul de paramètres de tendance centrale (moyenne, médiane) ou de position (quartile, décile, quantile) mais aussi de dispersion (initiation à l'écart type). Il mettait l'accent sur la perte d'information liée à l'utilisation de ces paramètres en lieu et place de la série complète et privilégiait une attitude critique vis à vis de ces résumés dans des situations permettant de leur donner du sens et d'en montrer les limites. Chacun pouvait se réjouir de voir l'enseignement des statistiques au collège trouver une cohérence qui pouvait laisser espérer qu'il lui serait enfin donné tout l'intérêt et le temps qu'il mérite.

Malheureusement, la concertation auquel le GTD a soumis le projet a conduit à "un rejet massif" de ce qui a été perçu comme "une inflation concernant les paramètres de dispersion des séries statistiques" (P. Attali).

Alors, que reste-t-il de tout cela dans le programme définitif? Si on le lit un peu vite (et je crains que ce soit le cas le plus fréquent, pour de nombreuses raisons) pas grand-chose! Exit les quantiles, déciles, quartiles et écart type. Plus grave, il n'est plus fait référence à des activités donnant du sens aux calculs statistiques. Il reste seulement une référence à l'éducation du citoyen et la recommandation d'habituer les élèves à avoir une attitude "de lecteur responsable face aux informations de nature statistique". Autrement dit : danger, statistiques!

On peut toutefois faire une relecture plus intéressante de ce programme même si (encore une fois) je crains que ce ne soit pas celle qui sera faite. Malgré une amputation importante, il subsiste deux paragraphes intitulés "caractéristiques de position" et "approche des caractéristiques de dispersion". La médiane a survécu et on a vu

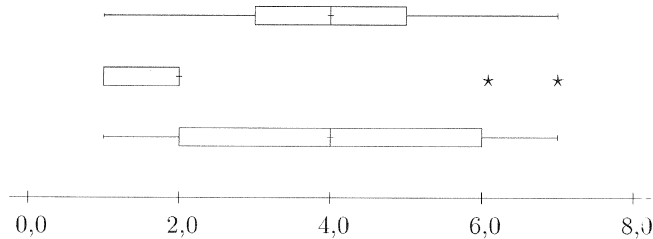
apparaître l'étendue (maximum-minimum) avec la précision "on introduira l'étendue de la série ou de la partie obtenue après élimination de valeurs extrêmes". Cette phrase sibylline conduira de nombreux professeurs à effectuer la soustraction précédente et à conclure que l'idée donnée par cette valeur reflète bien mal la dispersion de l'ensemble des valeurs. Ainsi les trois séries suivantes ont la même étendue :

1	1	*
2	2	**
3	3	***
4	6	*****
5	3	***
6	2	**
7	1	*

1	8	*****
2	8	*****
3	0	
4	0	
5	0	
6	1	*
7	1	*

1	2	**
2	2	**
3	2	**
4	2	**
5	2	**
6	2	**
7	2	**

Par contre, le programme laisse la possibilité d'enlever des valeurs extrêmes (sans dire combien ni pourquoi!). On peut enlever d'autorité 5%, 10% des valeurs à chaque extrémités ou, encore mieux, 25% ce qui laisse la moitié centrale de la série. Le nouveau minimum est alors le premier quartile de la série de départ et le maximum est le troisième quartile. L'écart entre les deux (l'étendue de la nouvelle série) correspond à l'écart inter-quartile de la série de départ ce qui permet de dessiner des boîtes à moustaches<sup>1</sup> pour représenter une série, ou mieux, pour comparer deux séries<sup>2</sup> et de répondre ainsi à une demande du programme "on pourra ainsi aborder la comparaison de deux séries en calculant quelques caractéristiques de position et de dispersion ou en interprétant des représentations graphiques données". Par exemple, pour les trois séries précédentes :



On peut donc aller plus loin que le calcul d'une moyenne ou d'une médiane ou le tracé d'un histogramme au collège. Encore faut-il que ces calculs ou ces graphiques servent à quelque chose, c'est-à-dire à répondre à une question. C'est ce que je vais essayer de montrer sur un exemple avec l'objectif de développer "votre attitude d'auditeurs responsables vis à vis des statistiques".

1. Pour la construction des graphiques en boîte et un exemple détaillé d'utilisation, voir J.C. Girard, "La médiane, pour quoi faire", *Enseigner la Statistique du CM à la Seconde. Pourquoi? Comment?*, Groupe Probabilités et Statistique, IREM de Lyon, 1998.

2. Le tableau synoptique pour l'ensemble du collège précise en tout et pour tout pour la classe de 3<sup>ème</sup> ; "Approche de la comparaison de séries statistiques". Ceci semble donc l'objectif de fin de collège.

## Mais où sont les neiges d'antan<sup>3</sup>?

### Réflexions générales

Une étude statistique ne fonctionne pas à vide à partir d'une série de nombres sur lesquels on serait amené à faire des calculs ou à faire des graphiques sans savoir pourquoi on les fait ni ce qu'on peut en conclure quand on a terminé.

Une étude statistique est une chaîne qui a pour origine un problème ou une question. Le cœur de l'étude consiste à traiter par des outils mathématiques des mesures obtenues à partir de l'observation d'une variable ou par l'utilisation d'un instrument. Ceci pose le problème des erreurs de mesure ainsi que celui du choix de la variable et de l'instrument pour qu'ils permettent effectivement de répondre à la question posée. Le dernier maillon est constitué par une conclusion finale (peut-être provisoire) ou une décision (qui peut consister à ne rien faire ou à ne pas énoncer d'affirmation péremptoire).

### Le problème

La question qui nous servira de point de départ est la suivante : "La planète se réchauffe-t-elle?". La question est d'importance puisque, dans l'affirmative, les simulations ont montré qu'une élévation de la température de 0,5°C aurait des conséquences désastreuses. Il serait bien sûr présomptueux de vouloir trancher alors que les experts sont en désaccord. Notre objectif sera plus modestement d'illustrer une méthode et certains concepts statistiques étudiés au collège.

### Choix de la variable

Quelle que soit la variable choisie, elle devra faire l'objet de mesure sur une période assez longue (plusieurs dizaines d'années). Il sera donc nécessaire d'utiliser les résultats d'observations faites par d'autres bien que cela ne soit pas sans danger, car on ne sait pas exactement comment elle ont été obtenues. Il convient donc que ces mesures soient fiables et comparables sur une longue période. C'est difficile mais pas désespéré ! On peut se rappeler, par exemple, que Kepler a découvert les lois qui portent son nom sur le mouvement des planètes<sup>4</sup> à partir d'une étude statistique des mesures effectuées plusieurs années auparavant par Tycho-Brahé (1546-1601).

La variable qui vient à l'esprit naturellement pour répondre à notre question est la température en un même lieu. Il existe, en effet, des statistiques sur les températures à Paris depuis bien avant la Révolution. Elles permettent, par exemple, de faire apparaître des modifications du climat comme celles qui correspondent au "petit âge glaciaire". Mais les changements intervenus au cours de ce siècle (s'ils s'avèrent se confirmer) ne sont pas de cette amplitude. Une première difficulté serait de déterminer si l'on va privilégier les moyennes mensuelles, les maxima, les

---

3. F. Villon, *Ballade des dames du temps jadis*.

4. *Astronomia Nova 1609, Harmonices Mundi 1618*.

minima ... Une autre difficulté, bien plus importante, est liée aux instruments de mesure. Les thermomètres du début du siècle n'avaient pas la même précision que les instruments actuels. Ils n'étaient pas construits dans les mêmes matériaux et les méthodes de mesure n'étaient pas standardisées. Une erreur systématique de 1°C (importante) risque alors de passer inaperçue ou au contraire d'être trompeuse.

Pour toutes ces raisons (et aussi parce que les statistiques sont disponibles!) nous avons choisi de travailler sur une autre variable : le nombre de jours de neige annuel<sup>5</sup>. Les observations peuvent être délicates certains jours, la différence entre pluie et neige n'est pas toujours facile, mais ni plus ni moins qu'il y a 100 ans et les mesures ne seront pas entachées d'erreurs systématiques dues aux instruments, l'œil est resté le même depuis le début du siècle.

Le choix de cette variable, ou de toute autre, peut (et doit) être critiqué car de la pertinence (ou non) de cette variable avec la question posée, dépendra la pertinence de la réponse apportée. Aucun calcul mathématique, aussi rigoureux qu'il soit, ne pourra compenser le choix d'une mauvaise variable et d'un mauvais instrument de mesure.

## Les données

Pour le tableau de la page suivante, qui donne les nombres de jours de neige à Paris (Parc Montsouris) depuis le début du siècle<sup>6</sup>, l'ordinateur fournit les résultats suivants :

N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV
98	14.296	13.000	13.955	7.984
MIN	MAX	Q1	Q3	
1.000	36.000	8.000	19.000	

N : Effectif      Mean : Moyenne      Median : Médiane  
 TRMEAN : Moyenne Tronquée à 5%      STDEV : Écart Type  $\sigma_{n-1}$   
 MIN : Minimum      MAX : Maximum  
 Q1 : Premier Quartile      Q3 : Troisième Quartile

---

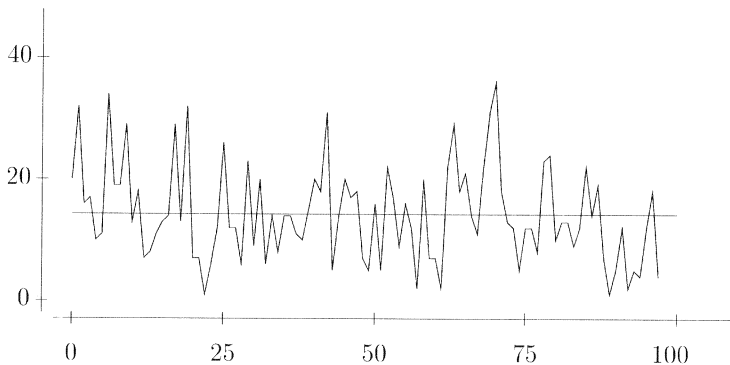
5. En fait la variable qui fait l'objet de l'observation est une variable qualitative à deux modalités : neige ou pas de neige dans la journée, à partir de laquelle on construit la variable quantitative "nombre de jours de neige dans l'année".

6. source QUID 1998, Éditions Robert Laffont

1900	20	1920	7	1940	20	1960	7	1980	10
1901	32	1921	7	1941	18	1961	2	1981	13
1902	16	1922	1	1942	31	1962	22	1982	13
1903	17	1923	6	1943	5	1963	29	1983	9
1904	10	1924	12	1944	14	1964	18	1984	12
1905	11	1925	26	1945	20	1965	21	1985	22
1906	34	1926	12	1946	17	1966	14	1986	14
1907	19	1927	12	1947	18	1967	11	1987	19
1908	19	1928	6	1948	7	1968	22	1988	7
1909	29	1929	23	1949	5	1969	31	1989	1
1910	13	1930	9	1950	16	1970	36	1990	5
1911	18	1931	20	1951	5	1971	18	1991	12
1912	7	1932	6	1952	22	1972	13	1992	2
1913	8	1933	14	1953	17	1973	12	1993	5
1914	11	1934	8	1954	9	1974	5	1994	4
1915	13	1935	14	1955	16	1975	12	1995	12
1916	14	1936	14	1956	12	1976	12	1996	18
1917	29	1937	11	1957	2	1977	8	1997	4
1918	13	1938	10	1958	20	1978	23		
1919	32	1939	15	1959	7	1979	24		

## Explication et analyse

Peut-on répondre à notre question à partir de ces données, et si oui, comment? Il est difficile de voir sur le tableau des valeurs de la série complète si le nombre de jours de neige a diminué ou augmenté au cours de ces années, et de combien. Une première idée serait de représenter graphiquement la variable étudiée en fonction de l'année d'observation (on parle dans ce cas de série chronologique).



Ce graphique ne fait pas apparaître d'évidences!

Une autre possibilité est de partager la série initiale de 98 valeurs en deux séries

de 49, puis comparer ces deux nouvelles séries pour voir s'il y a eu des changements perceptibles entre la première moitié et la deuxième moitié de ce siècle.

	N	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV
00-48	49	15.27	14.00	15.02	7.92
49-97	49	13.33	12.00	12.96	8.01
	MIN	MAX	Q1	Q3	
00-48	1.00	34.00	9.50	19.50	
49-97	1.00	36.00	7.00	18.50	

La comparaison des deux séries s'effectue généralement sur des résumés (résultats du calcul de certains paramètres). Le plus classique est la moyenne qui, comme le rappelle le programme officiel, est sensible aux valeurs "aberrantes" ou extrêmes (on verra plus loin s'il y en a et comment on les détermine). De plus, c'est un paramètre de tendance centrale qui ne tient pas compte de la dispersion des valeurs de la série.

Une réponse à la première critique consiste à examiner la médiane<sup>7</sup> ou la moyenne tronquée. La différence des moyennes est égale à 1,94 est la différence des médianes est à peu près identique puisqu'elle vaut 2 et celle des moyennes tronquées (à 5%) est plus grande puisqu'elle vaut 2,06.

Il semble donc que le nombre de jours de neige dans la première moitié du siècle dépasse de 2 unités celui de la deuxième moitié, en moyenne.

La deuxième critique nous amène à étudier comment les valeurs de la série sont distribuées autour de la moyenne. Une mesure de cette dispersion est l'écart type  $\sigma$  qui est la racine carrée de la variance  $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ . Les deux écarts types sont à peu près égaux ici.

La combinaison de l'écart type et de la moyenne permet de donner un meilleur résumé d'une série statistique mais, là encore, l'idée peut être trompeuse. Par exemple, les quatre séries suivantes<sup>8</sup> ont même moyenne ( $m=4$ ) et même écart type ( $\sigma_{n-1}=1$ ,  $\sigma_n=0,961$ ) :

---

7. Rappel sur la médiane: la médiane est la valeur qui partage la série en deux séries de même effectif. Autrement dit, si l'on range dans l'ordre croissant les  $n$  valeurs de la série, la médiane a pour rang  $\frac{n+1}{2}$ . Si  $n$  est impair, cette valeur est celle du milieu de la série. Si  $n$  est pair, on prend la moyenne des deux valeurs du milieu.

8. D'après un article de *Teaching Statistics*.

Histogram of serie 1 N = 13

Midpoint	Count
2	1 *
3	3 ***
4	4 ****
5	5 *****
6	0

Histogram of serie 3 N = 13

Midpoint	Count
2	1 *
3	2 **
4	7 *****
5	2 **
6	1 *

Histogram of serie 2 N = 13

Midpoint	Count
2	0
3	5 *****
4	4 ****
5	3 ***
6	1 *

Histogram of serie 4 N = 13

Midpoint	Count
2	0
3	6 *****
4	1 *
5	6 *****
6	0

Ces séries ne sont manifestement pas du même type. On pourrait les caractériser par la forme de leur distribution (en J, en cloche, en U) ou par d'autres paramètres.

Par exemple, on peut résumer une série par ses trois quartiles<sup>9</sup>. Ils ont l'avantage d'être des paramètres de position et de fournir en même temps une mesure de la dispersion. En effet, l'écart inter-quartile c'est-à-dire la différence entre le premier et le troisième quartile ( $Q_3-Q_1$ ) est une alternative à l'écart type pour mesurer la dispersion. Moins sensible aux valeurs aberrantes, il est possible, de plus, d'en construire une représentation graphique.

Le calcul des quartiles peut être facilité en représentant la série par un graphique en tiges et feuilles<sup>10</sup>, par exemple pour les hauteurs de neige :

Stem-and-leaf of 00-48 N = 49  
Leaf Unit = 1.0

1	0	1
12	0	56667777889
(16)	1	0011122233344444
21	1	567788899
12	2	00003
7	2	699
4	3	1224

Stem-and-leaf of 49-97 N = 49  
Leaf Unit = 1.0

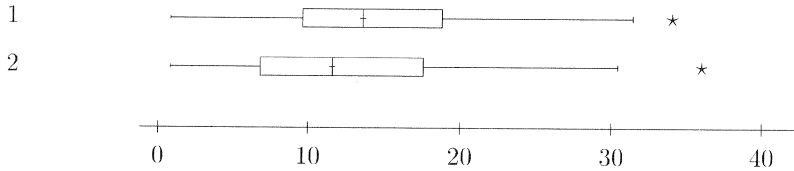
6	0	122244
17	0	55555777899
(14)	1	01222222233344
18	1	6678889
11	2	01222234
3	2	9
2	3	1
1	3	6

On obtient les valeurs des quartiles données par l'ordinateur précédemment.

9. Rappel sur les quartiles : les quartiles sont les valeurs de la série étant classées dans l'ordre croissant de  $x_{(1)}$  à  $x_{(n)}$ ,  $Q_1$  représente la valeur de l'observation de rang  $\frac{(n+1)}{4}$  et  $Q_3$  l'observation de rang  $\frac{3(n+1)}{4}$ . Si ces rangs ne sont pas entiers, on effectue une interpolation.

10. Pour une présentation des graphiques en tiges et feuilles, voir par exemple, J.C. Girard. "Des diagrammes à l'histogramme", *Enseigner la Statistique du CM à la seconde. Pourquoi? Comment?*, Groupe des probabilités et Statistique, IREM de Lyon, 1998.

Les écarts inter-quartiles sont alors de 10 et 11,50. On peut les représenter graphiquement sur un graphique en boîte à moustaches (box and whiskers plot).



Deux valeurs sont déclarées aberrantes et notées \* parce qu'elles se trouvent à plus de 1,5 fois l'écart inter-quartile de  $Q_3$ .

Les quartiles de la première série dépassent respectivement de 2,5 et 1 ceux de la deuxième série.

Les quartiles forment un résumé d'une distribution. Un résumé perd toujours de l'information mais comparer les deux distributions dans leur entier est difficile. On peut le faire, cependant, en accolant les deux graphiques en tiges et feuilles (surtout si les séries ont le même effectif) :

1	0	122244
9887776665	0	55555777899
4444433322211100	1	0122222233344
9988877765	1	6678889
30000	2	01222234
996	2	9
4221	3	1
	3	6

On peut observer que la deuxième série semble être décalée par rapport à la première. Pour des séries d'effectifs différents, on pourrait calculer les déciles<sup>11</sup> qui constituent un résumé de 9 nombres de la série.

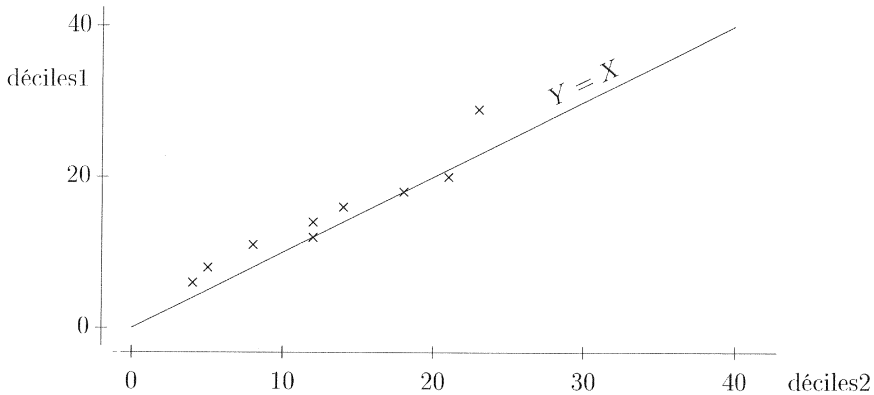
Les résultats pour les deux séries sont :

Décile	10%	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %
1900	6	8	11	12	14	16	18	20	29
1948	4	5	8	12	12	14	18	21	23
1949									
1997									

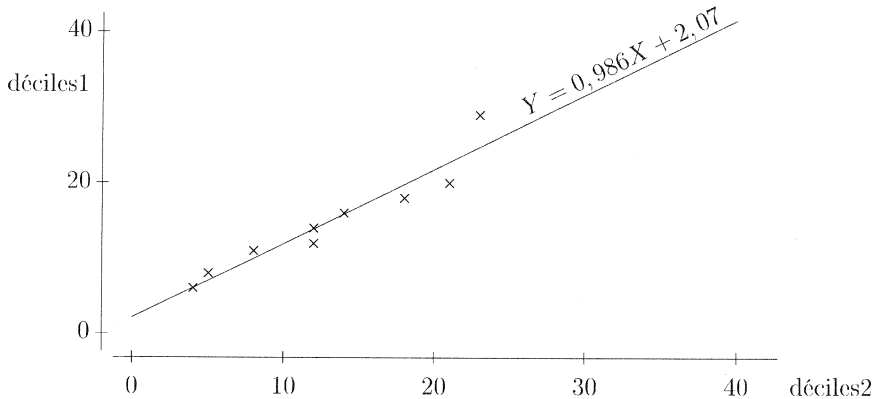
Si les deux séries étaient identiques, leurs déciles seraient égaux. Dans un repère, les points dont les coordonnées sont les déciles des deux séries seraient alignés sur la première bissectrice. On constate sur le graphique que ce n'est pas le cas.

11. Rappel du calcul des déciles. Les  $n$  valeurs de la série étant classées dans l'ordre croissant de  $x_{(1)}$  à  $x_{(n)}$ , les déciles sont les valeurs des observations dont les rangs sont  $\frac{k(n+1)}{10}$ , pour  $k = 1$  à 9. Si ces rangs ne sont pas entiers, on effectue une interpolation.





On constate plutôt que la droite est décalée d'environ deux unités.



La droite des moindres carrés calculée sur ces 9 points a pour équation  $y = 0,986x + 2,07$ . Le coefficient de corrélation vaut 0,954.

## Régression robuste (et simple)

La régression est bien sûr hors de propos au collège mais on peut (encore?) calculer l'équation d'une droite. Le problème de trouver une droite qui passe le plus près possible de tous les points admet plusieurs réponses suivant la manière de définir ce qu'on entend par "plus près". La droite des moindres carrés est une réponse possible. Une alternative consiste à chercher la droite qui passe par le point médian et qui a pour pente la médiane de toutes les pentes obtenues en prenant les points deux à deux. L'ordinateur calcule ces 36 pentes et leur médiane :

N	N*	MEAN	MEDIAN	TRMEAN	STDEV
35	1	1.095	0.889	0.996	0.732
MIN	MAX	Q1	Q3		
0.250	4.500	0.700	1.211		

La pente est donc 0,889. L'ordonnée à l'origine de cette droite est obtenue par le point dont les coordonnées sont les médianes des deux séries à savoir 14 et 12.

$$14 = 0,889 \times 12 + b$$

$$\text{d'où } b = 3,332$$

La droite a donc pour équation  $y = 0,889x + 3,332$ .

Si on prend pour pente la moyenne (ou la moyenne tronquée), soit environ 1, on trouve pour équation  $Y = X + 2$ .

### Conclusion de la partie descriptive

Ceci confirme que chaque valeur de rang  $i$  de la première série est de 2 à 2,5 unités en dessus de la valeur de même rang de la deuxième série.

Autrement dit on a bien, environ, deux jours de neige de moins par an dans la deuxième moitié du 20<sup>ème</sup> siècle.

### Prolongement inférentiel

La question que l'on se pose maintenant est de savoir si la différence de 2 jours que l'on a observée, en moyenne, entre les deux séries est significative ou si elle pourrait être le fruit du hasard alors que le climat n'a pas changé. En effet, même dans cette dernière hypothèse, on observerait des variations d'une année sur l'autre donc d'un demi-siècle sur l'autre. À partir de quelle différence cette variabilité ne suffit-elle plus à expliquer les différences de moyennes et doit-on remettre en cause l'hypothèse de stabilité du climat? Cette question se traite généralement à un niveau Post-Bac par un test d'égalité des moyennes mais une autre méthode peut être envisagée dès le collège.

### Test d'égalité des moyennes

On modélise la situation de la manière suivante : les deux séries sont considérées comme des échantillons de 49 mesures prises sur des années extraites chacune d'un ensemble (une population) d'années. Le test porte sur l'hypothèse ( $H_0$ ) "les deux échantillons ont été extraits de populations dont les moyennes sont égales" ou "la différence des moyennes est nulle". Dans le cas présent ( $H_0$ ) signifie que les climats dans les deux moitiés du siècle sont de même température moyenne. Un test classique d'égalité des moyennes donne les résultats suivants :

```
MTB >TwoSample 95.0 '00-48' '49-97';
SUBC> Alternative 0.
```

```
TWOSAMPLE T FOR 00-40 VS 49-97
```

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
00-48	49	15.27	7.92	1.1
49-97	49	13.33	8.01	1.1

95 PCT CI FOR MU 00-48 - MU 49-97: (-1.3, 5.1)

TTEST MU 00-48 = MU 49-97 (US NE): T= 1.20 P=0.23 DF= 95

Il donne la probabilité d'observer un tel écart sous ( $H_0$ ) et l'intervalle de confiance à 95% pour la différence des deux moyennes.

Dans l'hypothèse d'égalité des moyennes, un écart de 1,94 (en plus ou en moins) a une probabilité de 23%, ce qui n'en fait pas un événement extraordinaire. On ne peut donc rejeter cette hypothèse. La différence des moyennes se situe dans l'intervalle  $[-1,3; 5,1]$  (au niveau de confiance de 95%). Elle n'est donc pas significative.

### La méthode du Bootstrap<sup>12</sup>

Le test précédent requiert des hypothèses qui ne sont pas nécessairement vérifiées ici (indépendance, normalité) et des techniques sophistiquées. Une alternative, envisageable au collège<sup>13</sup>, consiste à répéter plusieurs fois l'opération suivante : construire aléatoirement deux groupes de même effectif dans l'ensemble des 98 valeurs puis calculer la différence de leurs moyennes. Si le résultat dépasse 1,94 (en valeur absolue) avec une fréquence relativement importante, un tel écart ne sera pas révélateur d'une différence entre les deux moitiés du siècle (puisque les groupes ont été faits au hasard, le hasard seul peut l'expliquer). Si, au contraire, cette fréquence est très petite alors le hasard seul ne suffira pas à expliquer un tel écart. Ceci est la base des statistiques inférentielles mais n'est pas simple à comprendre. Il faut d'abord se persuader que les résultats d'un tirage à l'autre ne sont pas les mêmes, certains sont positifs, d'autres sont négatifs, certains sont supérieurs à 1,94 d'autres inférieurs... On est donc confronté à une épreuve aléatoire dont on ne connaît pas l'ensemble des possibles et sur laquelle les calculs sont bien délicats<sup>14</sup>. Seule l'expérimentation est possible (surtout au collège). On peut, par exemple, écrire chacune des 98 valeurs sur un jeton (ou sur une carte) puis après avoir bien mélangé, constituer au hasard deux groupes de même effectif et enfin calculer la différence de leurs moyennes. Voici les résultats obtenus sur 100 tirages (simulés sur un ordinateur) :

12. Voir, par exemple, Arthur Engel, *Les certitudes du hasard*, Aléas Éditeur, Lyon, 1990.

13. Sans vouloir minimiser les difficultés de compréhension mais avec, au contraire, l'objectif de sensibiliser les élèves à différents concepts qu'ils rencontreront plus tard comme le hasard, la variabilité, les tests d'hypothèse, etc.

14. On pourrait calculer la différence des moyennes dans tous les cas (on dit qu'on fait un test des permutations) il y en a  $C_{98}^{49}$  ce qui représente un nombre supérieur à  $10^{28}$

Stem-and-leaf of C37    N = 100

Leaf Unit = 0.10

1	-4	3
6	-3	98730
15	-2	774432000
33	-1	986666554422211100
(18)	-0	8877776665554333100
49	0	00111111222344444568
29	1	00111112333444668
12	2	002333799
3	3	14
1	4	7

Le nombre de valeurs supérieures à 1,94 (en valeur absolue) est 28. Une simulation sur 1 000 tirages a donné un pourcentage de 23,8. Une telle différence n'est donc pas un événement rare sous ( $H_0$ ). Par conséquent, on est amené à refuser l'hypothèse qu'il y a une réelle différence entre les deux moitiés du siècle.

## Conclusion

Les différences apparues dans l'étude descriptive ne sont pas confirmées par l'étude inférentielle. Il convient donc de se méfier de ce que l'on voit sur les graphiques ou des conclusions tirées hâtivement à partir de quelques calculs trop élémentaires.

D'une façon générale, une conclusion (provisoire, la plupart du temps) ne saurait être apportée sans que des résultats convergents soient obtenus par différentes approches.

# STATISTIQUES À PROPOS DES RÉSULTATS D'UN CROSS

Jean-François PICHARD

IREM de ROUEN

Je présente ici une partie du travail fait dans le groupe Statistique de l'IREM de Rouen autour des résultats du cross d'un collège. Cette activité, au sujet d'une épreuve sportive à laquelle ont participé les élèves, permet de traiter l'ensemble des notions de statistique du programme du collège et aussi de réinvestir de nombreuses notions mathématiques, liées à la proportionnalité, notamment dans les graphiques (choix de l'échelle pour l'ajustement du graphique dans la feuille, tracés, ...), et tout particulièrement ici pour les transformations en unités communes.

Les diverses questions peuvent être traitées aux niveaux 4e et 3e (les premières étapes pouvant même être adaptées pour le niveau 5e), voire en seconde pour consolider l'acquisition des outils statistiques qui ont (ou devraient avoir) été vus au collège. On s'est limité strictement aux notions qui sont au programme de collège, utilisant néanmoins les extensions laissées ouvertes par le programme pour obtenir une description plus complète (cas des quartiles et des boîtes à pattes). On fait déterminer plusieurs résumés numériques d'une série, ce qui permet de faire un choix plus raisonné pour s'adapter à la situation étudiée ; en effet, entreprendre une étude statistique a pour objectif de répondre à un certain nombre de questions concernant la population considérée.

## Présentation

Les professeurs d'E.P.S. d'un collège de l'agglomération rouennaise organisent chaque année, au cours du 1er trimestre, un grand cross auquel participent (presque) tous les élèves de l'établissement. Les distances à parcourir dépendent du niveau (6e, 5e, 4e, 3e) et sont différentes pour les filles et les garçons d'un même niveau pour tenir compte du fait, généralement admis, que plus un enfant est âgé plus il courra vite sur une distance donnée, et que les filles sont moins rapides et endurantes que les garçons sur une distance assez longue.

Ainsi il est formé sept catégories parmi l'ensemble des élèves du collège, qui sont répartis suivant les niveaux, pour les distances de parcours suivantes :

6e Filles	1600 m
6e Garçons ; 5e F	1900 m
5e G ; 4e/3e F	2600 m
4e G	2900 m
3e G	3900 m.

Cette épreuve est une compétition chronométrée et il y a un classement individuel des participants par ordre d'arrivée dans chacune des catégories. Ici le caractère statistique étudié est le temps mis par un élève pour effectuer le parcours suivant sa catégorie, ce temps étant exprimé en minutes et secondes.

Chaque niveau (de la 6e à la 3e) étant composé de plusieurs classes, on peut se poser un certain nombre de questions "naturelles" qui sont des comparaisons entre les différents groupes formés sur les critères pris en compte : niveau, sexe, classe. Par exemple, «les garçons sont-ils plus rapides dans une course que les filles?», «les élèves de 4e sont-ils plus rapides que ceux de 5e?», «telle classe dans son ensemble (filles et garçons de la 5e1, par exemple) est-elle meilleure (pour le cross) que telle autre classe de 5e?», etc. Pour cela, il faut regarder quelles sont les opérations à réaliser pour obtenir une description synthétique afin de pouvoir faire des comparaisons et apporter des éléments de réponse à ces questions "naturelles" pour les divers sous-groupes.

Dans les performances enregistrées, on a quelques abandons d'élèves au cours de l'épreuve. Le traitement de ces données manquantes pose un problème difficile, qui n'a pas nécessairement de solution optimale ; il est résolu ici de façon empirique et peut-être pas de la manière la plus adéquate. Par exemple, la méthode utilisée par les professeurs d'E.P.S., pour éviter la difficulté liée à la distance différente pour les filles et les garçons, est de prendre uniquement les rangs, et des moyennes de rangs, pour comparer les classes d'un même niveau, le problème des abandons étant résolu par un rang de pénalité (ici 120). Si on prend la moyenne comme élément milieu, mettre un temps ou rang de pénalité élevé peut modifier beaucoup cette moyenne ; en effet, la moyenne est sensible à une modification des valeurs extrêmes. Pour éviter cela, on peut penser à la médiane qui n'est pas sensible aux valeurs extrêmes ; cependant, comme on le voit à la 2e étape, l'ordre obtenu entre les classes dépend du critère choisi.

L'étude qui suit porte sur le niveau 5e, pour lequel on regarde d'abord ce qui concerne les garçons, puis l'ensemble des élèves du niveau 5e pour des comparaisons filles/garçons, et classes entre elles. La première partie étudie uniquement le niveau 5e Garçons, qui ne comporte pas d'abandon. On étudie différents indicateurs pour chaque classe afin de permettre une première comparaison entre classes. Mais avant d'effectuer les opérations qui conduisent à ces indicateurs, en particulier pour la moyenne arithmétique, il faut d'abord faire une transformation sur les temps de parcours du cross. En effet, ces temps de parcours sont donnés en minutes et secondes ; pour faire des opérations algébriques sur les temps, il faut convertir les temps soit en secondes (ce qui est utilisé ici, et semble le mieux admis par les élèves), soit en minutes décimales.

La première étape peut être commencée en cinquième (sans fréquences cumulées) et faite en quatrième. Le diagramme en barres est un histogramme. Quand on a des valeurs numériques assez nombreuses, comme c'est le cas ici, la représentation de la distribution observée se fait par un histogramme, plutôt que par un diagramme en bâtons des effectifs (ou des fréquences) qui n'est pas très lisible. L'hypothèse pour la construction d'un histogramme est que les valeurs observées dans un intervalle

sont à peu près réparties uniformément sur cet intervalle. Cette même hypothèse est d'ailleurs utilisée pour calculer la moyenne arithmétique de valeurs regroupées par intervalles, où on prend le milieu de chaque intervalle pondéré par le nombre de valeurs qui sont dedans. Si on se place dans l'optique "statistique inférentielle", l'histogramme n'a pas toujours un modèle probabiliste d'une distribution normale ou de Laplace-Gauss qui correspond à un diagramme en cloche. Assez souvent pour des performances sportives, on a un diagramme étalé vers les valeurs associées aux performances moins bonnes.

Dans la deuxième étape, on demande le calcul de la moyenne des temps à partir des moyennes de classes. La situation habituelle de calcul de moyenne que les élèves ont à l'esprit est celle de moyenne simple (i.e. équipondérée) des valeurs, associées à des observations considérées comme de même importance. Faire calculer la moyenne des moyennes des classes et la comparer à la moyenne globale permet d'insister sur le fait qu'une moyenne est toujours pondérée (ici par les effectifs des classes), même si le terme est omis (cas équipondérée).

Dans la deuxième partie, pour faire des comparaisons entre les différents groupes, qui ont des parcours différents, il faut d'abord ramener toutes les performances réalisées à une commune mesure qui pourrait être, par exemple, un parcours "théorique" de 2000 mètres. On va supposer pour pouvoir faire les calculs que, la distance étant assez longue, le parcours est effectué à une vitesse uniforme. Les temps de parcours sur cette distance "théorique" sont donnés en secondes. On met en œuvre la notion de proportionnalité pour associer la durée mise par un élève pour faire le parcours réel à celle qu'il aurait mise sur le parcours "théorique".

Le sens (l'interprétation) qu'on pourrait donner à la moyenne par classe peut être obtenue de la façon fictive suivante : au lieu de faire partir tous les élèves ensemble, on fait une course de relais où le bâton est passé d'un élève à l'autre de la même classe. La classe la plus rapide est alors celle qui a mis, proportionnellement au nombre d'élèves, le moins de temps, c'est-à-dire, dont la moyenne des temps de parcours est la plus petite. Ici la moyenne des temps de parcours est un indicateur approprié car le "temps" est un caractère quantitatif<sup>1</sup>.

Cet indicateur, la moyenne, permet donc une comparaison facile et valable dans le cas où tous les élèves ont le même parcours à faire et qu'il n'y a pas d'abandon. Reste-t-il pertinent lorsqu'il y a des abandons? En outre, même dans le cas simple où tous les participants des classes ont terminé le parcours, auquel cas la moyenne est un indicateur approprié, faire une comparaison entre les classes, c'est mettre un ordre et il peut se produire l'analogie de l'"effet Condorcet", appelé effet de structure<sup>2</sup>. On peut avoir la moyenne des filles et la moyenne des garçons inférieures pour une classe à celles correspondantes d'une autre classe, et cependant, la moyenne globale de la première classe plus élevée que celle de la seconde.

1. voir: Groupe statistique (1987). *Moyennes ... vous avez dit moyenne?*, IREM de ROUEN

2. voir :

– Petit J.L. et Terouane E. (1988). *Résumons-nous*, Ellipses ;

Groupe statistique (1989). *Les enquêtes à questions nominales*, IREM de ROUEN

Par exemple, si on a les moyennes :

pour la classe 1 :

$$m_{1G} = 600 \text{ sec pour 7 garçons et } m_{1F} = 660 \text{ sec pour 12 filles ;}$$

pour la classe 2 :

$$m_{2G} = 610 \text{ sec pour 12 garçons et } m_{2F} = 670 \text{ sec pour 7 filles.}$$

La classe 1 a des performances meilleures à la fois pour les garçons et pour les filles que la classe 2, mais si on prend la moyenne globale de chaque classe, cet ordre est inversé !

L'utilisation par les professeurs d'E.P.S. du rang moyen dans chaque niveau permet de gommer cet effet lors de l'agrégation de groupes de moyennes et de tailles différentes. On pourrait aussi utiliser la notion de score ou variable centrée réduite, mais cela sortirait du cadre du programme.

Ensuite, pour déterminer si la différence observée entre les moyennes est significative (ce qui correspond, en fait, à un test d'hypothèse), il faut avoir un indicateur de dispersion. On peut pour cela utiliser une description par les boîtes à pattes simples construites avec les statistiques d'ordre : la médiane, les quartiles et le minimum et le maximum. Le programme de 3e permet cette construction ; un quartile est la médiane de la demi-population soit au-dessus ou au-dessous de la médiane, et l'écart inter-quartile, qui est un indicateur de dispersion correct, est l'étendue des valeurs entre les deux quartiles. Notons que la moitié de l'écart inter-quartile était le premier indicateur de dispersion utilisé (dès le *XVIII<sup>me</sup>* siècle) sous le nom d'erreur probable ; cela correspond au fait que la moitié des observations ont un écart à la valeur milieu (la médiane) inférieure à cette erreur probable. Les boîtes à pattes rendent possible par superposition de faire une comparaison globale des différents groupes.

Les fiches et les tableaux de résultats sont donnés à la suite. Les tableaux donnés en premier aux élèves ne comportaient que les indications de classe, de temps en minutes et secondes et le rang dans le niveau ; les élèves doivent les compléter et obtenir les valeurs des tableaux 2G et 2F donnés ci-après.



## PARTIE I

## Activités sur les résultats du cross. Fiche élève.

## Matériel :

feuilles de copies doubles 21×29.7 grands carreaux	brouillon
papier millimétré transparent	calculatrice

Voici les résultats du cross du collège, qui s'est couru en octobre 98. Les résultats concernent un niveau, ici les classes de 5e Garçons, dont les temps sont donnés dans le tableau 1.G.

On veut faire une description de l'ensemble des performances.

1<sup>ère</sup> étape : diagramme en barres et cumulatif

## 1. Remplir le tableau :

intervalle de temps	$9 < T \leq 11$	$11 < T \leq 13$	$13 < T \leq 15$
effectif			

$15 < T \leq 17$	$17 < T \leq 19$	$19 < T \leq 21$	$21 < T \leq 23$

## 2. Effectifs et fréquences cumulés.

- L'effectif cumulé (de même que la fréquence cumulée) est à prendre en extrémité de l'intervalle de temps. Il est égal à l'effectif cumulé précédent plus l'effectif de l'intervalle de temps en cours.

Le nombre d'élèves qui ont mis moins de 9 min est : 0

Le nombre d'élèves qui ont mis moins de 11 min est :  $0 + 14 = 14$

Le nombre d'élèves qui ont mis moins de 13 min est :  $14 + 31 = 45$

et ainsi de suite.

- La fréquence cumulée est l'effectif cumulé correspondant divisé par l'effectif total qui vaut ici 98. La fréquence cumulée est la plupart du temps exprimée en %.

- Terminer le tableau :

temps	9	11	13	15	17	19	21	23
effectif	0	14	31					
effectif cumulé	0	14	45					
fréquence cumulée	0	$\frac{14}{98}$	$\frac{45}{98}$					
% au dixième près	0	14,3	45,9					

### 3. Graphique en barres

Sur une feuille de copie, on porte

- \* les temps en abscisses, un carreau pour une minute
- \* les effectifs en ordonnées, un demi carreau pour un élève.

Le graphique obtenu s'appelle un diagramme en barres. Les graphiques ont souvent l'axe des abscisses qui ne commencent pas à 0. Ici c'est à 9 min.

### 4. Diagramme cumulatif

Sur une feuille de papier millimétré, on porte

- les temps en abscisses, 1 cm pour une minute
- les fréquences cumulées en ordonnées sur l'axe gradué de 0% à 100% sur 10 cm.

Placer les points sur le graphique et les joindre par des segments de droites.

*2<sup>ème</sup> étape : tri par classe et moyenne*

On cherche maintenant à comparer les classes d'un même niveau, par exemple pour pouvoir répondre à la question : «la classe de 5e1 est-elle meilleure que celle de 5e8? ». Pour cela on peut utiliser des valeurs "milieux" ; par exemple, la moyenne des temps mis par les élèves d'une classe, ou le rang moyen d'arrivée.

## 1. Moyenne de classe

### Procédure :

- repérer en soulignant ou entourant en vert dans le tableau 1.G les indications sur les élèves de la classe dont vous vous occupez.
- convertir chaque temps entouré exprimé en min et s en temps en s. Par exemple, le plus rapide a effectué le parcours en 9 min 50 s.  
On transforme :  $9 \text{ min } 50 \text{ s} = 9 \times 60 \text{ s} + 50 \text{ s} = 590 \text{ s}$ .
- calculer alors la moyenne des temps des élèves de la classe dont vous vous occupez.

## 2. Moyenne de moyennes

- collecte des moyennes par classe

classe	5 <sup>e</sup> 1	5 <sup>e</sup> 2	5 <sup>e</sup> 3	5 <sup>e</sup> 4	5 <sup>e</sup> 5	5 <sup>e</sup> 6	5 <sup>e</sup> 7	5 <sup>e</sup> 8	5 <sup>e</sup> 9	5 <sup>e</sup> 10
moyenne										

- calcul de la moyenne des moyennes. Celle-ci est : . . . . .
- calcul de la moyenne globale des temps de tous les élèves. partir du tableau distribué, on peut faire les sommes des temps par paquets de 10. La moyenne globale est de : . . . . .

Expliquer

## 3. Rang moyen par classe

### Procédure :

- reprenre le repérage en vert des élèves de la classe dont vous êtes chargé.
- faire la somme des rangs de ces élèves.
- calculer le rang moyen de la classe.
- collecte des rangs moyens par classe

moyenne	5 <sup>e</sup> 1	5 <sup>e</sup> 2	5 <sup>e</sup> 3	5 <sup>e</sup> 4	5 <sup>e</sup> 5	5 <sup>e</sup> 6	5 <sup>e</sup> 7	5 <sup>e</sup> 8	5 <sup>e</sup> 9	5 <sup>e</sup> 10
rang moyen										

## 4. Comparaison des classes

Ordonner les classes suivant chacun des deux critères “moyenne” et “rang moyen”. Les ordres sont-ils les mêmes?

### 3<sup>ème</sup> étape : diagramme cumulatif

Pour comparer deux classes, on peut chercher s'il y a le même pourcentage d'élèves qui ont mis moins de 700 s, moins de 750 s, etc., pour faire le parcours.

On trace le diagramme cumulatif, qui est ici un graphique en escalier. Le premier point est relié à l'axe des abscisses par un segment vertical. On fait ensuite un segment horizontal partant de ce point vers les abscisses croissantes jusqu'à la valeur du second temps; on fait alors un segment vertical pour rejoindre le second point, puis on continue jusqu'au dernier point d'ordonnée 100%.

Si la courbe en escalier d'une classe A est complètement au-dessous de celle d'une autre classe B, cela veut dire que les élèves de la classe A ont globalement mis plus de temps pour faire le parcours que les élèves de la classe B.

Faire le diagramme cumulatif de la classe dont vous avez la charge.

On prendra une même échelle sur l'axe des abscisses : 5 cm pour 100 s, sur une feuille de papier millimétré. Cela permettra de faire la comparaison entre les classes.

### 4<sup>ème</sup> étape : médiane (pour les 3e)

*Définition de la médiane :*

La médiane est une valeur du caractère (ici le caractère qui nous intéresse est le temps de parcours) telle qu'il y a autant d'individus qui ont fait un temps inférieur que d'individus qui ont fait un temps supérieur. Donc pour obtenir la médiane, on range les valeurs par ordre croissant. S'il y a un nombre impair de valeurs, la médiane est la valeur du milieu. S'il y en a un nombre pair, par convention la médiane est le milieu de l'intervalle médian.

Déterminer la médiane des temps de la classe dont vous avez la charge, puis la médiane pour l'ensemble des 5e Garçons.

### Utilisation du diagramme cumulatif.

- Sur le diagramme cumulatif (étape 1 ou 3), les fréquences sont portées en ordonnées. La médiane étant une valeur qui partage le groupe en deux parties égales, on trace une droite horizontale d'ordonnée 50%.
- Dans le cas de l'étape 3, cette droite coupe la courbe cumulative; si c'est sur un segment vertical, l'abscisse correspondante est la valeur de la médiane; si c'est sur un segment horizontal, on prend par convention comme médiane l'abscisse du milieu de ce segment.
- Dans le cas de l'étape 1, cette droite coupe la courbe cumulative associée au partage en intervalles de temps en un point dont l'abscisse est la médiane.

Retrouver la médiane pour la classe dont vous avez la charge, avec le diagramme cumulé de l'étape 3, puis pour l'ensemble des 5e Garçons, avec le diagramme cumulé de l'étape 1.

### Comparaison des classes.

Collecte des valeurs des médianes par classe

classe	5 <sup>e</sup> 1	5 <sup>e</sup> 2	5 <sup>e</sup> 3	5 <sup>e</sup> 4	5 <sup>e</sup> 5	5 <sup>e</sup> 6	5 <sup>e</sup> 7	5 <sup>e</sup> 8	5 <sup>e</sup> 9	5 <sup>e</sup> 10
médiane										

Ordonner les classes suivant les valeurs des médianes. «L'ordre des classes est-il le même que celui pour les critères "moyenne" et "rang moyen"?» (voir 2<sup>me</sup> étape).

5<sup>ème</sup> étape: *quartiles (pour les 3e)*

*Définition des quartiles:*

Les quartiles sont des valeurs du caractère qui séparent l'ensemble des valeurs rangées en 4 parties égales. En particulier, la médiane est le deuxième quartile. On prend la même convention pour déterminer les quartiles que pour déterminer la médiane.

### Utilisation du diagramme cumulé.

- Sur le diagramme cumulé, les fréquences sont portées en ordonnées. Un quartile étant une valeur qui partage le groupe en quatre parties égales, on trace des droites horizontales d'ordonnées 25% (Q1), 50% (médiane) et 75% (Q3). Chacune de ces droites coupe la courbe cumulative.

Dans le cas de l'étape 3, si c'est sur un segment vertical, l'abscisse correspondante est la valeur du quartile; si c'est sur un segment horizontal, on prend par convention comme quartile l'abscisse du milieu de ce segment.

- Dans le cas de l'étape 1, chacune de ces droites coupe la courbe cumulative, associée au partage en intervalles de temps, en un point dont l'abscisse est un quartile.

Déterminer les quartiles des temps de la classe dont vous avez la charge, puis les quartiles pour l'ensemble des 5e Garçons.

6<sup>ème</sup> étape: *Construction d'une boîte à pattes (pour les 3e, extension)*

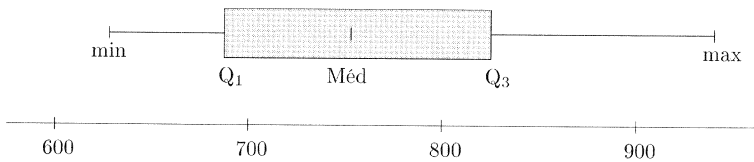
C'est un graphique qui est formé à partir de certaines statistiques d'ordre, le minimum, Q1, la médiane, Q3 et le maximum. Il permet, par superposition des boîtes pour différentes classes, de comparer visuellement les résultats globaux de ces classes.

*Méthode de construction d'une boîte à pattes.*

On trace d'abord l'axe des temps en abscisses en déterminant l'échelle avec l'étendue (voir 3e étape), afin que le graphique tienne dans la feuille. On repère sur cet axe le minimum, le maximum, la médiane, les quartiles  $Q_1$  et  $Q_3$ . On fait un rectangle (la boîte) dont les côtés gauche et droit ont pour abscisses  $Q_1$  et  $Q_3$  respectivement.

On place alors à l'intérieur un segment qui a pour abscisse la médiane. On trace ensuite les pattes qui sont des segments parallèles à l'axe des abscisses, coupant les côtés gauche et droit en leurs milieux, depuis le minimum jusqu'à  $Q_1$ , puis depuis  $Q_3$  jusqu'au maximum.

Exemple :



Tracer sur papier millimétré transparent la boîte à pattes pour la classe dont vous avez la charge.

Par transparence on peut comparer facilement les différentes classes.

## PARTIE II

## Comparaison des performances Garçon - Filles

**Présentation :**

Au cours du cross du collège, en 5e, les garçons ont un parcours de 2600 mètres et les filles un parcours de 1900 mètres. Pour pouvoir comparer les résultats des élèves d'une même classe de 5e ou des garçons par rapport aux filles sur l'ensemble du niveau 5e, on ramène d'abord toutes les performances réalisées à celles sur une même distance qui peut être, par exemple, un parcours "théorique" de 2000 mètres.

*1<sup>ère</sup> étape : calcul de la performance "théorique"*

On suppose pour cela que le parcours est effectué avec une vitesse uniforme, le temps de parcours est ainsi proportionnel à la longueur. Si on désigne par  $V$  le vitesse constante,  $T$  le temps de parcours et  $D$  la distance à parcourir, on a  $D = V \times T$ .

Pour calculer le temps théorique, on fera alors un tableau de proportionnalité. Par exemple, pour l'élève arrivé(e) premier(e), on a :

garçon	longueur	2600 m	2000m
	temps	590 s	? = 454 s

fille	longueur	1900 m	2000m
	temps	480 s	? = 505 s

Pour chaque groupe d'élèves (pour la dizaine fixée) :

- calculer les valeurs des temps théoriques pour les Filles et pour les Garçons
- les reporter sur les tableaux T1.F et T1.G

*2<sup>ème</sup> étape : calcul des moyennes*

Les calculs portent sur les performances des filles, puis des garçons :

Filles

- \* Calculer la moyenne des temps théoriques (tableau T2.F)

On indique que, sur 1900 m, la moyenne des temps pour les filles est de 631,10 s.

- \* Convertir cette moyenne en temps théorique sur 2000 m. Que doit-on constater?

Garçons

- \* Effectuer le même travail sur le tableau T2.G (la moyenne des temps réels pour les garçons est de 809,24 s sur 2600 m).

*3<sup>ème</sup> étape : calcul des médianes*

Filles

- \* Donner la médiane des temps réels sur le parcours de 1900 m (4<sup>e</sup> colonne du tableau T2.F)

- \* Donner la médiane des temps théoriques (5<sup>e</sup> colonne du tableau T2.F)
- \* Convertir la médiane des temps réels sur 1900 m en médiane des temps théoriques sur 2000 m. Que doit-on constater?

Garçons

- \* Effectuer le même travail sur le tableau T2.G

*4<sup>ème</sup> étape: comparaison des performances théoriques sur 2000 m des filles et garçons d'une classe*

- a. repérer en soulignant ou entourant en vert dans le tableau les indications sur les élèves de la classe dont vous vous occupez.
- b. combien y a-t-il de filles? . . . . . , de garçons? . . . . .
- c. calculer la moyenne des temps des élèves de la classe dont vous vous occupez.  
pour les filles:  $m_F = \dots\dots\dots$   
pour les garçons:  $m_G = \dots\dots\dots$
- d. trouver la médianes des temps des élèves de la classe dont vous vous occupez  
pour les filles: . . . . .  
pour les garçons: . . . . .



Tableau T2.G					Tableau T2.G				
5 <sup>e</sup> Garçons					5 <sup>e</sup> Garçons				
Temps sur 2600 m					Temps sur 2600 m				
Rang	Classe	Temps min s	Temps en s	Temps /2000m	Rang	Classe	Temps min s	Temps en s	Temps /2000m
1	5 <sup>e</sup> 9	9' 50"	590	454	41	5 <sup>e</sup> 7	12' 55"	775	596
2	5 <sup>e</sup> 8	10' 09"	609	468	42	5 <sup>e</sup> 9	12' 57"	777	598
3	5 <sup>e</sup> 8	10' 10"	610	469	43	5 <sup>e</sup> 7	12' 58"	778	598
4	5 <sup>e</sup> 8	10' 13"	613	472	44	5 <sup>e</sup> 1	12' 58"	778	598
5	5 <sup>e</sup> 1	10' 25"	625	481	45	5 <sup>e</sup> 8	12' 00"	780	600
6	5 <sup>e</sup> 6	10' 31"	631	485	46	5 <sup>e</sup> 3	13' 02"	782	602
7	5 <sup>e</sup> 8	10' 42"	642	494	47	5 <sup>e</sup> 2	12' 03"	783	602
8	5 <sup>e</sup> 7	10' 45"	645	496	48	5 <sup>e</sup> 3	13' 06"	786	605
9	5 <sup>e</sup> 6	10' 45"	645	496	49	5 <sup>e</sup> 5	13' 08"	788	606
10	5 <sup>e</sup> 5	10' 47"	647	498	50	5 <sup>e</sup> 4	13' 10"	790	608
11	5 <sup>e</sup> 2	10' 50"	650	500	51	5 <sup>e</sup> 5	13' 11"	791	608
12	5 <sup>e</sup> 7	10' 52"	652	502	52	5 <sup>e</sup> 7	13' 13"	793	610
13	5 <sup>e</sup> 5	10' 53"	653	502	53	5 <sup>e</sup> 4	13' 18"	798	614
14	5 <sup>e</sup> 5	10' 55"	655	504	54	5 <sup>e</sup> 2	13' 35"	815	627
15	5 <sup>e</sup> 1	11' 02"	662	509	55	5 <sup>e</sup> 4	13' 36"	816	628
16	5 <sup>e</sup> 8	11' 04"	664	511	56	5 <sup>e</sup> 7	13' 37"	817	628
17	5 <sup>e</sup> 4	11' 05"	665	512	57	5 <sup>e</sup> 9	13' 39"	819	630
18	5 <sup>e</sup> 8	11' 11"	671	516	58	5 <sup>e</sup> 7	13' 40"	820	631
19	5 <sup>e</sup> 10	11' 12"	672	517	59	5 <sup>e</sup> 9	13' 43"	823	633
20	5 <sup>e</sup> 2	11' 12"	673	518	60	5 <sup>e</sup> 2	13' 45"	825	635
21	5 <sup>e</sup> 6	11' 14"	674	518	61	5 <sup>e</sup> 5	13' 47"	827	636
22	5 <sup>e</sup> 9	11' 23"	683	525	62	5 <sup>e</sup> 4	13' 48"	828	637
23	5 <sup>e</sup> 6	11' 29"	689	530	63	5 <sup>e</sup> 6	14' 13"	853	656
24	5 <sup>e</sup> 2	11' 45"	705	542	64	5 <sup>e</sup> 3	14' 13"	853	656
25	5 <sup>e</sup> 5	11' 46"	706	543	65	5 <sup>e</sup> 10	14' 15"	855	658
26	5 <sup>e</sup> 3	11' 47"	707	544	66	5 <sup>e</sup> 10	14' 17"	857	659
27	5 <sup>e</sup> 7	11' 48"	708	545	67	5 <sup>e</sup> 5	14' 18"	858	660
28	5 <sup>e</sup> 10	12' 02"	722	555	68	5 <sup>e</sup> 6	14' 19"	859	661
29	5 <sup>e</sup> 5	12' 04"	724	557	69	5 <sup>e</sup> 5	14' 21"	861	662
30	5 <sup>e</sup> 5	12' 05"	725	558	70	5 <sup>e</sup> 8	14' 24"	864	665
31	5 <sup>e</sup> 8	12' 13"	733	564	71	5 <sup>e</sup> 7	14' 29"	869	668
32	5 <sup>e</sup> 4	12' 30"	750	577	72	5 <sup>e</sup> 5	14' 40"	880	677
33	5 <sup>e</sup> 3	12' 38"	758	583	73	5 <sup>e</sup> 3	14' 50"	890	685
34	5 <sup>e</sup> 9	12' 40"	760	585	74	5 <sup>e</sup> 4	14' 52"	892	686
35	5 <sup>e</sup> 7	12' 45"	763	587	75	5 <sup>e</sup> 7	15' 02"	902	694
36	5 <sup>e</sup> 3	12' 44"	764	588	76	5 <sup>e</sup> 2	15' 03"	903	695
37	5 <sup>e</sup> 1	12' 50"	770	592	77	5 <sup>e</sup> 7	15' 07"	907	698
38	5 <sup>e</sup> 4	12' 51"	771	593	78	5 <sup>e</sup> 5	15' 09"	909	699
39	5 <sup>e</sup> 1	12' 52"	772	594	79	5 <sup>e</sup> 9	15' 10"	910	700
40	5 <sup>e</sup> 3	12' 53"	773	595	80	5 <sup>e</sup> 3	15' 29"	929	715

Tableau T2.G					Tableau T2.F				
5 <sup>e</sup> Garçons					5 <sup>e</sup> Filles				
Temps sur 2600 m					Temps sur 1900 m				
Rang	Classe	Temps min s	Temps en s	Temps /2000m	Rang	Classe	Temps min s	Temps en s	Temps /2000m
81	5 <sup>e</sup> 6	15' 34"	934	718	1	5 <sup>e</sup> 10	8' 00"	480	505
82	5 <sup>e</sup> 5	15' 35"	935	719	2	5 <sup>e</sup> 5	8' 07"	487	513
83	5 <sup>e</sup> 3	15' 38"	938	722	3	5 <sup>e</sup> 10	8' 09"	489	515
84	5 <sup>e</sup> 7	15' 39"	939	722	4	5 <sup>e</sup> 3	8' 10"	490	516
85	5 <sup>e</sup> 6	15' 45"	945	727	5	5 <sup>e</sup> 2	8' 26"	506	533
86	5 <sup>e</sup> 3	15' 51"	951	732	6	5 <sup>e</sup> 10	8' 27"	507	534
87	5 <sup>e</sup> 5	15' 51"	951	732	7	5 <sup>e</sup> 4	8' 28"	508	535
88	5 <sup>e</sup> 2	16' 02"	962	740	8	5 <sup>e</sup> 4	8' 30"	510	537
89	5 <sup>e</sup> 6	16' 14"	974	749	9	5 <sup>e</sup> 2	8' 34"	514	541
90	5 <sup>e</sup> 9	16' 20"	980	754	10	5 <sup>e</sup> 9	8' 35"	515	542
91	5 <sup>e</sup> 1	16' 39"	999	768	11	5 <sup>e</sup> 2	8' 38"	518	545
92	5 <sup>e</sup> 8	16' 40"	1000	769	12	5 <sup>e</sup> 10	8' 43"	523	551
93	5 <sup>e</sup> 1	16' 49"	1009	776	13	5 <sup>e</sup> 1	8' 43"	523	551
94	5 <sup>e</sup> 10	16' 54"	1014	780	14	5 <sup>e</sup> 3	8' 43"	523	551
95	5 <sup>e</sup> 4	16' 56"	1016	782	15	5 <sup>e</sup> 4	8' 47"	527	555
96	5 <sup>e</sup> 9	19' 00"	1140	877	16	5 <sup>e</sup> 2	8' 49"	529	557
97	5 <sup>e</sup> 10	21' 34"	1294	995	17	5 <sup>e</sup> 4	8' 50"	530	558
98	5 <sup>e</sup> 10	22' 34"	1354	1042	18	5 <sup>e</sup> 3	8' 51"	531	559
99		Abs			19	5 <sup>e</sup> 4	9' 01"	541	569
					20	5 <sup>e</sup> 9	9' 02"	542	571
					21	5 <sup>e</sup> 4	9' 04"	544	573
					22	5 <sup>e</sup> 5	9' 05"	545	574
					23	5 <sup>e</sup> 2	9' 07"	547	576
					24	5 <sup>e</sup> 4	9' 07"	547	576
					25	5 <sup>e</sup> 4	9' 11"	551	580
					26	5 <sup>e</sup> 4	9' 12"	552	581
					27	5 <sup>e</sup> 8	9' 13"	553	582
					28	5 <sup>e</sup> 8	9' 14"	554	583
					29	5 <sup>e</sup> 9	9' 35"	575	605
					30	5 <sup>e</sup> 7	9' 41"	581	612
					31	5 <sup>e</sup> 9	9' 42"	582	613
					32	5 <sup>e</sup> 2	9' 44"	584	615
					33	5 <sup>e</sup> 10	9' 44"	584	615
					34	5 <sup>e</sup> 3	9' 45"	585	616
					35	5 <sup>e</sup> 7	9' 50"	590	621
					36	5 <sup>e</sup> 7	10' 00"	600	632
					37	5 <sup>e</sup> 7	10' 02"	602	634
					38	5 <sup>e</sup> 6	10' 04"	604	636
					39	5 <sup>e</sup> 7	10' 06"	606	638
					40	5 <sup>e</sup> 7	10' 07"	607	639

Tableau T2.F					Tableau T2.F				
5 <sup>e</sup> Filles					5 <sup>e</sup> Filles				
Temps sur 1900 m					Temps sur 1900 m				
Rang	Classe	Temps min s	Temps en s	Temps /2000m	Rang	Classe	Temps min s	Temps en s	Temps /2000m
41	5 <sup>e</sup> 6	10' 14"	614	646	81	5 <sup>e</sup> 1	11' 47"	707	744
42	5 <sup>e</sup> 3	10' 18"	618	651	82	5 <sup>e</sup> 6	11' 49"	709	746
43	5 <sup>e</sup> 1	10' 19"	619	652	83	5 <sup>e</sup> 6	11' 50"	710	747
44	5 <sup>e</sup> 5	10' 21"	621	654	84	5 <sup>e</sup> 10	12' 06"	726	764
45	5 <sup>e</sup> 2	10' 22"	622	655	85	5 <sup>e</sup> 10	12' 24"	744	783
46	5 <sup>e</sup> 6	10' 25"	625	658	86	5 <sup>e</sup> 8	12' 25"	745	784
47	5 <sup>e</sup> 4	10' 29"	629	662	87	5 <sup>e</sup> 5	12' 42"	762	802
48	5 <sup>e</sup> 4	10' 32"	632	665	88	5 <sup>e</sup> 8	12' 45"	765	805
49	5 <sup>e</sup> 3	10' 38"	638	672	89	5 <sup>e</sup> 5	12' 46"	766	806
50	5 <sup>e</sup> 4	10' 38"	638	672	90	5 <sup>e</sup> 1	12' 48"	768	808
51	5 <sup>e</sup> 6	10' 48"	648	682	91	5 <sup>e</sup> 1	13' 06"	786	827
52	5 <sup>e</sup> 3	10' 48"	648	682	92	5 <sup>e</sup> 5	13' 14"	794	836
53	5 <sup>e</sup> 5	10' 48"	648	682	93	5 <sup>e</sup> 1	13' 24"	804	846
54	5 <sup>e</sup> 7	10' 50"	650	684	94	5 <sup>e</sup> 5	13' 26"	806	848
55	5 <sup>e</sup> 2	10' 50"	650	684	95	5 <sup>e</sup> 8	13' 59"	839	883
56	5 <sup>e</sup> 1	10' 53"	653	687	96	5 <sup>e</sup> 8	15' 00"	900	947
57	5 <sup>e</sup> 1	10' 54"	654	688	120*	5 <sup>e</sup> 1	17' 00"	1020	1074
58	5 <sup>e</sup> 7	10' 54"	654	688	120*	5 <sup>e</sup> 5	17' 00"	1020	1074
59	5 <sup>e</sup> 7	10' 56"	656	691	120*	5 <sup>e</sup> 6	17' 00"	1020	1074
60	5 <sup>e</sup> 6	11' 01"	661	696	120*	5 <sup>e</sup> 6	17' 00"	1020	1074
61	5 <sup>e</sup> 7	11' 01"	661	696					
62	5 <sup>e</sup> 6	11' 02"	662	697					
63	5 <sup>e</sup> 10	11' 03"	663	698					
64	5 <sup>e</sup> 5	11' 04"	664	699					
65	5 <sup>e</sup> 6	11' 13"	673	708					
66	5 <sup>e</sup> 7	11' 14"	674	709					
67	5 <sup>e</sup> 8	11' 15"	675	711					
68	5 <sup>e</sup> 5	11' 17"	677	713					
69	5 <sup>e</sup> 8	11' 18"	678	714					
70	5 <sup>e</sup> 6	11' 18"	678	714					
71	5 <sup>e</sup> 8	11' 20"	680	716					
72	5 <sup>e</sup> 3	11' 25"	685	721					
73	5 <sup>e</sup> 4	11' 30"	690	726					
74	5 <sup>e</sup> 2	11' 40"	700	737					
75	5 <sup>e</sup> 5	11' 41"	701	738					
76	5 <sup>e</sup> 2	11' 42"	702	739					
77	5 <sup>e</sup> 5	11' 43"	703	740					
78	5 <sup>e</sup> 10	11' 44"	704	741					
79	5 <sup>e</sup> 4	11' 45"	705	742					
80	5 <sup>e</sup> 6	11' 46"	706	743					

\* = Abandon

Tableau T3.G-a		éléments "milieux"							
Temps sur 2000 m									
Classe	effectif	moyenne	médiane	milieu de l'étendue	rang moyen	ordre des classes			
						moy	méd	mil.	étend
5 <sup>e</sup> 1	7	617.0	594	628	46.3	6	2	6	2
5 <sup>e</sup> 2	8	607.3	615	620	47.5	2	7	5	3
5 <sup>e</sup> 3	11	638.5	605	638	55.9	8	3	7	9
5 <sup>e</sup> 4	9	626.2	614	647	52.9	7	6	8	7
5 <sup>e</sup> 5	15	610.8	608	615	49.1	3	4	2	4
5 <sup>e</sup> 6	9	615.7	656	617	49.4	5	9	3	6
5 <sup>e</sup> 7	13	613.5	610	609	49.2	4	5	1	5
5 <sup>e</sup> 8	10	552.8	513	619	28.8	1	1	4	1
5 <sup>e</sup> 9	9	639.5	630	665	53.3	9	8	9	8
5 <sup>e</sup> 10	7	743.7	659	779	66.7	10	10	10	10
Total	98	622.5	607	748	49.5				

Tableau T3.G-b		éléments pour boîte à pattes				
Temps sur 2000 m						
Classe	effectif	temps mini	quartile Q1	médiane	quartile Q3	temps maxi
5 <sup>e</sup> 1	7	481	509	594	683	768
5 <sup>e</sup> 2	8	500	530	615	665	740
5 <sup>e</sup> 3	11	544	588	605	715	732
5 <sup>e</sup> 4	9	512	593	614	637	782
5 <sup>e</sup> 5	15	498	543	608	677	732
5 <sup>e</sup> 6	9	485	518	656	718	749
5 <sup>e</sup> 7	13	496	587	610	668	722
5 <sup>e</sup> 8	10	468	472	513	600	769
5 <sup>e</sup> 9	9	454	585	630	700	877
5 <sup>e</sup> 10	7	517	555	659	995	1042
Total	98	454	543	607	686	1042

Tableau T3.F-a						éléments "milieux"			
Temps sur 2000 m									
Classe	effectif	moyenne	médiane	milieu de l'étendue	rang moyen	ordre des classes			
						moy	méd	mil.	étend
5 <sup>e</sup> 1	9	764	744	812	69	10	10	9	9
5 <sup>e</sup> 2	10	618	595	636	35	3	3	3	3
5 <sup>e</sup> 3	8	621	633	618	36	4	5	2	4
5 <sup>e</sup> 4	14	609	578	638	33	2	1	4	2
5 <sup>e</sup> 5	13	744	738	793	67	7	9	8	7
5 <sup>e</sup> 6	13	755	708	855	68	9	7	10	8
5 <sup>e</sup> 7	11	658	639	661	47	6	6	6	6
5 <sup>e</sup> 8	9	747	716	661	70	8	8	6	10
5 <sup>e</sup> 9	4	583	588	577	23	1	2	1	1
5 <sup>e</sup> 10	9	634	615	644	41	5	4	5	5
Total	100	680.6	677	789.5	50.6				

Moyenne des moyennes 673.46

Tableau T3.F-b							éléments pour boîte à pattes
Temps sur 2000 m							
Classe	effectif	temps mini	quartile Q1	médiane	quartile Q3	temps maxi	
5 <sup>e</sup> 1	9	551	687	744	827	1074	
5 <sup>e</sup> 2	10	533	545	595	684	739	
5 <sup>e</sup> 3	8	516	555	633	677	721	
5 <sup>e</sup> 4	14	535	558	578	665	742	
5 <sup>e</sup> 5	13	513	682	738	806	1074	
5 <sup>e</sup> 6	13	636	682	708	746	1074	
5 <sup>e</sup> 7	11	612	632	639	691	709	
5 <sup>e</sup> 8	9	582	711	716	805	947	
5 <sup>e</sup> 9	4	542	556	588	609	613	
5 <sup>e</sup> 10	9	505	534	615	741	783	
Total	100	505	578	677	732	1074	



# LA DIDACTIQUE :

## UN APPORT POUR L'ÉLÈVE ? POUR L'ENSEIGNANT ?

Serge CECCONI

IREM de GRENOBLE

### Les relations entre professeur et chercheur en didactique.

En quoi les recherches en Didactique peuvent-elles être utiles aux professeurs que nous sommes, et vont-elles nous rendre plus performant face à nos élèves ?

Quels rapports pouvons-nous et devons nous entretenir avec les chercheurs didacticiens, et réciproquement ?

Professeur en collège, membre de la commission Inter-IREM de Didactique, je reste un professeur qui, ne négligeant aucun outil qui peut faciliter l'exercice au mieux de son métier, ne peut que vous décrire en quoi la connaissance de cet outil le soulage quant à la pratique de ce métier. Je ne suis pas chercheur en didactique et les didacticiens ne sont pas professeurs, cependant les deux sont à mon avis indissociables pour une approche performante de la pratique enseignante.

C'est dans cet esprit, que nous avons mis en place, en collège, une structure permettant la mise en place d'ingénieries et d'observations de situations réelles d'enseignement, en effet, dans les méthodes de travail didactique, une phase obligatoire est de se confronter à la réalité de la classe, l'analyse des pratiques d'enseignement ne peut évidemment pas être restreint à l'analyse des programmes et des ouvrages, le complément indispensable est de se donner les moyens d'observation des classes. Chaque année, nos classes sont le terrain d'expérimentation pour des doctorants, l'expérimentation de certaines ingénieries mises au point dans le cadre du groupe de didactique de l'IREM de Grenoble, l'expérimentation ponctuelle de certaines situations : Cabri-géomètre. Il me paraît aussi préjudiciable pour les chercheurs de s'éloigner de la réalité classe que pour les enseignants d'ignorer les développements de la recherche en didactique. Certes le médecin ne connaît pas toujours le rôle de l'acétylcholine dans la contraction musculaire, mais je vous rassure : le chercheur biologiste est souvent incapable de soigner une angine. Par contre, l'un et l'autre sont indispensables au malade.

### La didactique qu'est ce que c'est ?

Il y a très longtemps, l'art d'enseigner ne semblait pas poser de problème. L'enseignant enseigne et l'élève apprend. L'élève est un réceptacle que l'enseignant a le devoir de remplir. Ce qu'on identifiera comme des méthodes réceptives, la pédagogie,

est de type empirique, coutumier et voué à la routine. On est dans une pédagogie de type expérimenté. Le pédagogue est un improvisateur. Il existe de bons maîtres qui ont un savoir-faire inné, et les autres. Il y a surtout les bons élèves et les mauvais. La massification et la démocratisation de l'enseignement amène le corps enseignant à s'interroger. Apprendre, est-ce assimiler ?

### Pédagogie expérimentale :

Avec Piaget, naît la pédagogie dite expérimentale. On s'intéresse au récepteur : l'enfant.

Se développent alors des théories pédagogiques prenant appui sur les théories psychologiques et sociologiques. On identifie les différents stades de l'évolution de l'enfant pour asseoir les techniques d'apprentissage.

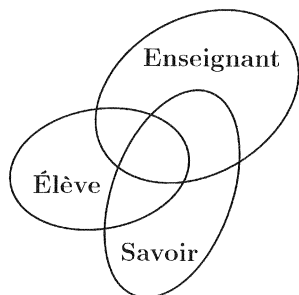
Piaget définit alors des méthodes dites « actives » où on considère que l'élève ne peut apprendre qu'en s'adaptant à une situation, à un milieu qui est porteur de contradictions et de déséquilibres : assimilation/accommodation.

### Apparition des notions propres à la didactique.

Dans cette démarche : assimilation/accommodation, le milieu naturel reste trop souvent insuffisant, l'enseignant se doit de créer un milieu spécifique : le milieu didactique.

Mais une caractéristique du système d'enseignement, c'est que ce milieu construit pour l'apprentissage est amené à disparaître. L'élève doit être capable d'utiliser les connaissances acquises dans des situations non didactiques<sup>1</sup>.

Mais c'est aussi un changement radical de point de vue. L'élève n'est plus le centre du système, il devient un élément du milieu didactique, qu'on identifiera par le triplet :



Ce triplet est lui-même inclus dans un milieu : institution, parents d'élève, société.

Le regard est profondément différent dans le sens où, on tend à ne plus considérer les éléments de ce triplet mais l'acte d'apprendre.

Pourquoi apprend-on ?

Comment apprend-on ?

La didactique ne peut exister et ne vit que dans le milieu scolaire, ce qui explique que les premières réalisations des didacticiens ont été la mise en place d'ingénieries didactiques<sup>2</sup>, à la fois produits de la recherche et moyens d'étude.

1. Claire Margolinas : « *le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignements.* » Actes de l'U.E de La Rochelle 1998.

2. Par exemple : « *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire* » Nadine et Guy Brousseau 1987.



## Théories de la didactique

### La théorie des Situations

Dans les premières recherches en didactique en France, le projet est essentiellement de trouver une suite de situations caractéristiques d'un savoir visé. Nous ne citerons que les plus connues et les plus caractéristiques :

- le puzzle de Brousseau,
- la course à 20.

Mais ces situations deviennent très vite elles-mêmes des objets de recherche. De la mise à l'épreuve de ces modèles théoriques naîtront les principaux concepts de la théorie des situations : les notions de milieu, de contrat, de savoir, de variable didactique, de situation a-didactique...

L'élève n'inter-agit pas seulement avec l'enseignant ou avec ses pairs mais avec un milieu qu'on va chercher à structurer. On est conduit à analyser le rôle du maître qui se précise à travers les notions d'institutionnalisation et de dévolution. On observe la transformation des connaissances du statut d'outil au statut d'objet. On analyse les jeux de cadre.

Dans ce travail, la navette classe/théorisation est permanente et le travail dans la classe est à la fois un outil de recherche et un produit de cette même recherche. La recherche permet de construire des ingénieries, mais elle permet également d'analyser les situations ordinaires.

### L'approche anthropologique.

Yves Chevallard en pratiquant la théorie des situations de Guy Brousseau dont il est l'élève, va étendre son étude du milieu. Le savoir, dans son approche, est au centre de son analyse.

Il s'intéresse tout particulièrement à la transformation du savoir savant en savoir enseigné : c'est la transposition didactique, où l'objet mathématique devient le centre du champ d'étude. Il exclut dans un premier temps de ce champ d'étude, l'élève et le maître.

On s'interroge sur les conditions d'existence du savoir enseigné : étude épistémologique. Quelle est la place sociologique du savoir, (institution, parents d'élèves, société...)? Quelle est la place du savoir dans le vécu de l'enseignant?

On s'interroge sur les notions de temps didactique : la chrono-genèse. Chacun sait qu'il est illusoire de considérer un temps homogène. Qu'en est-il pour l'élève? Pour l'enseignant? Pour l'enseignement? Temps d'apprentissage? Découpe séquentielle des programmes?

On s'interroge sur la place réservée à l'élève et au professeur dans l'étude d'un objet de savoir : la topo-genèse. On s'interroge sur les conditions de vie et de contraintes des objets de savoir : l'écologie.

Yves Chevallard va développer ces analyses intellectuelles comme nous le ferions d'activités manuelles, ce qu'il appellera la praxéologie. Cette méthode d'analyse évitant la hiérarchisation des tâches, permettra une étude plus fine et moins influencée par les organisations didactiques mises en place pour ces apprentissages. L'approche anthropologique nous permet de mieux comprendre le « pourquoi ça marche ».

## De l'utilité de la didactique pour un professeur.

### Une lucarne pour se regarder enseigner.

Pouvoir analyser sa propre pratique c'est être capable de s'observer enseigner, c'est analyser l'acte d'enseigner en professionnel, c'est aussi et surtout se déculpabiliser. Pourquoi aujourd'hui ça ne marche pas? Pourquoi j'échoue dans l'acte d'enseigner telle ou telle notion? Si je reste au stade de la pédagogie expérimentée voire coutumière, je ne peux que m'auto-flageller de mon manque de réussite. L'acte d'enseignement est une sorte de troisième sens : on l'a ou on ne l'a pas.

En 1980, Guy Brousseau, pour expliquer l'échec électifs d'élèves de l'école élémentaire en Mathématique, propose le concept de contrat didactique : ensemble de règles explicites mais surtout implicites, permettant de définir ce que chacun a le droit de faire ou de ne pas faire à propos d'un savoir. Les échecs électifs proviendraient non pas d'une inaptitude des élèves à apprendre mais de contrats didactiques spécifiques à tels ou tels savoirs mathématiques empêchant certains élèves d'entrer dans un processus d'apprentissage de ces savoirs.

*" Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée (situation didactique), l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. "*

G. Brousseau 1980

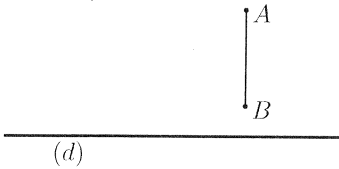
La méconnaissance de la notion de contrat didactique, nous conduira à mal interpréter ce qui se passe en classe. Identifier les effets Topaze ou Jourdain, nous permettra de mieux cerner le jeu de classe. Les élèves ne sont pas tous stupides, les professeurs tous mauvais.

Enseigner c'est apporter un savoir à un élève. Un savoir est la réponse à une question, la question est celle du professeur, rarement celle de l'élève dont le seul jeu est de faire plaisir au professeur.

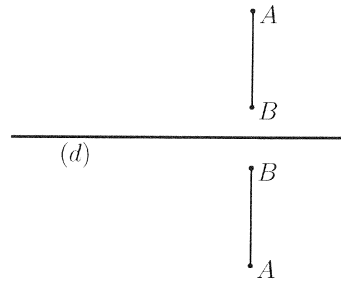
La didactique va permettre d'étiqueter ce qui se passe. Nommer les choses va nous permettre de mieux les observer.

Chacun sait que si on propose cet exercice à un élève de sixième

**Construire le symétrique de  $[AB]$  par rapport à  $(d)$**

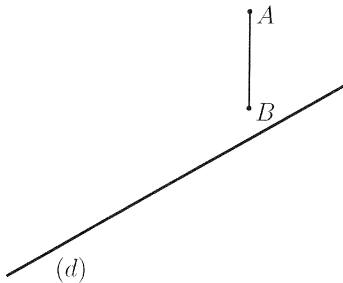


Une bonne majorité d'élèves apporteront la réponse suivante :

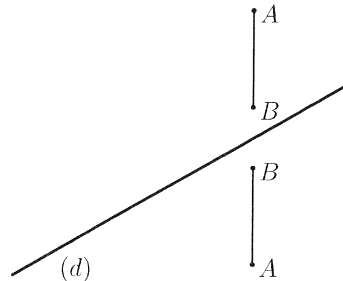


Et que si on présente l'exercice sous la forme suivante,

**Construire le symétrique de  $[AB]$  par rapport à  $(d)$**



On a toutes les chances d'obtenir le tracé suivant :



Identifier l'inclinaison de l'axe comme une variable didactique permettra au professeur, de graduer ses exercices et de mieux apprécier l'assimilation d'un savoir.

## Gérer les activités inhabituelles

Tout professeur ayant un certain nombre d'années d'expérience sait faire face aux situations de classe les plus inhabituelles, car il a ses « ficelles », son expérience. Cette expérience qu'on a souvent du mal à analyser se trouve par contre assez souvent mise en défaut quand on se trouve dans l'obligation d'introduire un élément étranger dans la situation d'enseignement.

C'est le cas quand on doit mener une activité intégrant la calculatrice ou l'ordinateur. La technologie mise en œuvre modifie profondément le contrat didactique. L'élève s'isole dans une bulle avec sa machine et le professeur perd la gestion de la classe. Il faut donc tout prévoir avant. L'analyse *a priori* de l'activité devra donc

être menée de façon plus systématique. Cette analyse *a priori* devra prendre en compte les aspects épistémologiques, en quoi l'ordinateur apporte un autre regard sur le savoir enseigné, une structuration du milieu, construire un milieu véritablement rétroactif, afin d'éviter à l'élève de n'être qu'un « presse boutons ».

Par ailleurs, on devra faire le choix du ou des logiciels utilisés, chacun ayant ses propres choix didactiques, ce qui induira un choix d'apprentissage.

Enfin, l'appropriation de certains concepts peut être profondément modifiée.

Par exemple une approche fonctionnelle ne se faisant qu'à travers un tableur amènerait une vision uniquement discrète des fonctions. L'outil didactique sera particulièrement utile pour mener à bien une telle analyse *a priori*.

## Échanger

Échanger une séquence d'enseignement avec des collègues, écrire un texte pour décrire une ingénierie, est particulièrement difficile. En effet, soit on donne une fiche brute, et on sait par expérience que ce document n'est d'aucun secours. Soit on cherche à expliciter au maximum, et la lecture devient fastidieuse si l'analyse de l'activité n'est pas rigoureusement organisée.

L'utilisation des outils de la didactique et des protocoles d'explicitation permet de situer l'activité dans un contexte plus global. On fera par conséquent une analyse *a priori* prenant en compte les différents éléments de l'activité soit :

- une analyse épistémologique du savoir en jeu,
- une description de l'activité prenant en compte le temps didactique de l'apprentissage,
- la description précise de l'activité,
- la dévolution,
- l'institutionnalisation,
- les évaluations,
- la prévision et l'analyse des erreurs.

## En guise de conclusion.

L'enseignement est devenu un sport à haut risque et d'une pratique difficile. On ne se contente pas de déverser un savoir que l'élève assimilera par répétition. L'apprentissage n'est plus à la charge de l'élève, il est devenu celle de l'enseignant.

L'enseignant a la charge du milieu d'enseignement, il doit individualiser l'apprentissage et être capable d'analyser les erreurs de ses élèves comme autant de symptômes de la bonne ou de la mauvaise assimilation.

La didactique n'est pas un produit miracle (ça se saurait...) mais il va permettre de mieux contrôler l'efficacité de nos décisions et de nos actions en classe. Elle permet de s'apercevoir qu'un professeur en position d'enseignement a des choix, la didactique lui permet de mieux les identifier et par conséquent d'être acteur de la situation d'enseignement.

## Bibliographie

[1] BESSOT A., 1995. *Introduction à l'analyse du système didactique*; DEA de Didactique des disciplines scientifiques - UJF Grenoble I.

[2] BROUSSEAU G., 1986. *Le cas Gael, in Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*; Thèse d'État, Université de Bordeaux I.

[3] BROUSSEAU N et G. *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*; éd.IREM de Bordeaux, Université de Bordeaux I.

[4] BROUSSEAU G.,1990. *Le contrat didactique : le milieu*. Recherches en Didactiques des Mathématiques, vol.9/3, p.309-336, éd. La pensée Sauvage, Grenoble.

[5] CHEVALLARD Y., JOSUA M.A. 1991. *La transposition didactique - Du Savoir savant au savoir enseigné. Deuxième édition*; éd. La pensée Sauvage, Grenoble.

[6] GRENIER Denise, 1988. *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale en  $6^{\circ}$* ; Thèse, UJF Grenoble I.

[7] MARGOLINAS CL. 1995. *La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations*, in Les débats de didactique des mathématiques, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.



# ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ET INTRANET

Jean DELERUE

IREM de NICE

Depuis 3 ans, j'utilise l'Intranet du Collège dans le cadre du cours de géométrie en collège de la 6<sup>me</sup> à la 4<sup>me</sup>.

Un compte rendu avec des exemples d'exercices et des courriers d'élèves est accessible à :

<http://math.unice.fr/iremnice/ciim/intrageo>

Avec quelques exemples, je voudrais montrer l'apport de cet outil de communication pour mes élèves. Les exercices proposés sur la toile incluent images, animations et maintenant de la vidéo MPEG. Nous sommes loin des exercices que l'on trouve dans les livres. La réponse par courrier électronique a obligé mes élèves à préciser le vocabulaire géométrique qu'ils utilisent, à lui donner un sens, une réalité compréhensible par le prof. et leurs camarades.

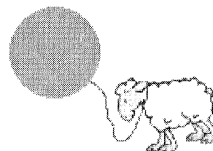
## Les conditions techniques du travail

Les ordinateurs du collège sont en réseau ; seul le serveur Intranet (Apache sous Linux) sert dans ce travail. Ce serveur offre en local les possibilités du WEB.

L'accès aux exercices se fait par le service <http://agrume> tandis que les échanges se font par courrier électronique [jdelerue@citron.agrume](mailto:jdelerue@citron.agrume).

Il n'est pas nécessaire que tous les élèves possèdent leur propre adresse électronique, quelques adresses génériques comportant le numéro du poste suffisent. L'un des postes de la salle est relié à un téléviseur qui permettra une lecture collective des énoncés et des réponses.

L'Intranet du collège offre une série d'exercices qui comportent des images, du texte et de plus en plus d'animations. Chacun se termine par une question et un lien ouvre l'éditeur de courrier de Netscape programmé pour que les réponses des élèves arrivent sur ma boîte au lettre électronique interne.



## La démarche pédagogique, le déroulement d'une séance

Les élèves sont dans la salle informatique polyvalente dotée de 15 postes. Ils sont en général 2 par poste et se connectent au serveur <http://citron> ; ils accèdent après une petite navigation, au premier exercice du jour.

Après un travail de recherche en général sur papier les élèves me répondent par courrier électronique à la question posée (quel est l'intrus? pourquoi?, décrire la forme de ... )

Trois ou quatre fois dans l'heure, j'interrompt le travail individuel et provoque une réflexion collective sur les courriers électroniques qui m'ont été envoyés. Les courriers sélectionnés sont lus sur l'écran télé et commentés aussi bien sur la forme que sur le fond. L'élève doit dépasser la phase de recherche sur son cahier pour arriver à un travail écrit compréhensible par tous.

En fin d'heure, l'analyse de l'évolution des courriers est proposée aux élèves.

Deux élèves par poste informatique est un maximum, la lecture des courriers grâce à un vidéo projecteur est préférable à notre dispositif utilisant des écrans de télévision.

## Évolution des exercices sur la toile

Les exercices sont consultables à <http://mtn-cremli.ac-nice.fr/jd/geom>.

Les premiers (la mer à Menton) datent de 1995 et ne comportent que du texte et des images.

L'évolution a été rapide et nous pouvons maintenant intégrer des animations, des formulaires, de la vidéo numérique.

L'aspect dynamique de certains exercices aide beaucoup les élèves. La vidéo numérique les replonge dans l'espace physique.

Certains exercices incluent des figures géométriques produites avec Géoflash ou Dr Géo mais la plus part utilisent des images de notre environnement

## Conclusions et projets

La participation de tous les élèves est très active à ces séances.

Même les élèves en difficulté demandent à ce que soient lus leurs écrits.

Ce travail a pourtant associé à la fois l'analyse de situations, la recherche de solutions à des questions, la production écrite de réponses et le débat oral en classe de mathématiques.

Il est difficile d'évaluer l'apport de cette démarche avec nos outils classiques, les élèves semblent avoir évolué :

- dans leurs méthodes d'analyse
  - dans leur approche des notions mathématiques
  - dans le vocabulaire utilisé
- dans leur façon de communiquer à l'écrit comme à l'oral
- dans leur approche des technologies de la communication.

Jean Delerue

Professeur de Mathématiques  
Collège André Maurois 06500 MENTON  
delerue@inln.cnrs.fr



# PRÉSENTATION DES OUTILS LILIMATH

Bruno KOSTRZEWA

Groupe LILLIMATH

LiliMath est surtout connu comme étant une collection de logiciels proposant des exercices de Mathématiques aux élèves de collège. Notre intervention à ce colloque vise à faire découvrir l'autre versant de LiliMath : la mise à disposition d'outils de dessin et de calcul.

Alors que l'utilisation des exercices est assez immédiate et demande peu de préparation, celle des outils nécessite, d'abord pour le professeur et ensuite pour l'élève, un travail de découverte et de prise en main non négligeable. Nous pensons que cet investissement se révèle toutefois très rentable car il ouvre la voie à des activités très riches qui font à la fois appel à l'esprit de créativité et à l'esprit critique en permettant la réalisation de véritables expériences mathématiques.

Les outils présentés (trop rapidement) lors de cet atelier sont :

- CalcAlg pour l'initiation au calcul algébrique
- Imageo pour l'écriture de programmes de constructions géométriques
- MiniLogo pour une initiation à la programmation
- Geolap pour la construction de patrons de solides.

## 1 CalcAlg

L'écriture sur papier de formules mathématiques repose sur un certain nombre de conventions (fractions écrites sur 2 niveaux, parenthèses ou opérations sous-entendues, exposants, ...). L'utilisation de calculatrices ou de logiciels de calcul comme le tableur nécessite l'entrée de ces formules sous forme linéaire (en une seule ligne) et de façon totalement explicite (il faut rétablir parenthèses et opérations sous-entendues).

CalcAlg permet d'abord de s'entraîner au passage d'un type d'écriture à l'autre : l'élève entre une formule de façon linéaire (comme sur la calculatrice ou dans un tableur) et le logiciel l'affiche en respectant les conventions de l'écriture sur papier.

Par exemple, pour obtenir l'affichage de :

$$\frac{x}{1+x^2}$$

l'élève devra entrer la formule :  $x/(1+x^2)$ .

CalcAlg dispose de plus de fonctions de calcul qui permettent entre autre de résoudre des équations ou des systèmes d'équations du 1er degré en effectuant une même opération dans les deux membres d'une égalité.

## 2 Imageo

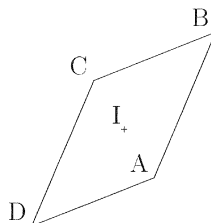
Imageo permet de construire des figures géométriques planes à partir d'un programme de construction écrit dans un langage utilisant le vocabulaire usuel de la géométrie. Les figures ainsi décrites sont affichées et peuvent être modifiées en déplaçant à la souris les points libres, c'est-à-dire les points qui ne sont pas définis par une relation géométrique avec d'autres points.

L'activité proposée consistait à créer trois points libres  $A$ ,  $B$  et  $C$ , puis à construire le point  $D$  pour lequel  $ABCD$  est un parallélogramme. La méthode utilisant le centre du parallélogramme donne lieu au programme de construction suivant :

```

A = point
B = point
C = point
I = milieu(A,C)
D = symétrique(B,I)
polygone(A,B,C,D)

```



On obtient la figure ci-contre.

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  peuvent alors être déplacés pour donner de nouveaux parallélogrammes.

Imageo permet aussi d'afficher des longueurs de segments et des mesures d'angles qui permettront d'étudier les propriétés qui restent invariantes lorsqu'on déplace les points libres.

L'un des objectifs de cette activité, qui n'a pu être atteint par manque de temps, était de montrer les problèmes posés par les constructions utilisant des intersections de cercles ou des intersections de cercles et de droites. L'existence dans ces cas de deux points d'intersection provoque une difficulté qui est souvent occultée lorsqu'on travaille sur papier.

## 3 MiniLogo

MiniLogo permet de s'initier à la mise en œuvre d'algorithmes simples dans les domaines géométriques et numériques.

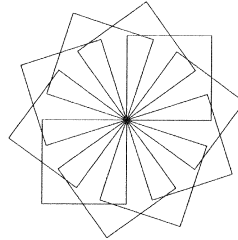
Dans le domaine géométrique il s'agit de déplacer une tortue en lui indiquant une suite de commandes du type avance, recule, tourne à droite ou tourne à gauche. Lorsque le crayon de la tortue est baissé, celle-ci laisse une trace de ses déplacements et dessine ainsi une figure. MiniLogo permet de programmer la répétition de certaines séquences de commandes et de définir de nouvelles procédures.

Le programme suivant montre comment dessiner une série de 10 carrés tournants.

```

;carrés tournants
;
;procédure carré
pour carré
( répète 4 (av 20 tg 90) )
;dessin des 10 carrés
répète 10 (carré tg 36)

```



Ce programme donne la figure ci-contre.

Minilogo permet aussi de mettre en œuvre des algorithmes de calcul pour :

- étudier des suites : en combien d'années un capital placé à 5 % à 5% va-t-il doubler?
- résoudre des équations par approximations successives : calculer l'arête d'un cube de volume 2.

## 4 Geolap

Geolap permet de construire des solides à partir de leurs patrons en utilisant un langage inspiré du langage de la tortue de MiniLogo. De nouvelles instructions (s'incliner à droite ou à gauche, piquer ou se cabrer) permettent de sortir du plan initial pour se déplacer dans l'espace. Une instruction "pli" permet d'indiquer comment le patron devra se plier pour former le solide.

Lorsque Geolap a dessiné le patron correspondant à un solide des boutons permettent d'effectuer le pliage à l'écran ou de changer le point de vue.

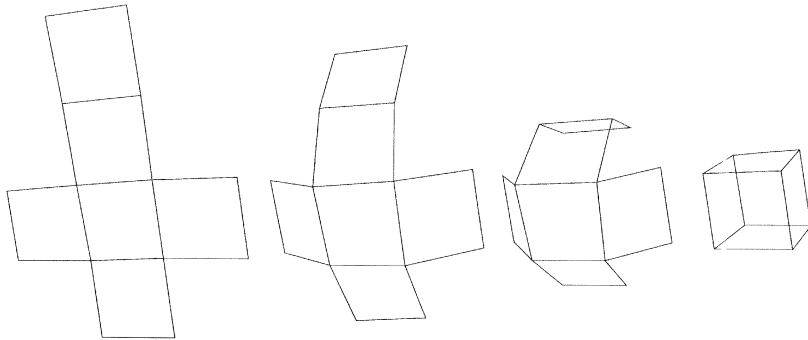
Voici par exemple une façon de construire un cube :

```

;cube
;
;définition du pli
pli a 90
;définition de l'arête
dans cot 50
;procédure carré
pour carré
( répète 4 (av cot tg 90) )
;construction du patron
répète 2 (carré av cot pq a)
carré id a td 90
carré tg 90 ig a av cot pq a
carré ca a tg 90 av cot pq a
carré

```

On obtient les figures suivantes en effectuant le pliage :



## Conclusion

Il n'était pas possible de montrer en 2 heures tous les outils LiliMath et toutes les possibilités qu'ils ouvrent. La meilleure façon de s'en faire une idée est de visiter le site Internet de LiliMath à l'adresse :

<http://lilimath.free.fr>

qui fournit une présentation détaillée de tous ces outils et permet aussi leur téléchargement.

Rappelons pour terminer que tous les logiciels LiliMath (exercices et outils) peuvent être utilisés gratuitement et distribués aux élèves qui le désirent.

# DES ALGORITHMES EN GÉOMÉTRIE

Bernard DESTAINVILLE

IREM de TOULOUSE

1°- Par algorithme, nous entendons **“une suite finie de règles à appliquer, dans un ordre déterminé, à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d’étapes, à un certain résultat, et cela indépendamment des données.”**

(*J. Hebenstreit-Encyclopædia Universalis-vol 8 p. 1013*)

Nous sommes loin de la définition restrictive: “Tout procédé systématique de calcul” (*Grand Larousse Encyclopédique*), définition que l’on rencontre même dans plusieurs dictionnaires scientifiques.

Cette restriction s’explique historiquement par la nature des premiers travaux des arithméticiens grecs puis arabes. On ne peut ignorer en particulier l’œuvre d’Al Khwarismi (IX<sup>e</sup> siècle) qui est à l’origine d’une identification cohérente du système décimal: la règle récurrente est le remplacement de dix unités d’un ordre par une unité de l’ordre immédiatement supérieur, ce qui est essentiel pour les techniques opératoires. Les pratiques à caractère algorithmique ne sont donc pas nées avec l’apparition de l’informatique.

Nous ne pouvons ignorer non plus les textes chinois des “neuf chapitres sur les procédures mathématiques”, vieux de deux mille ans et récemment mis en valeur par Karine Chemla: les bureaucrates chinois utilisaient des procédures mathématiques et pratiquaient déjà les boucles itératives. Et puis, il y a les bouliers!

Dans le contexte général de la définition ci-dessus, élargie, dès que la pensée cherche à organiser un modèle complet de comportement, la mise en forme prend un caractère algorithmique qu’il est souhaitable de structurer. Des exemples:

- activité de tri;
- fonctionnement d’une règle itérative;
- construction d’un ensemble;
- repérage d’un objet dans un ensemble;
- balayage méthodique d’un ensemble.

La mise en forme de l’algorithme peut inciter alors à une recherche méthodique des bons critères de sélection, de l’itinéraire de balayage, de l’enchaînement des cas, des procédures à privilégier... pour structurer dans les meilleures conditions, sans toutefois s’encombrer d’une technicité excessive à ce niveau de conception: si l’acteur de l’algorithme est un être humain, certaines actions bien maîtrisées ne nécessitent pas un développement: la rédaction des opérations à effectuer dépend de l’exécutant.

Notamment dans l’enseignement secondaire, la démarche algorithmique ne né-

cessite pas toujours un “affinage” informatisable, mais lorsque le problème s’y prête, le développement d’un algorithme incite à un approfondissement des données et des objectifs, des points d’attaque et des conclusions, des procédures et des enchaînements. Et la syntaxe algorithmique permet de structurer naturellement la mise en forme dans la langue maternelle.

**2°-** Certains problèmes géométriques se prêtent bien à ce type de modélisation qui est fonction de l’acteur, géomètre averti ou apprenti géomètre.

C’est le cas pour les activités proposées dans l’atelier à propos de deux problématiques importantes de la géométrie de l’espace :

- construire en vraies dimensions le patron d’un polyèdre ;
- dessiner la section d’un polyèdre convexe par un plan ( $IJK$ ), sur une représentation en perspective cavalière.

**Ces deux activités peuvent être complémentaires** (voir 4°), dans la mesure où la section engendre deux nouveaux tronçons polyédriques qu’il est intéressant de matérialiser en carton ; on voit alors apparaître deux projets complémentaires :

- d’une part, réaliser correctement en perspective cavalière (ou projection cylindrique) la représentation de la troncature, pour mieux permettre l’analyse de la figure ;
- d’autre part, réaliser le patron de chacun des tronçons, afin de les matérialiser ; en particulier, la section qui constitue l’interface entre les deux tronçons est une face de chacun des deux patrons. Après montage des deux tronçons, il est possible de reconstituer le polyèdre initial en superposant ces deux faces.

Pour la réalisation du patron, la seule difficulté réside souvent dans la construction de cette interface, car il faut en calculer les dimensions, ce qui nécessite à nouveau des réflexions à partir de la représentation, seul support pour raisonner correctement.

Quant au pliage des patrons pour obtenir les deux tronçons, le choix du sens de pliage est indispensable pour que la reconstitution du polyèdre soit possible ( voir 4° )

L’expérience prouve que ce travail est très motivant ; il est dans l’esprit des nouveaux programmes de Collège et de Seconde.

**3°-** Pour revenir aux algorithmes, il est important d’évaluer les nécessités d’affinage ; l’objectif est en effet de faciliter le travail ainsi programmé, en précisant les étapes, sans pour autant perdre l’acteur dans une technicité algorithmique hors de propos. Il faut aider à organiser sans égarer. Avec de jeunes élèves, il est possible de ne pas exagérer la quantité de consignes écrites, l’approfondissement des détails étant laissés à l’initiative de l’acteur.

a) algorithme 1 :

Dessiner la section d'un polyèdre convexe par un plan ( $IJK$ )  
sur une représentation en perspective.

**début**

. choisir une face du polyèdre contenant au moins un point du plan, distinct d'un sommet ;

. déterminer l'intersection de la face avec le plan ;

**tant que** le polygone de section n'est pas complet **faire**

. choisir une nouvelle face contenant un seul point de l'intersection précédente ;

. déterminer l'intersection de cette nouvelle face avec le plan.

**fin.**

L'annexe I propose un algorithme plus raffiné.

Les contraintes qui apparaissent déjà ici permettent de mieux comprendre les exigences nécessaires à l'écriture de l'algorithme lorsque le champ des possibilités est étendu :

- pour le cas où le plan de section passe par un sommet du polyèdre, la première face choisie ne doit pas avoir seulement un sommet sur la section ;

- pour le cas où le plan de section contient une arête, une nouvelle face prise en compte ne doit pas contenir cette arête.

Ces types de contrainte peuvent évidemment être évités si l'on décide par exemple que les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  appartiennent à trois faces différentes, mais pour des élèves, il est formateur d'apprendre à discuter suivant les cas.

C'était toute la richesse des problèmes de construction.

Bien entendu, l'essentiel du travail géométrique reste à faire : **l'intersection de chaque face par le plan de section ( $IJK$ )**. C'est la procédure à développer si l'on souhaite raffiner davantage.

Notons d'abord que si le plan est défini autrement, il est toujours possible de se ramener à cette situation.

D'autre part, il est nécessaire de déterminer deux points de l'intersection et une sous-procédure de la précédente est le problème de l'intersection d'une droite de ( $IJK$ ) avec la face en cours. Suivant le niveau, on peut trouver des situations propices à la mise en œuvre des différents théorèmes d'incidence.

b) algorithme 2 :

Construire en vraies dimensions le patron d'un polyèdre.

**début**

. construire une arête du polyèdre ;

**tant que** toutes les faces ne sont pas construites **faire**

dessiner une face non construite qui a déjà une arête construite ;

. construire les onglets nécessaires au collage.

**fin.**

L'annexe II propose un algorithme plus raffiné.

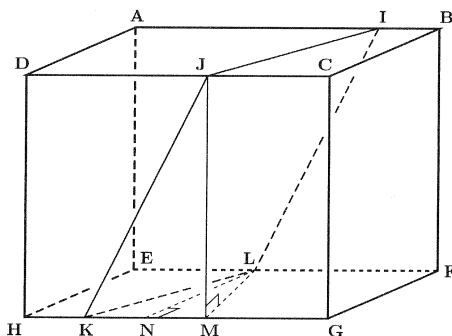
La construction d'un patron dépend de la nature du polyèdre, et des initiatives sont nécessaires, comme le choix de l'arête initiale ou de l'ordre dans lequel on dessine les faces ou les onglets de collage.

Mais il est bon en plus d'observer certaines règles pratiques :

- les arêtes à raccorder vont par paires de même nom ; il vaut donc mieux les nommer sur le patron pour repérer ces paires, et placer un seul onglet par paire ;
- en vue du montage du polyèdre à partir du patron, il vaut mieux prévoir une dernière face de grandes dimensions et sans onglets, de façon à rendre le collage plus aisé.

4°- Un problème exemplaire de partition d'un parallélépipède rectangle.

**Énoncé :** Dans le parallélépipède rectangle  $ABCDEFGH$  ci-dessous,  $AB = 5$ ,  $AD = 3$ ,  $AE = 4$ , les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  respectivement sur les côtés  $[AE]$ ,  $[DC]$  et  $[HG]$  sont tels que  $AI = 4$ ,  $DJ = 3$  et  $HK = 1$ . Le plan  $(IJK)$  partage le parallélépipède en deux tronçons. Construire les patrons de ces deux tronçons ; fabriquer ces deux parties puis vérifier que leur juxtaposition permet de reconstituer le polyèdre initial.



Le plan  $(IJK)$  coupe le parallélépipède suivant un parallélogramme  $IJKL$ , et on peut prouver que les deux tronçons sont symétriques par rapport au centre  $O$  de ce parallélogramme. Les deux patrons sont donc eux aussi isométriques. afin de diagonaliser  $IJKL$ , le seul calcul nécessaire à la construction de cette interface est celui de la longueur de la diagonale  $JL$  ; avec les notations de la figure :

$$JL^2 = JM^2 + ML^2 = 4^2 + 1^2 + 3^2 = 26 ; \text{ donc } JL \approx 5,1.$$

Si nous groupons les élèves par deux, chacun construisant un seul patron, il est possible de reconstituer le parallélépipède à deux, à condition d'avoir effectué les collages de façons symétriques pour obtenir deux tronçons symétriques (la symétrie de centre  $O$  est une isométrie négative) et non pas directement égaux ; c'est une belle sensibilisation, possible dès la Seconde: on n'obtient pas en général le même polyèdre selon que l'on plie le patron de ce polyèdre dans un sens ou dans l'autre.



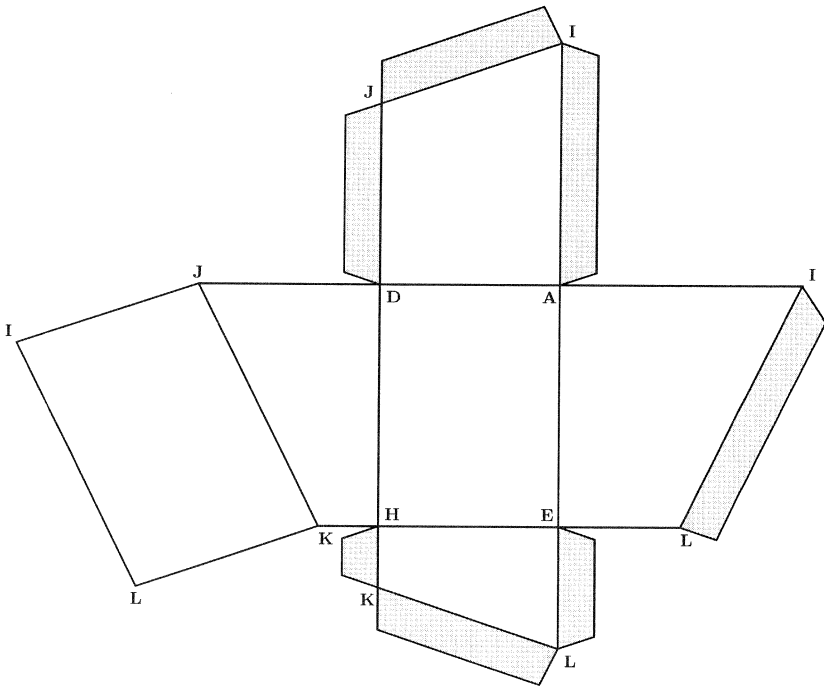
**En conclusion :**

Nous avons été incités à concevoir les algorithmes mis en œuvre dans cette étude à l'issue d'un stage sur la géométrie de l'espace, au cours duquel des collègues souhaitaient structurer leurs méthodes.

Les algorithmes, sans être trop lourds, peuvent en effet faciliter la formulation des différentes démarches.

A cet effet, il semble souhaitable de :

- ne pas se laisser aller à un raffinement excessif de l'algorithme ;
- donner un approfondissement seulement s'il paraît utile ;
- laisser des initiatives à l'intérieur de l'algorithme lorsque l'acteur est capable ("dessiner l'une des arêtes", "choisir une nouvelle face", ... ) ;
- laisser des procédures à réaliser "à la main" lorsqu'elles sont simples ou que la réflexion correspondante est formatrice (rechercher la démarche la plus appropriée pour construire l'interface, ...).



Les nouveaux programmes insistent sur l'intérêt d'activités dans l'espace à propos des problèmes de section, tant du point de vue représentation que de celui d'une construction en vraies dimensions.

Il est effectivement formateur de proposer ainsi de réels projets avec des possibilités de travaux où interviennent notamment les règles d'incidence pour réaliser les sections, puis de vérifier l'exactitude de la représentation ( une représentation

en perspective est cohérente) ; la fabrication des polyèdres peut aussi donner lieu à des vérifications matérielles comme la réunion des deux tronçons ; enfin, comme nous l'avons entrevu au 4°, ce type d'activités prépare à des conceptualisations ultérieures.

Nous pensons que dans ce type d'activités, un algorithme peut contribuer à l'approfondissement des méthodes mises en œuvre.

### Annexe I

## Section d'un polyèdre convexe par un plan $(IJK)$ .

Hypothèse : chacun des trois points  $I$ ,  $J$  et  $K$  appartient soit à une face, soit à une arête du polyèdre ; les points n'appartiennent pas tous les trois à une même arête ou à une même face.

### Début

- . choisir une face  $\mathcal{F}$  du polyèdre contenant au moins un point de  $(IJK)$ , distinct d'un sommet ;
- . déterminer les extrémités du segment intersection de  $(IJK)$  avec cette face  $\mathcal{F}$ . Une de ces extrémités est appelée point initial, l'autre second point ;
- . tracer le segment d'intersection de  $(IJK)$  avec la face  $\mathcal{F}$  ;

tant que le second point est différent du point initial, **faire**

### début

- . choisir une nouvelle face  $\phi$  qui contient le second point sans contenir le segment ;
- . déterminer l'intersection de  $P$  avec la face  $\phi$  ;

tant que l'intersection est un point **faire**

- . choisir une nouvelle face  $\phi$  qui contient le second point sans contenir le segment ;
- . déterminer l'intersection de  $(IJK)$  avec la face  $\phi$  ;
- . appeler premier point le second point précédent ;
- . appeler second point le point de la section situé sur une autre arête de la face  $\phi$  ;
- . tracer le segment d'intersection de  $(IJK)$  avec la face  $\phi$  ;

### fin

**fin**

## Annexe II

## Un algorithme pour la construction du patron d'un polyèdre.

Hypothèses de travail:

- le polyèdre est connu par une maquette ou une représentation en perspective;
- les sommets du polyèdre sont nommés;
- les dimensions du polyèdre sont connues.

Algorithme:**Début**

. Dessiner l'une des arêtes et la nommer comme sur le polyèdre;

**tant que** toutes les faces ne sont pas construites, **faire**

**début**

. choisir une face non construite qui a déjà une arête construite;

**si** la face peut être construite à partir de l'arête, à l'aide d'une technique particulière

**alors** construire cette face à partir de l'arête; **sinon**

**début**

. partager la face en triangles;

. calculer les longueurs des côtés de chacun de ces triangles;

. construire ces triangles successivement à partir des côtés déjà construits

**fin**;

. nommer chaque arête construite comme sur le polyèdre

**fin**;

**pour** chaque paire d'arêtes de même nom, **faire**

construire un onglet sur une seule des deux arêtes

**fin.**

Exemples de polygones de dimensions connues, constructibles à partir d'une arête donnée, à l'aide de techniques particulières:

- triangles;
- rectangles;
- trapèzes rectangles lorsque l'arête est un côté d'angle droit;
- trapèzes isocèles lorsque l'arête est une des deux bases;

Critères pour "choisir une face":

- anticiper sur la simplicité des constructions ultérieures;
- le collage de la dernière face sera plus aisé si cette face est de grandes dimen-

sions ;

Critère pour “construire les onglets”:

- il est préférable que la dernière face à coller ne présente aucun onglet.

# L'INVERSION,

## ET LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

Luc SINÈGRE et Frédéric VIVIEN

IREM de ROUEN

L'inversion (inventée en 1824 par Jakob Steiner) faisait partie du bagage élémentaire de tout bachelier jusqu'à la fin des années soixante. Elle a disparu avec l'arrivée des maths dites modernes mais personne n'a osé proposer de réintroduire, depuis la fin de l'enseignement des structures, même partiellement, l'étude des propriétés angulaires des cercles et de leurs transformations (*la géométrie anallagmatique*). La plupart des professeurs n'a donc jamais rencontré cette notion (sauf peut-être à l'Université, dans des U.V. de géométrie).

La première partie de notre exposé permettra d'accorder une place à l'interprétation algébrique de l'inversion. Grâce aux nombres complexes on peut associer aux cercles et aux droites des *formes algébriques* sur lesquelles l'inversion (*i.e.*, l'application  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ ) opère *algébriquement*.

La deuxième partie consistera à retrouver les premières propriétés de l'inversion plane grâce à l'étude de la projection stéréographique. Les outils nécessaires seront ceux de la géométrie élémentaire du collège (angles, distances, trigonométrie), ou du lycée (produit scalaire, homothétie) et on pourra au passage retrouver quelques figures oubliées.

Dans le cadre des formes algébriques obtenues dans la première partie, la notion d'angle possède une interprétation plaisante dans cet espace de *formes* identifié à un espace de matrices ( $2 \times 2$ ). Cette représentation algébrique de l'inversion plane fermera cet exposé.

## Une présentation algébrique de l'inversion.

On souhaite généraliser la notion de symétrie par rapport à une droite. Dans le plan complexe la *réflexion par rapport à l'axe des abscisses* correspond à l'application  $z \mapsto \bar{z}$ . L'ensemble des points fixes de la symétrie est défini par l'équation en coordonnées complexes  $z = \bar{z}$  de l'axe des abscisses.

La représentation complexe de la *réflexion par rapport au cercle unité centré à l'origine* devra faire de  $z\bar{z} = 1$  l'équation de l'ensemble des points fixes.

On introduit ainsi naturellement l'application  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  qui a pour ensemble des points fixes le cercle unité. Cette application est une involution de  $\mathcal{C}$  privé de 0.

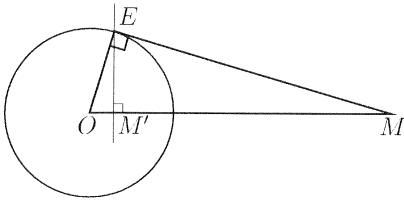


figure 1

Pour tout point  $M$  du plan, d'image  $M'$  par cette application  $I$  qu'on appelle inversion de pôle  $O$  et de puissance 1, on a :

$$M' \in [OM) \text{ et } OM \cdot OM' = 1$$

Pour construire l'image (ou l'antécédent) d'un point  $M$  extérieur au disque unité, il suffit de construire la tangente en  $M$  au cercle unité.

On a alors par projection :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OM} = OE^2 = 1$$

Le cercle  $\mathcal{C}(O, 1)$  et le cercle  $\gamma$  de diamètre  $[MM']$  (et de rayon  $R$ ) sont sécants, puisque l'un des points  $M$  ou  $M'$  appartient au disque de centre  $O$  et de rayon 1. Soit  $A$  l'un des points d'intersection et  $\Omega$  le milieu de  $[MM']$ .

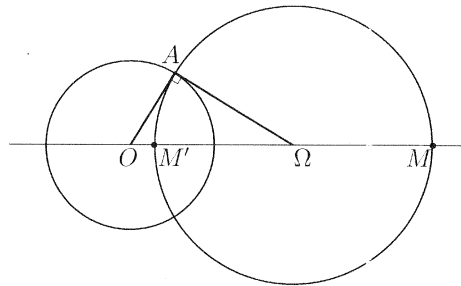


figure 2

Appelons  $d$  la distance  $O\Omega$ , on a

$$1 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = (d + R)(d - R) = d^2 - R^2$$

Ceci prouve que l'angle  $\widehat{OAA}$  est droit.

Le cercle de diamètre  $[MM']$  coupe donc orthogonalement le cercle  $\mathcal{C}(O, 1)$ , dans ce cas on parle de cercles orthogonaux. Cette propriété généralise ainsi l'orthogonalité de la réflexion...

### Des cercles et des droites.

Considérons l'équation

$$\alpha(x^2 + y^2) - 2ux - 2vy + \beta = 0$$

dans laquelle les coefficients  $(\alpha, \beta, u, v)$  désignent quatre réels ( $u, v$  et  $\alpha$  n'étant pas nuls en même temps). On voit facilement que si  $\alpha = 0$  cette équation représente une droite, alors que sinon, on reconnaît l'équation d'un cercle ou du vide. Réciproquement toute droite du plan, et tout cercle est représenté par une équation de cette forme.

Si l'on pose  $z = x + iy$ , et  $\zeta = u + iv$  l'équation devient<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \alpha z \bar{z} - u(z + \bar{z}) + 2iv(z - \bar{z}) + \beta &= 0 \\ \alpha z \bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta &= 0 \end{aligned}$$

1. Si  $\alpha \neq 0$ , la dernière équation s'écrit :  $|z - \frac{\zeta}{\alpha}|^2 = \frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}$

L'inversion  $\mathcal{I}$  d'expression complexe  $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$  induit donc une réelle *inversion* sur les coefficients de cette équation, à savoir l'application  $(\alpha, \beta, \zeta) \mapsto (\beta, \alpha, \zeta)$  de  $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{C}$

De ceci découle naturellement les énoncés suivant:

- Toute droite contenant le pôle  $(\alpha = 0) \wedge (\beta = 0)$  est globalement invariante par  $\mathcal{I}$ .
- Toute droite ne contenant pas le pôle  $(\alpha = 0) \wedge (\beta \neq 0)$  a pour image par  $\mathcal{I}$  un cercle contenant le pôle. On lit directement sur l'équation que la droite qui joint le pôle au centre du cercle inverse est orthogonale à la droite de départ.
- Tout cercle contenant le pôle  $(\alpha \neq 0) \wedge (\beta = 0)$  a pour image par  $\mathcal{I}$  une droite ne contenant pas le pôle.
- Tout cercle ne contenant pas le pôle  $(\alpha \neq 0) \wedge (\beta \neq 0)$  a pour image par  $\mathcal{I}$  un cercle ne contenant pas le pôle.

De plus le centre et le carré du rayon du cercle défini par l'équation précédente sont définis par les nombres  $\frac{\zeta}{\alpha}$  et  $\frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}$  qui deviennent  $\frac{\zeta}{\beta}$  et  $\frac{|\zeta|^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}$  après transformation.

Le cercle inverse est donc homothétique du premier cercle par une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{\alpha}{\beta}$ .

### Cocyclicité de deux couples de points homologues.

On considère les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes  $z_1$  et  $z_2$  et leurs images  $M'_1$  et  $M'_2$  d'affixes  $\frac{1}{\bar{z}_1}$  et  $\frac{1}{\bar{z}_2}$

Supposons que  $M_2$  n'appartienne pas à la droite  $(OM_1)$  et considérons le cercle  $\Gamma$  circonscrit au triangle  $M_1 M'_1 M_2$ .

Le cercle  $\Gamma$  possède une équation complexe  $\alpha z \bar{z} + z \zeta + \bar{z} \bar{\zeta} + \alpha = 0$  dont les coefficients extrêmes sont égaux puisque l'équation doit être vérifiée<sup>2</sup> à la fois pour  $z_1$  et  $\frac{1}{\bar{z}_1}$ .

Cette équation est donc également vérifiée par  $\frac{1}{\bar{z}_2}$  ce qui prouve que les points  $M_1 M'_1 M_2 M'_2$  sont cocycliques.

Deux points et leurs images par  $\mathcal{I}$  sont donc alignés ou cocycliques.

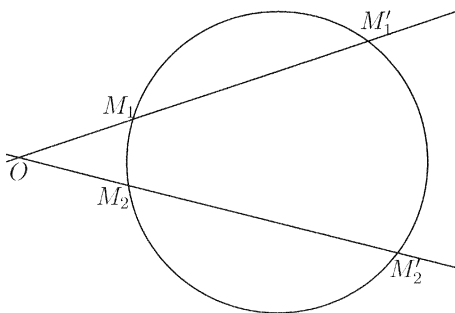


figure 3

2. Si l'on écrit *symboliquement* la forme qui représente le cercle ainsi:  $(\alpha, \zeta, \beta) \cdot z = 0$ , en soustrayant  $(\alpha, \zeta, \beta) \cdot z_1 = 0$ , et  $(\beta, \zeta, \alpha) \cdot z_1 = 0$ , on obtient  $(\alpha - \beta, 0, \beta - \alpha) \cdot z_1 = 0$ , donc  $\alpha = \beta$ .

**Exercice :**

Construire l'image d'un point  $D$  donné du plan connaissant le pôle de  $\mathcal{I}$  et un couple de points homologues par  $\mathcal{I}$ .

**Exercice :**

Que devient l'énoncé précédent lorsque  $M'_2 = M_2$ ?

**Application à l'Optique.**

Un rayon ( $ME$ ) vient rencontrer en  $E$  un miroir sphérique de centre  $C$  et de rayon  $R$ . Le rayon réfléchi est porté par la droite ( $M'E$ ) (avec  $M' \in (MC)$ ). La demi-droite  $[CM)$  coupe le miroir en  $D$ .

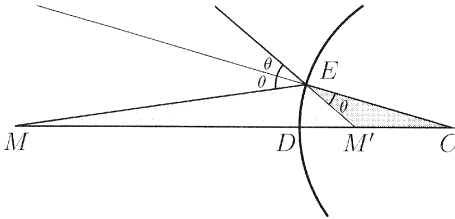


figure 4

On se place dans les conditions de l'*approximation de Gauss*. Les rayons sont presque horizontaux et l'angle d'incidence sur le miroir sphérique très petit. Avec les notations de la figure on a donc à la fois  $\theta$  et  $t$  petits.

Si l'on note  $t'$  l'angle  $M'EM$ , on a  $t + t' = 2\theta$ , l'angle  $t'$  est aussi un infiniment petit.

En appliquant dans les triangles  $MEC$  et  $M'EC$  la propriété des si-

nus on trouve :

$$\frac{\sin t}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{CM} = \frac{\sin \theta}{CM}$$

et

$$\frac{\sin t'}{R} = \frac{\sin(\pi - \theta)}{CM'} = \frac{\sin \theta}{CM'}$$

En confondant comme c'est l'usage dans de tels cas les sinus et les angles on obtient enfin :

$$\frac{t + t'}{R} = \frac{2\theta}{R} = \theta \left( \frac{1}{CM} + \frac{1}{CM'} \right)$$

soit

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{CM} + \frac{1}{CM'}$$

On peut<sup>3</sup> aussi déduire de ce résultat que  $\overline{CM} \cdot \overline{CM'} = CD^2$ .

Si l'on prend  $R$  comme unité, le point  $M'$  est donc l'image de  $M$  par l'inversion  $\mathcal{I}$  de pôle  $C$ , ce qui généralise agréablement les propriétés optiques de la symétrie par rapport à une droite.

3. Cette relation est l'une des propriétés caractéristiques de ce qu'on appelle une *division harmonique*.



**Généralisation.**

On appelle inversion de pôle  $O$  et de puissance  $k$  réel non nul la composée  $I_k$  de  $\mathcal{I}$  et de l'homothétie  $H_k$  de centre  $O$  et de rapport  $k$ .

$$I_k = H_k \circ \mathcal{I} = \mathcal{I} \circ H_{\frac{1}{k}}$$

Les propriétés déjà démontrées pour  $\mathcal{I}$  s'étendent naturellement sans difficulté à  $I_k$  dont l'expression complexe est  $z \mapsto \frac{k}{\bar{z}}$  avec  $(k \in \mathcal{R})$ .

**Conservation des angles.**

Soit  $t \mapsto z_1(t)$  et  $t \mapsto z_2(t)$  deux arcs de classe  $C_1$  sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathcal{R}$  et supposons, de plus, qu'en  $t_0$ , on ait  $z_1(t_0) = z_2(t_0)$ . Les deux arcs admettent deux tangentes  $T_1$  et  $T_2$  au point d'affixe  $z_0$  dirigées par  $z'_1(t_0)$  et  $z'_2(t_0)$  si nous supposons que ces complexes sont non nuls. Les arcs images auront au point image des tangentes  $T'_1$  et  $T'_2$  dirigées par les vecteurs d'affixes  $-\frac{k \cdot \bar{z}'_1(t_0)}{\bar{z}_1^2(t_0)}$  et  $-\frac{k \cdot \bar{z}'_2(t_0)}{\bar{z}_2^2(t_0)}$  telles que :

$$(T'_1, T'_2) = \arg \frac{\bar{z}'_2(t_0)}{\bar{z}'_1(t_0)} \quad [\pi]$$

or 
$$\frac{\bar{z}'_2(t_0)}{\bar{z}'_1(t_0)} = -\arg z'_2(t_0) + \arg z'_1(t_0) = (T_2, T_1) \quad [\pi]$$

Les angles de droites sont donc conservés au signe près (comme avec les réflexions), quand on inverse deux courbes.

**Une définition de l'inversion par la projection stéréographique.**

Considérons une sphère  $S$  et un point  $N$  de cette sphère (que nous pouvons assimiler à son "pôle nord"). La projection stéréographique est la projection centrale de la sphère sur le plan tangent au pôle sud.

Notons  $(P)$  ce plan tangent au point diamétralement opposé au point  $N$  sur la sphère  $(S)$ , le point  $O$ .

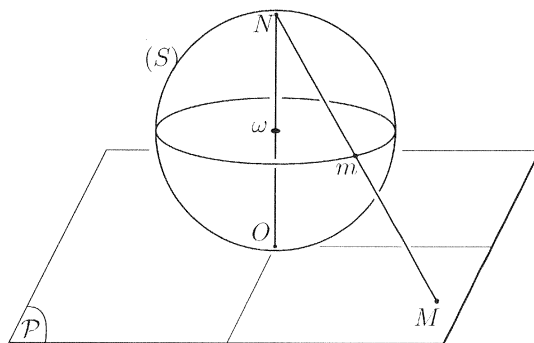


figure 5

Cette transformation est alors une bijection de la sphère  $(S)$  privée du point  $N$  sur le plan  $(P)$ .

Proposition L'image d'un cercle de la sphère ( $S$ ) ne contenant pas  $N$  est un cercle sur le plan ( $P$ ).

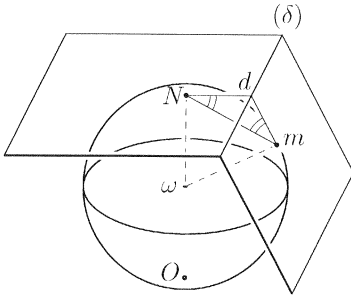


figure 6

Preuve :

a) Considérons un point  $m$ , distinct de  $N$ , sur ( $S$ ). Notons  $(\delta)$  la droite d'intersection entre les plans tangents à ( $S$ ) aux points  $N$  et  $m$ .

Soit  $d$  l'intersection de  $\delta$  avec le plan  $(N\omega m)$ .

On a

$$(\overrightarrow{Nm}, \overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{md}, \overrightarrow{mN})$$

b) Notons  $(\Delta)$  la droite d'intersection du plan tangent en  $m$  à la sphère ( $S$ ) et ( $P$ ).

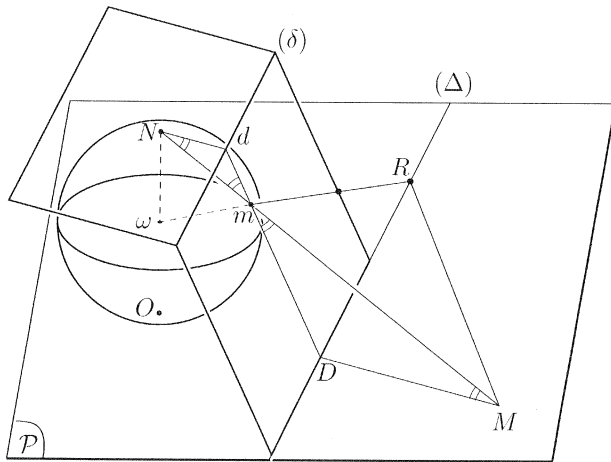


figure 7

Puisque les plans tangents en  $N$  et en  $O$  (le plan ( $P$ )) sont parallèles on a  $(\overrightarrow{Nm}, \overrightarrow{Nd}) = (\overrightarrow{Mm}, \overrightarrow{MD})$ , le triangle  $mMD$  est donc isocèle en  $D$ .

De plus, le plan tangent en  $N$  est perpendiculaire à  $(N\omega)$ ; donc  $(\delta) \perp (N\omega)$

De même,  $(\delta) \perp (m\omega)$ .

donc  $(\delta) \perp (N\omega m)$

Les droites  $(\delta)$  et  $(\Delta)$  sont parallèles car elles se trouvent à l'intersection d'un plan avec deux plans parallèles. Comme, de plus, les points  $N, m, M, \omega, d, D$  sont coplanaires, on obtient

$$(\Delta) \perp (mMD)$$

Si  $R$  est un point de  $(\Delta)$ , on applique le théorème de Pythagore dans les triangles  $RDm$  et  $RDM$ , pour obtenir, puisque le triangle  $mMD$  est isocèle en  $D$ ,  $RmM$  est isocèle en  $R$  et donc

$$(\overrightarrow{mR}, \overrightarrow{mM}) = (\overrightarrow{Mm}, \overrightarrow{MR}). \quad (\bullet)$$

On remarque que  $(Rm)$  est une droite tangente à cette sphère incluse dans le plan tangent en  $m$  à la sphère  $(S)$ .

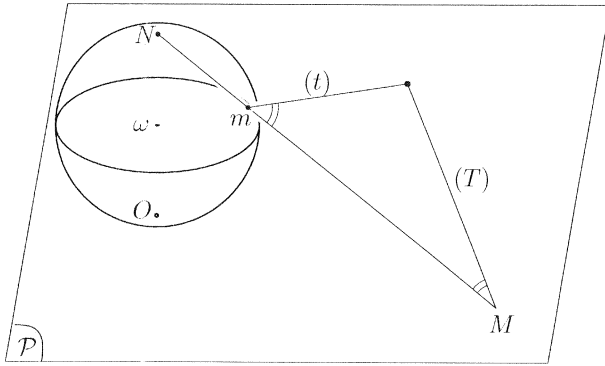


figure 8

c) Utilisons ce résultat pour démontrer que la projection stéréographique est une transformation conforme (c'est-à-dire qu'elle conserve les angles).

Soit  $(t)$  une tangente à  $(S)$  en  $m$  de projection  $M$  sur  $(P)$ .

Soit alors  $(T)$  la droite projection de  $(t)$  sur  $(P)$ .

Nous savons que l'angle de droites formé par la droite  $(NM)$  avec la

droite  $(t)$  d'une part et avec la droite  $(T)$  d'autre part sont égaux.

Considérons deux tangentes  $(t_1)$  et  $(t_2)$  à la sphère  $(S)$  au point  $m$  et leurs images  $(T_1)$  et  $(T_2)$  par la projection. Elles contiennent donc le point  $M$  projeté du point  $m$  par la projection stéréographique.

Notons

$$R = (t_1) \cap (T_1)$$

et

$$Q = (t_2) \cap (T_2)$$

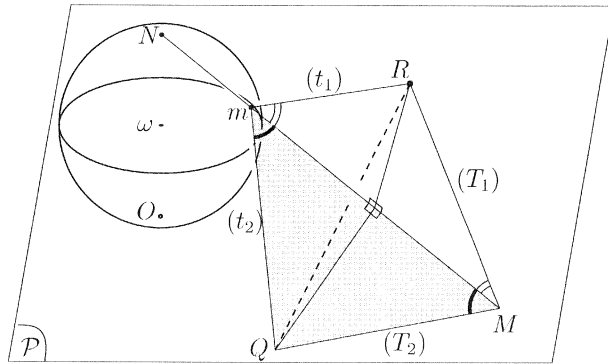


figure 9

Les triangles  $RMm$  et  $QMm$  sont isocèles respectivement en  $R$  et  $Q$  donc ces deux points se trouvent sur le plan médiateur de  $[mM]$ .

Ce plan est un plan de symétrie de la figure. L'angle formé entre les droites  $(t_1)$  et  $(t_2)$  est égal à l'angle formé entre  $(T_1)$  et  $(T_2)$ .

d) Prenons un cercle  $(c)$  sur la sphère  $(S)$  ne contenant pas  $N$  et soit  $(C)$  son image sur le plan  $(P)$  par la projection stéréographique.

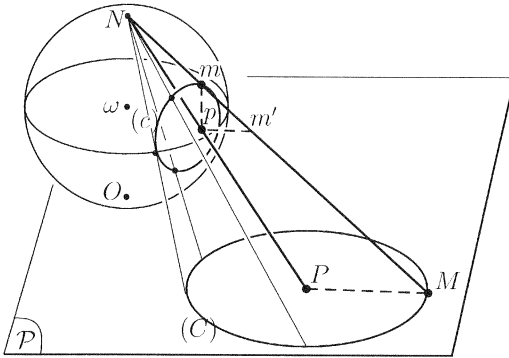


figure 10

Le cône formé par les intersections des plans tangents à la sphère passant par les points de (c) a pour sommet p d'image P par la projection stéréographique. Soient m un point de (c) d'image M sur (C). La parallèle à (MP) menée par p coupe (NM) en m'.

En reprenant (•) sur les données de la figure suivante, on obtient :

$$(\overrightarrow{m\dot{p}}, \overrightarrow{m\dot{M}}) = (\overrightarrow{M\dot{m}}, \overrightarrow{M\dot{P}}) \quad [\pi].$$

Soit  
 $(\overrightarrow{m\dot{p}}, \overrightarrow{N\dot{m}}) = (\overrightarrow{N\dot{M}}, \overrightarrow{M\dot{P}}) \quad [\pi].$   
 Or les droites (pm') et (PM) sont parallèles donc  
 $(\overrightarrow{Nm'}, \overrightarrow{m'p}) = (\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{MP}) \quad [\pi].$   
 On obtient finalement  
 $(\overrightarrow{Nm'}, \overrightarrow{m'p}) = (\overrightarrow{m\dot{p}}, \overrightarrow{N\dot{m}}) \quad [\pi].$   
 Deux cas se présentent et deux seulement. Ou bien les points sont confondus, ou bien m'p m' est un triangle isocèle. Mais dans ces deux cas, on a toujours

$$m'p = mp$$

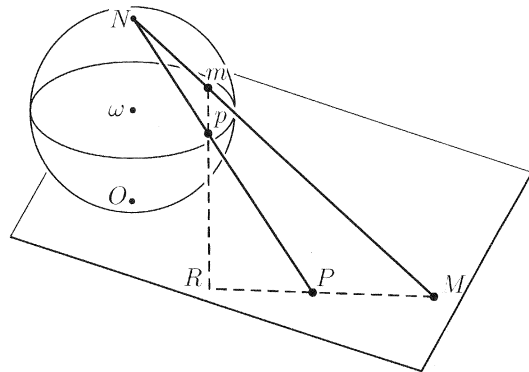


figure 11

D'après le théorème de Thalès dans le triangle NMP où (MP) || (m'p), MP est proportionnel à m'p qui est constant égal à mp donc MP est constant et M appartient au cercle (C).

Dans le cas où le cercle (C) contient N alors ce cercle peut être considéré comme l'intersection entre la sphère (S) et un plan (Π). Or ce plan coupe le plan (P) suivant une droite. Ainsi, l'image d'un cercle passant par N est une droite sur (P).

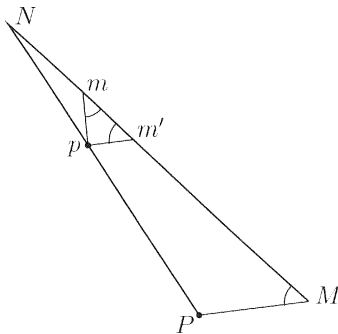


figure 12

A ce point de l'exposé, il est utile de considérer le complété de  $\mathcal{C}$ . On définit alors une bijection de  $(S)$  sur  $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  (appelé alors Sphère de Riemann) et les droites du plan  $(P)$  identifiées à  $\tilde{\mathcal{C}}$  sont des cercles dont le centre est envoyé à l'infini.

Ainsi, l'image d'un cercle de  $(S)$  est un cercle de  $(P)$  (ou cercle-droite) par la projection stéréographique.

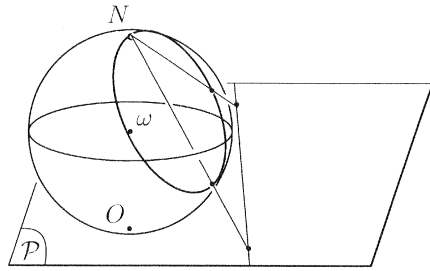


figure 13

**Une définition de l'inversion.**

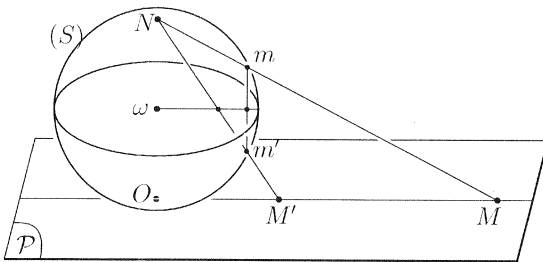


figure 14

A un point  $M$  du plan  $(P)$ , on fait correspondre le point  $m$  de la sphère tel que  $M$  soit la projection stéréographique du point  $m$ . Le point  $m'$  est le symétrique de  $m$  par rapport au plan  $(P')$ , parallèle à  $(P)$  passant par le centre de la sphère (plan de l' "équateur"). Le point  $M'$  est alors défini comme

le projeté stéréographique du point  $m'$  sur le plan  $(P)$ .

La transformation qui, à tout point  $M$  du plan  $(P)$ , fait correspondre le point  $M'$  est une inversion du plan  $(P)$ .

Démonstration :

Les points  $N, \omega, O, m, M, m', M'$  sont coplanaires et les points  $O, M$  et  $M'$  se trouvant à l'intersection de ce plan avec le plan  $(P)$ , ils sont alignés. 1

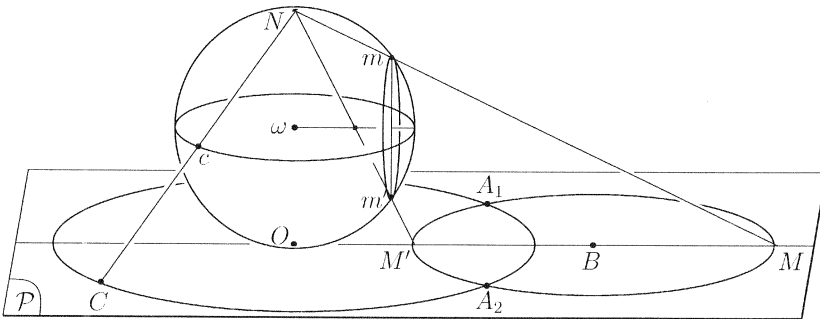


figure 15

Soient  $(c_1)$  le cercle se trouvant à l'intersection du plan parallèle à  $(P)$  passant par  $\omega$  et de  $(S)$  et  $(c_2)$  le cercle de diamètre  $[mm']$  sur  $(S)$ .

Soit  $B$  le centre du cercle  $(C_2)$ , image de  $(c_2)$ .

On a alors  $\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = (OB - BM') \cdot (OB + BM) = OB^2 - R^2$  en notant  $R$  le rayon du cercle  $(C_2)$ .

Preuve: Les tangentes aux points d'intersection des deux cercles sont perpendiculaires.

En effet, les tangentes à  $(c_2)$  sont parallèles à  $(mm')$  qui est perpendiculaire au plan de  $(c_1)$  donc ces tangentes sont perpendiculaires aux tangentes à  $(c_1)$  aux mêmes points.

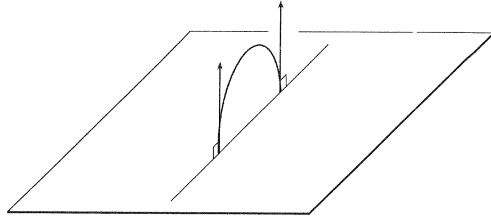


figure 16

Comme la projection stéréographique conserve les angles, les cercles images  $(C_1)$  et  $(C_2)$  sont orthogonaux en deux points  $A_1$  et  $A_2$ . Si on suppose la sphère  $(S)$  de centre  $\omega$  et de rayon  $r$ , alors le cercle image  $(C_1)$  sera de rayon  $2r$  (par le théorème de Thalès, par exemple).

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle  $OA_1B$  par exemple, on obtient :

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = OB^2 - R^2 = (2r)^2 = \text{constante} \quad [2]$$

[1] et [2] prouvent que la transformation  $\mathcal{I}$  est une inversion de centre  $O$  dans le plan  $(P)$  (qui laisse d'ailleurs le cercle  $(C_1)$  invariant).

L'inversion plane se révèle être ainsi une simple symétrie plane dans l'espace via la projection stéréographique.

### Premières propriétés

- L'image d'une droite contenant le point  $O$  par l'inversion  $\mathcal{I}$  est cette même droite.

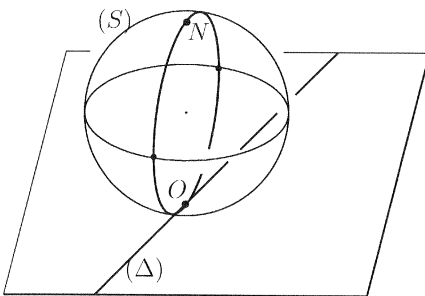


figure 17

Soit  $(\Delta)$  une droite de  $(P)$  contenant  $O$ . Le plan défini par cette droite et le point  $N$  coupe la sphère  $(S)$  en un cercle de diamètre  $[NO]$ . Le symétrique de ce cercle par la réflexion  $s$  est un cercle sur la sphère de diamètre  $[NO]$ , donc le cercle lui-même. L'intersection du plan défini par ce cercle avec le plan  $(P)$  est la droite  $(\Delta)$ .

- L'image d'une droite ne contenant pas  $O$  est un cercle contenant  $O$ .

Soit  $(\Delta)$  une droite de  $(P)$  ne contenant pas  $O$ . Le plan défini par cette droite et le point  $N$  coupe la sphère  $(S)$  en un cercle contenant  $N$ . Le symétrique de ce cercle par la réflexion  $s$  est un cercle sur la sphère passant par  $O$  et ne contenant pas  $N$ . L'image par la projection stéréographique d'un cercle ne contenant pas  $N$  est un cercle.  $O$  étant invariant par la projection, ce cercle contient  $O$ .

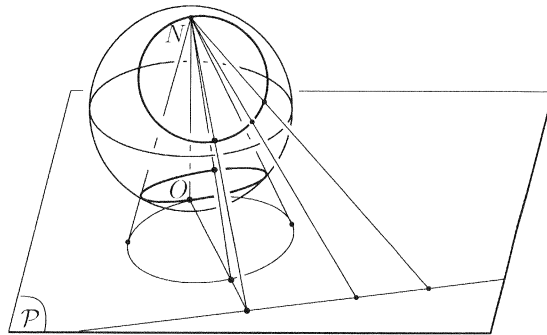


figure 18

- L'image d'un cercle ne contenant pas  $O$  est un cercle ne contenant pas  $O$ .

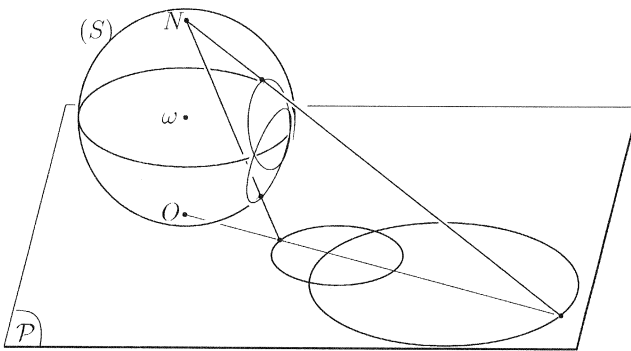


figure 19

Par la réciproque de la projection stéréographique, l'image d'un cercle sur le plan  $(P)$  est un cercle sur  $(S)$  ne contenant pas  $N$ . De plus, ce cercle ne contient pas  $O$  qui n'appartient pas au cercle initial. Le symétrique par  $s$  de ce cercle est un cercle sur  $(S)$  ne contenant ni  $O$  ni  $N$ .

Puis, par la projection stéréographique, ce cercle sur la sphère a pour image un cercle sur le plan  $(P)$  ne contenant pas  $O$ . Ce cercle est ainsi le cercle inverse du cercle initial.

- L'image d'un cercle contenant  $O$  est une droite ne contenant pas  $O$ .

Il suffit pour cela d'appliquer le raisonnement précédent sur la bijection  $\mathcal{I}$  du plan  $(P)$ .

## Représentation algébrique.

### Puissance d'un point par rapport à un cercle.

On se donne deux points  $M, N$  fixés dans le plan, leurs images  $M_1, N_1$  par une inversion de pôle  $A$  et de puissance 1, puis les images  $M', N'$  de ces derniers points par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport  $k$ . Il est facile de voir que les points  $M, N, M', N'$  sont encore cocycliques.

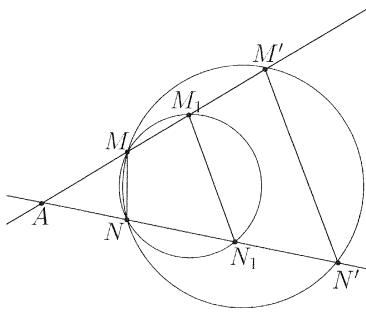


figure 20

En effet nous savions déjà que les points  $M, N, M_1, N_1$  étaient cocycliques et de plus les droites  $(M_1N_1)$  et  $(M'N')$  sont parallèles donc :

$$\begin{aligned} (MN, MM_1) &= (N_1N, N_1M_1) \\ &= (N'N, N'M') \quad [\pi] \end{aligned}$$

Réciproquement si  $M, N, M', N'$  sont quatre points du plan donnés, tels que les droites  $(MM')$  et  $(NN')$  sont sécantes en  $A$ , l'image de  $N$  par l'inversion de pôle  $A$  qui envoie  $M$  sur  $M'$  appartient à l'intersection de la droite  $(AN)$  et du cercle circonscrit au triangle  $(MM'N)$ . Donc cette image est  $N'$ .

Proposition :

Étant donnés trois points  $M, M', N'$  non alignés, un point  $N$  appartient au cercle  $\gamma$  circonscrit à  $(MM'N)$  si et seulement si (en désignant par  $A$  l'intersection des droites  $(MM')$  et  $(NN')$ ) :

$$\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AN} \cdot \overline{AN'}$$

Cet invariant est appelé la puissance du point  $A$  par rapport au cercle  $\gamma$  et noté  $P_\gamma(A)$ , on<sup>4</sup> a pour un cercle  $\gamma$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  :

$$P_\gamma(A) = OA^2 - R^2$$

Si nous supposons que le cercle est d'équation :  $z\bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta = 0$  et si nous appelons  $\omega$  l'axe de  $A$ , on a déjà vu que  $R^2 = |\zeta|^2 - \beta$ , d'où

$$P_\gamma(A) = OA^2 - R^2 = |\omega - \zeta|^2 - (|\zeta|^2 - \beta) = \omega\bar{\omega} - \omega\bar{\zeta} - \bar{\omega}\zeta + \beta$$

$$P_\gamma(A) = \begin{pmatrix} \bar{\omega} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne l'envie de représenter l'ensemble des cercles et des droites par des matrices à coefficients complexes.

### Représentation matricielle des cercles-droites.

On va donc associer à tout cercle-droite d'équation générale

$$\alpha z\bar{z} - z\bar{\zeta} - \bar{z}\zeta + \beta = 0$$

la matrice  $H = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix}$  avec<sup>5</sup>  $\alpha, \beta$  réels et  $\zeta$  complexe.

4. Ce résultat a déjà été montré au début de ce texte, on peut aussi le retrouver en faisant tendre le point  $N$  vers le point  $M$  fixé sur le cercle  $\gamma$  dans ce cas le triangle  $(AMO)$  devient rectangle et le résultat découle du théorème de Pythagore.

5. Plus précisément, on sait que  $\alpha$  peut s'annuler, mais si  $\alpha$  est nul, alors  $\zeta$  lui ne peut plus s'annuler.



Ces matrices ont une propriété remarquable : prendre la transposée revient à prendre la conjuguée, on les appelle matrices hermitiennes.

Remarquons d'abord que le déterminant de  $H$  vaut  $\alpha\beta - |\zeta|^2$ .

Si  $\alpha$  est nul, alors ce déterminant ne s'annule pas. Sinon on peut écrire avec  $R$  le rayon du cercle

$$\det H = \alpha^2 \left( \frac{\beta}{\alpha} - \frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} \right) = -\alpha^2 R^2$$

Les cercles points correspondent donc exactement aux matrices hermitiennes de déterminant nul, c'est-à-dire aux matrices non inversibles. Par souci de régularité on associe aux matrices hermitiennes un cercle même lorsque  $\left( \frac{|\zeta|^2}{\alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) > 0$ , dans ce cas on parle de cercles imaginaires.

De plus si l'on note  $\mathcal{I}$  l'inversion de pôle  $O$  et de puissance  $-1$   $\mathcal{I} : z \mapsto \frac{-1}{\bar{z}}$ , et si l'on transforme par  $\mathcal{I}$  l'équation suivante

$$\alpha z \bar{z} - z \bar{\zeta} - \bar{z} \zeta + \beta = 0,$$

on obtient après multiplication par  $z \bar{z}$

$$\beta z \bar{z} + z \bar{\zeta} + \bar{z} \zeta + \alpha = 0,$$

et donc à une forme de matrice  $H = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix}$

on associe la forme de matrice  $H' = \begin{pmatrix} \beta & \zeta \\ \bar{\zeta} & \alpha \end{pmatrix}$  qui est la transposée de la co-matrice de  $H$ , qu'on appelle matrice complémentaire de  $H$ .

Si  $H$  est inversible on sait que

$$\det(H)H^{-1} = H'$$

montrant ainsi que la matrice associée à l'inverse d'un cercle par  $\mathcal{I}$  est l'inverse de la matrice de départ.

On peut en prime regarder comment le groupe de Moëbius opère sur ces matrices puisque les transformations homographiques opèrent naturellement sur les équations de cercle. Bien entendu l'opération de ce groupe se fait par conjugaison.

### Une analogie.

Pour mieux comprendre ce qui suit on va commencer par une analogie. Considérons un plan  $\Pi$  de vecteurs muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  relativement au produit scalaire usuel noté  $( \mid )$ .

Ainsi si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs de coordonnées  $(x, y)$  et  $(x', y')$ , on a comme à l'ordinaire

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = xx' + yy'$$

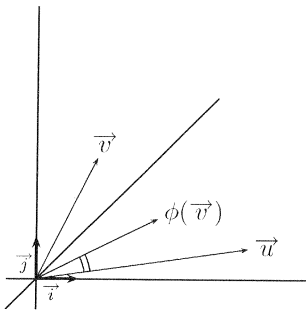


figure 21

Considérons  $\phi$  l'application linéaire de  $\Pi$  dans  $\Pi$  qui échange  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  (c'est la symétrie par rapport à la première bissectrice).

On peut définir une nouvelle forme linéaire sur  $\Pi$  en posant :

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}; \vec{v} \rangle &= (\vec{u} | \phi(\vec{v})) \\ &= xy' + x'y \\ &= (\vec{v} | \phi(\vec{u})) \\ &= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle \end{aligned}$$

Cette forme est encore bilinéaire et symétrique, mais ce n'est plus exactement un produit scalaire puisque le signe de  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 2xy$  n'est pas constant.

Si l'on cherche à mesurer les angles avec un rapporteur étalonné de cette manière, il faut effectuer d'abord la symétrie par rapport à la première bissectrice. Les angles mesurés ainsi sont en quelque sorte l'image des angles ordinaires vu au travers du prisme<sup>6</sup> de l'application  $\phi$ .

Dans ce qui suit on essaie de relier, de même, les angles de cercles et de droites à une forme classique.

### Lien avec la forme quadratique fondamentale.

La forme  $(H, K) \mapsto \text{Tr}({}^t\bar{H}K)$  est une forme bilinéaire définie positive sur l'ensemble des matrices  $2 \times 2$ . En effet si  $H = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , on a :

$$\text{Tr}({}^t\bar{H}H) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2.$$

Sur l'ensemble des matrices hermitiennes, la restriction de cette forme s'exprime plus facilement :

$$\text{Tr}({}^t\bar{H}H) = \text{Tr}(H_2)$$

et donc si

$$H_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\zeta_1 \\ -\bar{\zeta}_1 & \beta_1 \end{pmatrix}, \text{ et } H_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & -\zeta_2 \\ -\bar{\zeta}_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } (H_1 | H_2) = \alpha_1\alpha_2 + \zeta_1\bar{\zeta}_2 + \zeta_2\bar{\zeta}_1 + \beta_1\beta_2.$$

Nous avons vu que l'inversion  $\mathcal{I}$  de pôle  $O$  et de rapport  $-1$  s'interprète comme l'application qui à une matrice hermitienne  $K$  associe sa matrice complémentaire.

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & -\zeta \\ -\bar{\zeta} & \beta \end{pmatrix} \mapsto \tilde{K} = \begin{pmatrix} \beta & \zeta \\ \bar{\zeta} & \alpha \end{pmatrix}$$

6. Il y a même des vecteurs orthogonaux à eux-mêmes, par exemple tous les vecteurs des axes de coordonnées

Elle est donc la restriction à cet espace de l'endomorphisme de l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes :

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \tilde{K} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que pour tout couple de matrices hermitiennes ou même quelconques on a

$$(H|\mathcal{I}(K)) = (\mathcal{I}(H)|K)$$

si bien que l'inversion  $\mathcal{I}$  s'interprète comme un opérateur auto-adjoint pour cette forme quadratique fondamentale. Cet opérateur va jouer le même rôle que la symétrie de notre exemple précédent.

### La nouvelle forme.

La forme bilinéaire induite par la forme quadratique  $q$  qui correspond au déterminant

$$q(A) = -\det(A),$$

est la suivante :

$$4 \langle A, B \rangle = \det(A - B) - \det(A + B).$$

Si l'on suppose la matrice hermitienne  $B$  inversible on peut écrire

$$\begin{aligned} 4 \langle A, B \rangle &= \det(B)[\det(B^{-1}A - I) - \det(B^{-1}A + I)] \\ &= \det(B)[\Phi_{B^{-1}A}(1) - \Phi_{B^{-1}A}(-1)] \end{aligned}$$

où  $\Phi_M(X) = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$  désigne le polynôme caractéristique de la matrice  $M$ .

Comme un polynôme du second degré prend les mêmes valeurs en 1 et en  $-1$  si et seulement si le terme de degré 1 est nul, on obtient le résultat suivant;

$$2 \langle A, B \rangle = -\det(B)\text{Tr}(B^{-1}A) = -\text{Tr}({}^t\text{com}(B) | A) = -(A | {}^t\text{com}(B)).$$

Le résultat précédent devient si l'on note, comme précédemment  $\mathbf{i} : z \mapsto \frac{-1}{\bar{z}}$ ,

$$-2 \langle A, B \rangle = (A|\mathcal{I}(B))$$

donnant alors en quelque sorte l'hérédité de l'orthogonalité sur les cercles.

### Exemples.

#### Cas de deux droites.

L'équation normale d'une droite est

$$x \cos \theta + y \sin \theta + p = 0$$

qui s'écrit en coordonnées complexes

$$(z + \bar{z}) \cos \theta - \mathbf{i}(z - \bar{z}) \sin \theta + 2p = 0$$

donc (avec  $q = 2p$ )

$$ze^{-i\theta} + \bar{z}e^{i\theta} + q = 0$$

associée à la matrice  $A_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & q \end{pmatrix}$

Le produit scalaire mesuré entre deux droites s'obtient donc par

$$-2 \langle A_\theta, A_\phi \rangle = (A_\theta | \mathcal{I}(A_\phi)) = \text{Tr}(A_\theta^t \text{com}(A_\phi))$$

$$-2 \langle A_\theta, A_\phi \rangle = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} \mathbf{0} & e^{i\theta} \\ e^{-i\theta} & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -e^{i\phi} \\ -e^{-i\phi} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right) = -2 \cos(\phi - \theta)$$

On retrouve donc l'angle entre les deux droites.

$$\langle A_\theta, A_\phi \rangle = \cos(\phi - \theta)$$

À noter que si l'on était resté avec le produit scalaire ordinaire on trouverait la somme des angles et non leur différence. Je pense que c'est la propriété d'anti-parallélisme qui est utile ici.

### Cas de deux cercles.

Si deux matrices hermitiennes représentent deux cercles de centres  $\omega_1$  et  $\omega_2$  et de rayons  $R_1$  et  $R_2$ , on a

$$-2 \langle H_1, H_2 \rangle = (H_1 | \mathcal{I}(H_2)) = \text{Tr} \left( \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_1 \\ -\bar{\zeta}_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 & \zeta_2 \\ \bar{\zeta}_2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \beta_1 + \beta_2 - \zeta_1 \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_2 \zeta_1.$$

Or

$$\beta_1 + \beta_2 - \zeta_1 \bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_2 \zeta_1 = \beta_1 + \beta_2 + |\zeta_1 - \zeta_2|^2 - |\zeta_1|^2 - |\zeta_2|^2 = \omega_1 \omega_2^2 - R_1^2 - R_2^2.$$

Comme

$\mathbf{q}(H_1) = -\det(H_1) = -R_1^2$  et  $\mathbf{q}(H_2) = -R_2^2$  on pose  $\|H_1\| = R_1$  et  $\|H_2\| = R_2$  la quantité

$$\frac{\langle H_1, H_2 \rangle}{\|H_1\| \|H_2\|} = \frac{R_1^2 + R_2^2 - \omega_1 \omega_2^2}{2R_1 R_2}$$

représente «l'angle» entre les deux cercles. Si les cercles sont sécants en  $L$ , d'après l'égalité d'Al Kashi on a

$$\frac{R_1^2 + R_2^2 - \omega_1 \omega_2^2}{2R_1 R_2} = \cos \omega_1 \widehat{E} \omega_2$$

## Bibliographie

- [1] M. BERGER, 1979. *Géométrie*; 2 tomes, Nathan.
- [2] J. HADAMARD, 1949. *Leçons de géométrie*, 2 tomes,  
Ré-édition Jacques Gabay, 1988.
- [3] D. HILBERT et S. COHN-VOSSEN, 1952. *Geometry and Imagination*;  
Chelsea Publishing Company, New York.
- [4] L. SINÈGRE, juin 1999. *L'inversion*  
Dans *Aimer faire des maths au lycée n°6 IREM de ROUEN*.
- [5] F. VIVIEN, juin 1999. *La projection stéréographique*  
Dans *Aimer faire des maths au lycée n°6 IREM de ROUEN*.



## Adresses des IREM

<http://www.univ-irem.fr>

	Téléphone	Directeur
<p><b>ANTILLES GUYANE</b></p> <p>Université Antilles - Guyane Campus de Fouillole 97159 POINTE A PITRE Guadeloupe</p>	<p>Tél: 05 90 48 92 02 Fax: 05 90 48 92 02 antoine.delcroix@ univ-ag.fr</p>	<p>Antoine DELCROIX</p>
<p><b>BESANÇON</b></p> <p>UFR des Sciences et Techniques 16, Route de Gray 25030 BESANÇON cedex</p>	<p>Tél: 03 81 66 62 25 Fax: 03 81 66 62 34 iremfc@math. univ-fcomte.fr</p>	<p>Claude MERCKER</p>
<p><b>BORDEAUX</b></p> <p>Institut Lamartine - I.F.E. 40, Rue Lamartine 33400 TALENCE</p>	<p>Tél: 05 56 84 89 74 Fax: 05 56 84 89 72 irem@irem. u-bordeaux.fr</p>	<p>Pierre TERRACHER</p>
<p><b>BREST</b></p> <p>UFR Sciences - B.P. 809 6, Av. Victor Le Gorgeu 29285 BREST cedex</p>	<p>Tél: 02 98 01 65 44 Fax: 02 98 01 64 41 irem@univ-brest.fr</p>	<p>Thierry GIORGIUTTI</p>

	Téléphone	Directeur
<p><b>CAEN</b></p> <p>Campus II - Sciences III Boulevard Maréchal Juin 14032 CAEN</p>	<p>Tél : 02 31 56 74 01 Fax : 02 31 56 74 90 irem@mail. math.unicaen.fr</p>	G. DAMAMME
<p><b>CLERMONT-FERRAND</b></p> <p>Université de Clermont II Compl. Scient. des Cégeaux 63177 AUBIERE cedex</p>	<p>Tél : 04 73 40 70 98 Fax : 04 73 40 70 78 irem@univ- bpcclermont.fr</p>	Annie NOIRFALISE
<p><b>DIJON</b></p> <p>Université de Bourgogne Faculté Sciences Mirande B.P. 47870 21078 DIJON cedex</p>	<p>Tél : 03 80 39 52 30 Fax : 03 80 39 52 39 Irem.Dijon@ mail.u-bourgogne.fr</p>	Louis MAGNIN
<p><b>GRENOBLE</b></p> <p>Domaine Universitaire IREM - B.P. 41 38402 ST MARTIN D'HERES cedex</p>	<p>Tél : 04 76 51 46 62 Fax : 04 76 51 42 37 direm@ujf-grenoble.fr</p>	Marc LEGRAND
<p><b>LA RÉUNION</b></p> <p>IUFM Allée des Aigues Marines Bellepierre 97487 SAINT DENIS</p>	<p>Tél : 02 62 90 43 43 Fax : 02 62 90 43 00</p>	Eric BUTZ



	Téléphone	Directeur
<p><b>LILLE</b></p> <p>U.S.T.L IREM - Bat M1 59655 VILLENEUVE D'ASCQ cedex</p>	<p>Tél: 03 20 43 41 81 Fax: 03 20 33 71 61 irem@univ-lille1.fr</p>	<p>Valerio VASSALLO</p>
<p><b>LIMOGES</b></p> <p>123, Avenue Albert Thomas 87060 LIMOGES cedex</p>	<p>Tél: 05 55 45 72 49 Fax: 05 55 45 73 20 irem@unilim.fr</p>	<p>Anne BELLIDO</p>
<p><b>LYON</b></p> <p>Université Claude Bernard 43, bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE cedex</p>	<p>Tél: 04 72 44 81 24 Fax: 04 72 44 80 67 iremlyon@ univ-lyon1.fr</p>	<p>Michel MIZONY</p>
<p><b>MARSEILLE</b></p> <p>Faculté Sciences de Luminy Case 901 163, Avenue de Luminy 13288 MARSEILLE cedex</p>	<p>Tél: 04 91 41 39 40 Fax: 04 91 82 93 43 dir@irem.univ-mrs.fr</p>	<p>Georges BLANC</p>
<p><b>MONTPELLIER</b></p> <p>Université de Montpellier II C.C. 040 Place Eugène Bataillon 34095 MONTPELLIER cedex5</p>	<p>Tél: 04 67 14 33 83 Fax: 04 67 14 39 09 irem@math. univ-montp2.fr</p>	<p>Luc TROUCHE</p>

	Téléphone	Directeur
<p>NANCY</p> <p>Faculté des Sciences B.P. 239 54506 VANDOEUVRE LES NANCY cedex</p>	<p>Tél: 03 83 91 21 99 Fax: 03 83 91 25 73 monique.freund@irem. uhp-nancy.fr</p>	<p>Bernard ANDRE</p>
<p>NANTES</p> <p>2, Rue de la Houssinière B.P. 92208 44322 NANTES cedex3</p>	<p>Tél: 02 51 12 59 40 Fax: 02 51 12 59 41 direm@unantes. univ-nantes.fr</p>	<p>Bernard TRUFFAUT</p>
<p>Antenne LE MANS</p> <p>Université du Maine Route de Laval 72017 LE MANS cedex</p>	<p>Tél: 02 43 83 32 15 Fax: 02 43 83 33 66 dominique.benard@ univ-lemans.fr</p>	<p>Dominique BENARD</p>
<p>NICE</p> <p>Université de Nice Sophia Antipolis Parc Valrose 06108 NICE cedex 2</p>	<p>Tél: 04 92 07 65 13 Fax: 04 92 07 65 10 drouhard@math. unice.fr</p>	<p>Jean-Philippe DROUHARD</p>
<p>ORLEANS</p> <p>Université d'Orléans B.P. 6759 45067 ORLEANS cedex2</p>	<p>Tél: 02 38 41 71 90 Fax: 02 38 41 71 93 irem@labomath. univ-orleans.fr</p>	<p>Jean-Pierre LAMARCHE</p>

	Téléphone	Directeur
<p><b>PARIS NORD</b></p> <p>Université de Paris XIII Av. Jean-Baptiste Clément 93430 VILLETANEUSE</p>	<p>Tél: 01 49 40 36 40 Fax: 01 49 40 36 36 iremp13@upn. univ-paris13.fr</p>	<p>Michel BOURBION</p>
<p><b>PARIS 7</b></p> <p>Paris VII - Denis Diderot Case 7018 2 place Jussieu 75251 PARIS cedex 05</p>	<p>Tél: 01 44 27 53 83 Fax: 01 44 27 56 08 iremp7@ufrp7. math.jussieu.fr</p>	<p>Michèle ARTIGUE</p>
<p><b>PICARDIE</b></p> <p>48, Rue Raspail - B.P.618 - 02321 SAINT-QUENTIN</p>	<p>Tél: 03 23 62 62 98 Fax: 03 23 64 82 62 irem@insset. u-picardie.fr</p>	<p>Marie-Jeanne POMEROL</p>
<p><b>POITIERS</b></p> <p>40, Avenue du Recteur Pineau 86022 POITIERS cedex</p>	<p>Tél: 05 49 45 38 77 Fax: 05 49 45 40 50 irem@wallis.sp2mi. univ-poitiers.fr</p>	<p>Jean SOUVILLE</p>
<p><b>REIMS</b></p> <p>IUFM 23, Rue Clément Ader - B.P. 175 - 51685 REIMS cedex2</p>	<p>Tél: 03 26 77 99 48 Fax: 03 26 85 35 04 helene.authier@ univ-reims.fr</p>	<p>Hélène AUTHIER</p>

	Téléphone	Directeur
<p><b>RENNES</b></p> <p>Campus Beaulieu - Bât. 32B - 35042 RENNES cedex</p>	<p>Tél: 02 99 28 63 42 Fax: 02 99 28 16 38 dirirem@ univ-rennes1.fr</p>	<p>Annic MORIN</p>
<p><b>ROUEN</b></p> <p>Université de Rouen Bât. de Math. Av. de Broglie - B.P.138 76821 MT ST AIGNAN</p>	<p>Tél: 02 35 14 61 41 Fax: 02 35 14 61 41 Martine.Leonard@ univ-rouen.fr</p>	<p>Martine LEONARD</p>
<p><b>STRASBOURG</b></p> <p>7, Rue René Descartes 67084 STRASBOURG cedex</p>	<p>Tél: 03 88 41 63 07 Fax: 03 88 41 64 49 irem@math. u-strasbg.fr</p>	<p>Claire DUPUIS</p>
<p><b>TOULOUSE</b></p> <p>Université Paul Sabatier 118, Route de Narbonne 31062 TOULOUSE cedex4</p>	<p>Tél: 05 61 55 68 83 Fax: 05 61 55 82 58 irem@cict.fr</p>	<p>André ANTIBI</p>

# IREM DE L'ÉTRANGER

**Liège - Luxembourg**  
Président du Conseil Scientifique: Jacques BAIR

	Téléphone	Directeur
<b>LIÈGE</b> Institut de Mathématique Grande Traverse 12 Bât. B37 B-1000 LIÈGE		Jacques NAVEZ
<b>LUXEMBOURG</b> Centre Universitaire de Luxembourg 162, Av. de la faïencerie L-1511 LUXEMBOURG		J-C DELAGARDELLE

## Amérique Centrale

	Téléphone	Directeur
<b>COSTA RICA</b>  Escuela de Matematicas Universidad de Costa Rica SAN JOSE, COSTA RICA. A.C.	bmontero@ cariari.ucr.ac.cr	Bernardo MONTERO Presidente ADIREM de Centroamérica
<b>EL SALVADOR</b>  Escuela de Matematicas Universidad de El Salvador SAN SALVADOR. EL SALVADOR. A.C.	cimat@ues.edu.sv	Carlos CANJURA
<b>GUATEMALA</b>  Escuela de Matematicas Universidad San Carlos de Guatemala GUATEMALA. A.C.		Herbert MENDEA
<b>HONDURAS</b>  Escuela de Matematicas Universidad Nacional Autonoma de Honduras TEGUCIGALPA HONDURAS. A.C.	hontweck@ hondunct.hn	Concepción FERRUFINO

	Téléphone	Directeur
<p>NICARAGUA</p> <p>Escuela de Matematicas Universidad Autonoma de Nicaragua MANAGUA NICARAGUA. A.C.</p>		Jorge A. VELASQUEZ
<p>PANAMA</p> <p>Escuela de Matematicas Universidad de Panama PANAMA PANAMA. A.C.</p>	eagard@sinfo.net	Egbert AGARD





## Les Participants

ANTIBI André - IREM de Toulouse - -  
 ARHEL Danièle - 37 ch. des Vaux Mourants - 91370 - Verrières le B.  
 ASPRA Janine - 76, rue Foch - 59120 - Loos-lez-Lille  
 AUSTIN Daniel - 9rue Viala - 62100 - Calais  
 BARBERI Daniel - 186 avenue de la Clua - 06100 - Nice  
 BARON Paul - 10, Clos de l'Étang - 91770 - St Vrain  
 BEKKHOUCHA Abdel - 31 rue Colbert - 59650 - Villeneuve d'Ascq  
 BEN MOUSSA Nathalie - 16, passage Montmirail - 76600 - Le Havre  
 BÉNARD Dominique - 45, rue Lionel Royer - 72000 - Le Mans  
 BERGUE Danielle - 27 résidence le Bocage - 76150 - La Vampelière  
 BEYRET Agnès - 17rue Désiré Delesalle - 59290 - Wasquehal  
 BICHARA Jean - IREM Antilles  
 BKOCHE Rudolf - 64 rue Négrier - 59800 - Lille  
 BOCQUET Claude - 860 rue du Cornet Malo - 62350 - Mont-Bernenchon  
 BONAFÉ Freddy - 12 rue Martin Luther King - 34070 - Montpellier  
 BONNIER Anne-Marie - 74 avenue Jean-Jaures - 59790 - Ronchin  
 BONOMI François - 46 av. pottier - 59130 - Lambersart  
 BOUGNAS Régis - F 19 Résidence Montaigne - 62220 - Carvin  
 BOURBION Michel - av J.B. Clément - 93430 - Villetaneuse  
 BOYÉ Anne - 9 avenue des Mûriers - 44500 - La Baule  
 BRAURE Christine - 8, rue Henri Matisse - 59148 - Flines-lez-Raches  
 BRIN Philippe - 20 rue Taine - 75012 - Paris  
 BRIQUET Thomas - 72 Digue de Mer - 59495 - Lefrinckoucke  
 CALONNE Alain - 28 rue du Château-Gaillard - 59440 - Avesnes-sur-Helpe  
 CAMBRESY Vinciane - 1 rue Basselart - 59260 - Hellemmes  
 CAMBRESY Dominique - 1 rue Basselart - 59260 - Hellemmes  
 CARLIER Roland - 33, rue du Dr Rappin - 44000 - Nantes  
 CARON Pierre-André - 193, Résidence Citeaux - 59800 - Lille  
 CAZIER Bernard - 45 rue du rosoir - 59211 - Santes  
 CECCONI Serge - 22 rue du Lavoir de Criel - 38500 - Voiron  
 CHAMONTIN Françoise - 19 rue du Chateau-Landon - 75010 - Paris  
 CHEVALIER Arlette - 890 Rte de Courbessac - 30000 - Nîmes  
 CLERICO Véronique - 146 Bd Napoléon III - 06200 - Nice  
 CLOART Maryse - 44, rue Victor Hugo - 59880 - St-Saulve  
 COMBES Marie Claire - Plaine du mas de Gentil - 34980 - Combaillaux

CORTIER Jean-Philippe - 19,rue de Preize - 10000 - Troyes  
 COUSIN Annie - 229 rue Léopold Dusart - 59590 - Raismes  
 CSAK Roger - 23 rue du Château d'Eau - 59330 - Hautmont  
 DA COSTA Bernard - 11 rue des 2 communes - 94370 - Sucy en Brie  
 DEBARGE Régis - 15 rue du Hurlevent - 08800 - Sedan  
 DELAETER Patrice - 30 avenue de Fumel - 47300 - Villeneuve sur Lot  
 DELEDICQ André - 50, rue des Ecoles - 75005 - Paris  
 DELERUE Jean - 164 route de Castellar - 06500 - Menton  
 DELEUZE Régis - 24 rue A. Ribot - 10000 - Troyes  
 DELHAY Martine - 8, rue des violettes - 59494 - Aubry du Hainaut  
 DELIRE Jean-Michel - 5 rue de la levure - 1050 - Bruxelles  
 DELORD Robert - 5, rue du Lys - 24000 - Périgueux  
 DENIS Marie-Hedwig - 76rue du Château d'eau - 44400 - Reze  
 DESLEE Edith - 22 rue du Dr Deborgne - 59510 - Hem  
 DESTAINVILLE Bernard - 323, route de Launaguet - 31200 - Toulouse  
 DIEVAL Alain - 8 rue Louise Michel - 80136 - Rivery  
 DOUAY Anne - 581, rue Provin - 62215 - Oye Plage  
 DRUCKÉ Fabrice - 49, rue de la Station - 59650 - Villeneuve d'Ascq  
 DUBREUCQ Francine - 43 rue A. Hayez - 59500 -Douai  
 DUMONT Gérard - 84, rue du Chevalier Français - 59800 - Lille  
 DUPAS Michelle - 54 rue H. Dumant - 59400 - Cambrai  
 DUPÉRIER Michèle - IREM d'Orléans  
 DUPERRÉ Jean-Claude - 56 Bd du 14 Juillet - 10000 - Troyes  
 DUTHOIT Lydie - 26 rue Louise Michel - 62119 - Dourges  
 ENNASSEF M'ammed - 72, rue de Dunkerque - 59155 - Fâches-Thumesnil  
 EYMERY Eliane - 104, Bd de la Liberté - 59800 - Lille  
 FABRE Audrey - 3 rue Paul Ricard - 59175 - Vendeville  
 FAUCONNET Annie - 5 bd Camille Flammarion - 13001 - Marseille  
 FÉNICE Jean-Claude - 5 rue des Vignes de Pelletier - 10800 - St Léger  
 FERTIKH Zohra - 80, rue d'Isly - 59000 - Lille  
 FLANCHEC Annick - 6 bis rue Villa Maria - 44000 - Nantes  
 FOUACHE Véronique - 110 rue du Chevalier français - 59800 - Lille  
 FRIEDELMEYER Jean-Pierre - 52 Bd d'Anvers - 67000 - Strasbourg  
 FROMENTIN Jean - 17 rue de la roussille - 79000 - Niort  
 GABRIEL Jean-Claude - n°47 bis rue Carnot - 59200 - Tourcoing  
 GAUDEUL Alain - 2 impasse Foucault - 59620 - Aulnoye  
 GAUDEUL Claire - 2 Impasse Léon Foucault - 59620 - Aulnoye  
 GAZAGNES Arnaud - 13 Quai de Seine - 51260 - Marilly sur Seine  
 GEORGET Jean-Philippe - 12, rue des Ursulines - 37000 - Tours  
 GERARD Jean-Louis - 6 rue Guy Boniface - 10440 - La Rivière de Corps  
 GERGONDEY Robert - UFR de maths USTL - 59655 - Villeneuve d'Ascq  
 GIRARD Jean-Claude - 14 rue de Champagne - 42100 - St-Etienne  
 GIRAUD Martine - 6 allée du Triez - 59650 - Villeneuve d'Ascq  
 GIRON Sophie - 5 bis Place Guy Mollet - 62000 - Arras  
 GOBIN Chantal - Rue du Collège - 86200 - Chalais

GOURNAY Sophie - 87 rue de Calais - 62500 - St Omer  
 GRANT Léon - Collège Boris Vian - - Croix  
 GRAVIER Annette - 9 rue des Bruyères - 72700 - Rouillon  
 GUEUDET Raphaëlle - 18, rue Myron Herrick - 59200 - Tourcoing  
 GUIBERT Josiane - 23 rue Huillard d'Héron - 45110 - Châteauneuf sur Loire  
 GUILLEMOT Michel - 10 Impasse de la Pélude - 31400 - Toulouse  
 GUYOT Monique - 23 allée des Bleuets - 62160 - Aix-Noulette  
 HALLEZ Maryvonne - 6, rue Boissonade - 75014 - Paris  
 HENRY Michel - 33 rue Douzelot - 25000 - Besançon  
 HERMANT Marie-Claire - 20, rue Emile Zola - 59221 - Bauvin  
 HOUSEAUX Clotilde - Collège Guy Mollet - 59160 - Lomme  
 JAMART Jean-François - 35 Bd Carnot - 93200 - St-Denis  
 JANIAUD Marie-Noëlle - 15 allée des Pinçons - 77380 - Combs la Ville  
 JANVIER Martine - 88 grande rue - 72000 - Le Mans  
 JEANBLANC Pascal - 11, rue André Devienne - 59175 - Vendeville  
 JOLI Elise - 2, rue du Boilé - 95280 - Jouy le Moutier  
 JOLY Lionel - 17, Allée de la Coquille - 59650 - Villeneuve d'Ascq  
 JUGE Guy - Carrefour Sorin - 14340 - St-Aubin le Bizay  
 KAHANE Jean-Pierre - 11, rue du Val de Grâce - 75005 - Paris  
 KERRICH Driss - 2, rue du Coquelet - 59310 - Nomain  
 KOSTRZEWA Bruno - 54, rue des Chardonnerets - 59350 - St-André  
 LACAZE Bernard - 47 rue M. Sorin De Fresne - 94400 - Vitry  
 LANATA Fabienne - 2, av. de Nordhorn - 76290 - Montivilliers  
 LARGUIER Mirène - 5 rue des Argiliers - 30660 - Gallargues  
 LASSALLE CARÈRE Laurent - 30, rue des Iris - 59680 - Ferrière la Grande  
 LAURENT Albane - 390 av Paul Hénin - 59500 - Douai  
 LE BERRE Maryvonne - 24 rue des remparts d'Arnay - 69002 - Lyon  
 LECLER Gilbert - 127, rue des Cigognes - 50000 - St-Lô  
 LECLERCQ Régis - 9/56 rue Anatole France - 59300 - Valenciennes  
 LECLERCQ Isabelle - 92 rue Faidherbe - 59260 - Hellemmes  
 LECOCQ Alain - 94 rue St Michel - 59500 - Douai  
 LELONG Michel - 66, rue Victor Hugo - 59112 - Annoulin  
 LEROY Sandrine - 7, Allée de la Bruyère - 59115 - Lecrs  
 LEVEE Freddy - Appt. 22 Rés. Bourgogne - 62700 - Bruay la Buisnière  
 LOCHOT Jean-Claude - 23 rue de Trémolois - 21000 - Dijon  
 LOCMANT Ludovic - 16 Square des Genêts - 59510 - Hem  
 LOLLIER Marc - 7, rue des Près - 59130 - Lambersart  
 LOZE Béatrice - Fusilly - 58110 - Achun  
 MARECHAL Jacky - 18 rue des Ateliers - 21000 - Dijon  
 MARMIER Anne-Marie - 132 avenue de la République - 59120 - La Madeleine  
 MARTIN-GOUSSET Edith - 4 rue de la Paix - 21121 - Fontaine lez Dijon  
 MASSOT Christian - 12 rue St Saëns - 44470 - Carquefou  
 MASSOT Annick - 12 rue St Saëns - 44470 - Carquefou  
 MAURIN Vincent - 35 rue Vauban - 59140 - Dunkerque  
 METAYER Michel - 8 rue de Mordelles - 35310 - Bréal sur Montfort



SANZ Pierre - 6 rue du commerce - 59590 - Raismes  
SAUTER Mireille - 5 rue des Noisetiers - 34170 - Castelnaud le Lez  
SECO Michel - 7, rue du Peyrou - 34300 - Agde  
SFERRA Franco - 10 rue de la république - 10000 - Troyes  
SIDOBRE Michèle - 28 rue Jean Bouin - 31520 - Ramonville  
SIMONNEAU Michèle - 58, rue d'Estienne d'Orves - 92700 - Colombes  
SINEGRE Luc - 8, Passage du Bon Pasteur - 76000 - Rouen  
SIP Jacky - 4, rue Hector Berlioz - 59135 - Wallers  
SIWEK Françoise - 92 rue Maurice Bouton - 59135 - Wallers  
SIX Jean-Marie - 73/4 rue Horae Vernet - 59100 - Roubaix  
SOUFFLET Michel - Bellevue - 61160 - Villedieu Les Bailleul  
TAINMONT Michèle - 151, rue Notre Dame de Lorette - 62300 - Lens  
TIGROUSSINE Brahim - Lycée le Verrier - 50000 - St-Lô  
TOURNIER Marc - 4 rue Roland Garros - 59139 - Wattignies  
TOUSSAINT Nicole - 20 rue Renaudot - 10160 - Aix en ôthe  
VANGHELUWE Alain - 8 avenue Joffre - 59370 - Mons-en-Baroeul  
VASSALLO Valerio - 50 rue Racine - 59000 - Lille  
VERVOORT Martine - 46 rue du Cimetière - 59251 - Allennes Les Marais  
VIGIER Noële - 29 D rue du Puy Las Rodas - 87000 - Limoges  
VIVIEN Frédéric - 28, rue des Murets - 76130 - Mt St Aignan  
VOLTAIRE Isabelle - 401 rue du Général de Gaulle - 77390 - Fouju  
WALME Thierry - Apt 24D 69 rue R. Salengro - 59300 - Famars  
WATTEAU Henri - 34, rue V. Renard - 59178 - Wasnon



## Table des matières

<b>1 Profession de foi</b>	
Jean-Pierre KAHANE . . . . .	7
<b>2 La mesure des grandeurs au Collège</b>	
Jean-Pierre FRIEDELMEYER . . . . .	11
<b>3 La géométrie d'Oronce à l'attaque</b>	
Frédéric MÉTIN . . . . .	39
<b>4 Le geste géométrique, ou l'acte de démontrer</b>	
Jean-Claude DUPERRET . . . . .	49
<b>5 Du raisonnement à la démonstration</b>	
Rudolf BKOUCHE . . . . .	87
<b>6 Perspective Centrale au Collège</b>	
Bernard CAZIER et Françoise CHAMONTIN . . . . .	115
<b>7 Marivaudage géométrique sans mesures</b>	
Martine JANVIER . . . . .	139
<b>8 Harmonique, moyenne, division, faisceau. . .</b>	
Henry PLANE . . . . .	155
<b>9 Transformations et systèmes articulés</b>	
Freddy BONAFÉ et Marie-Claire COMBES . . . . .	169
<b>10 Quelles règles pour le débat mathématique au collège?</b>	
Maryvonne LE BERRE . . . . .	177
<b>11 Quelle place pour l'aléatoire en collège?</b>	
Jean-Claude GIRARD, Michel HENRY, Jean-François PICHARD . . . . .	181
<b>12 Mais où sont les neiges d'antan?</b>	
Jean Claude GIRARD . . . . .	197

<b>13 Statistiques à propos des résultats d'un cross</b>	
Jean-François PICHARD . . . . .	209
<b>14 La didactique: un apport pour qui?</b>	
Serge CECCONI . . . . .	227
<b>15 Enseignement de la géométrie et Intranet</b>	
Jean DELERUE . . . . .	235
<b>16 Présentation des outils LILIMATH</b>	
Bruno KOSTRZEWA . . . . .	237
<b>17 Des algorithmes en géométrie</b>	
Bernard DESTAINVILLE . . . . .	241
<b>18 L'inversion, et la projection stéréographique.</b>	
Luc SINÈGRE et Frédéric VIVIEN . . . . .	249



# Commission Inter-IREM Premier Cycle

## MATHÉMATIQUES au COLLÈGE : **les enjeux d'un enseignement pour tous**

Actes du Colloque Inter-IREM Premier Cycle  
du 21-22-23 Juin 1999 à l'IREM de LILLE

### Mots clés :

aires - aléatoire - démonstration - géométrie - grandeurs - mesure - perspective - probabilité - raisonnement - statistiques - TICE.

### Résumé

Le collège est, en France, le dernier lieu de la scolarité obligatoire où un enseignement commun des mathématiques est proposé à tous les élèves.

Cet enseignement est passé d'un enseignement de «structures» dans les années 70 à un enseignement de «modélisation» dans les années 90, sans que soit peut être posée la question de fond :

*Quels en sont les enjeux et les spécificités ?*

La réponse peut aller d'un utilitarisme primaire (donner des techniques et des algorithmes utilisables dans d'autres domaines ou disciplines, voire dans la vie «courante») à une philosophie teintée d'humanisme (donner un instrument d'intelligibilité au monde).

Cette question fondamentale guide le «sens» qu'on va donner à cet enseignement. Est-il le même dans d'autres pays ? Ceux qui nous entourent ? Ceux en voie de développement ? Peut-on espérer une réponse universelle ?



ISBN 2-912126-08-8

Edition : IREM de LILLE

Bât. M1 - USTL 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex

e-mail : irem@univ-lille1.fr - Site web : <http://www.univ-lille1.fr/irem/>

Tél 03 20 43 66 66 - Fax 03 20 33 71 61